



## DISPOSIÇÃO DE FACILIDADES EM FILA DUPLA VIA PROGRAMAÇÃO INTEIRA MISTA

**Leonardo D. Secchin**

Departamento de Matemática Aplicada, UFES,  
29932-540, São Mateus, ES  
lsecchin@ceunes.ufes.br

**André R. S. Amaral**

Departamento de Matemática Aplicada, UFES,  
29932-540, São Mateus, ES  
amaral@inf.ufes.br

### RESUMO

Consideramos o problema de disposição de facilidades em fila dupla que é como alocar um dado número de máquinas em localizações em um ou outro lado de um corredor de forma que o custo total para transportar materiais entre essas máquinas seja minimizado. Propomos modificações em um modelo de programação inteira mista na literatura, obtendo um modelo mais apertado. Resultados computacionais comprovam a eficiência do novo modelo.

**PALAVRAS CHAVE.** Disposição de facilidades em fila dupla, Programação inteira, Otimização combinatória.

**Área principal** Otimização combinatória

### ABSTRACT

We consider the double row layout problem, which is how to allocate a given number of machines at locations on either side of a corridor so that the total cost to transport materials between these machines is minimized. We propose modifications to a mixed integer programming model in the literature, obtaining a tighter model. Computational results show the efficiency of the new model.

**KEYWORDS.** Double row layout problem. Integer programming. Combinatorial optimization.

**Main area** Combinatorial optimization

## 1. Introdução

O problema de disposição de facilidades envolve o posicionamento de facilidades em uma certa área de forma a otimizar uma função objetivo. Um objetivo usual é minimizar o custo total para transportar materiais entre facilidades ou departamentos, máquinas, etc. Problemas de disposição de facilidades ocorrem frequentemente na prática, por exemplo, no projeto de sistemas automatizados de manufatura.

Um sistema automatizado de manufatura consiste de um conjunto de máquinas e um dispositivo de tratamento de material que transporta material entre máquinas. Um projetista deve planejar uma configuração física das máquinas, que minimiza o custo do tratamento de material.

Para maior eficiência, o dispositivo de tratamento de material é posto para se mover ao longo de uma linha reta. Nesse contexto, o projetista pode implementar uma disposição de facilidades em fila única, i.e. todas as máquinas são dispostas no mesmo lado de um corredor; Alternativamente, uma disposição em fila dupla pode ser implementada, i.e. as máquinas podem ocupar ambos os lados de um corredor (veja, Heragu and Kusiak, 1988).

Esses tipos de disposição de facilidades dão origem, respectivamente, ao problema da disposição de facilidades em fila única – *single row facility layout problem* (SRFLP) (e.g. Simmons, 1969; Amaral, 2006); e ao problema de disposição de facilidades em fila dupla – *double-row layout problem* (DRLP) (e.g. Chung e Tanchoco, 2010; Amaral, 2013).

O DRLP é como alocar um dado número de máquinas em localizações em um ou outro lado do corredor de forma que o custo total para transportar materiais entre essas máquinas seja minimizado (Veja Fig 1). Chung and Tanchoco (2010) descreveram um exemplo prático de DRLP em uma linha de fabricação de LCD. Para resolver o DRLP, um modelo de programação inteira mista foi apresentado por Chung e Tanchoco (2010), que foi posteriormente corrigido por Zhang e Murray (2012). Amaral (2013) propôs um diferente modelo de programação inteira mista para o DRLP, o qual demonstrou ser mais eficiente que o modelo de Chung e Tanchoco (2010).

O DRLP é um problema de otimização combinatorial NP-Difícil, e, portanto, à medida que o número de máquinas a serem dispostas aumenta, o custo computacional para resolver o problema aumenta consideravelmente.

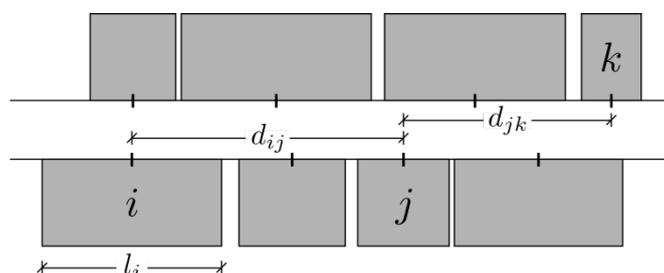


Figura 1. Disposição de facilidades em fila dupla. A distância  $d_{ij}$  é tomada entre os centros das máquinas  $i$  e  $j$ .

## 2. O modelo de Amaral(2013)

O modelo de Amaral (2013) considera as seguintes definições:

### 2.1 Parâmetros

$n$ : número de máquinas;

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ : Conjunto de máquinas;

$R = \{\text{linha inferior, linha superior}\}$ : Conjunto de linhas retas que definem um corredor;

$c_{ij}$ : Quantidade de fluxo entre as máquinas  $i$  e  $j$  ( $1 \leq i < j \leq n$ );

$\ell_i$ : Comprimento da máquina ( $1 \leq i \leq n$ );

$$L := \sum_{i=1}^n \ell_i.$$

## 2.2 Variáveis

$\alpha_{ij} = 1$ , se a máquina  $i$  está a esquerda da máquina  $j$  e ambas  $i$  e  $j$  estão na mesma linha;  $\alpha_{ij} = 0$ , caso contrário ( $1 \leq i, j \leq n; i \neq j$ );

$x_i$ : abscissa do centro da máquina  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) no eixo- $x$ ;

$d_{ij}$ : distância entre os centros das máquinas  $i$  e  $j$  ( $1 \leq i < j \leq n$ ).

Assume-se que o corredor está situado com seu comprimento ao longo do eixo- $x$  no intervalo  $[0, L]$ ; a largura do corredor é desprezível; e a distância entre duas máquinas é tomada entre seus centros.

O modelo de programação inteira mista de Amaral (2013) é:

M1:

$$\text{Minimizar } \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n c_{ij} d_{ij} \quad (1)$$

$$d_{ij} \geq x_i - x_j, \quad (1 \leq i < j \leq n) \quad (2)$$

$$d_{ij} \geq x_j - x_i, \quad (1 \leq i < j \leq n) \quad (3)$$

$$d_{ij} - \left( \frac{\ell_i + \ell_j}{2} \right) \alpha_{ij} - \left( \frac{\ell_i + \ell_j}{2} \right) \alpha_{ji} \geq 0, \quad (1 \leq i < j \leq n) \quad (4)$$

$$x_i + \left( \frac{\ell_i + \ell_j}{2} \right) \leq x_j + L(1 - \alpha_{ij}), \quad (1 \leq i, j \leq n; i \neq j) \quad (5)$$

$$x_{i^*} \leq x_{j^*}, \quad (i^*, j^*) = \arg \min_{1 \leq i < j \leq n} c_{ij} \quad (6)$$

$$-\alpha_{ij} + \alpha_{ik} + \alpha_{jk} - \alpha_{ji} + \alpha_{ki} + \alpha_{kj} \leq 1, \quad (i, j, k \in N; i < j; k \neq i, k \neq j) \quad (7)$$

$$-\alpha_{ij} + \alpha_{ik} - \alpha_{jk} + \alpha_{ji} - \alpha_{ki} + \alpha_{kj} \leq 1, \quad (i, j, k \in N; i < j; k < j; i \neq k) \quad (8)$$

$$\alpha_{ij} + \alpha_{ik} + \alpha_{jk} + \alpha_{ji} + \alpha_{ki} + \alpha_{kj} \geq 1, \quad (1 \leq i < j < k \leq n) \quad (9)$$

$$\alpha_{ij} \in \{0, 1\}, \quad (1 \leq i, j \leq n; i \neq j) \quad (10)$$

$$\frac{\ell_i}{2} \leq x_i \leq L - \frac{\ell_i}{2}, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (11)$$

A função objetivo (1) minimiza o fluxo total entre as máquinas; as restrições (2) e (3) fornecem a distância entre cada par de máquinas; (4) garante que se as máquinas  $i$  e  $j$  são alocadas em uma mesma fila, então a distância entre seus centros é no mínimo  $(\ell_i + \ell_j)/2$ ; (5) proíbe sobreposição entre máquinas; (6) evita simetria; (7)-(10) caracterizam os vetores incidência ( $\alpha_{ij}$ ) de uma solução do DRLP.

## 3. O novo modelo

Baseados no modelo de Amaral (2013), propomos modificar a restrição (4) no sentido de considerar as máquinas alocadas entre  $i$  e  $j$ . Para  $i < j$ ,  $k \neq i$ ,  $k \neq j$ , definimos a variável binária  $e_{ijk}$  tal que  $e_{ijk} = 1$ , se a máquina  $k$  está entre as máquinas  $i$  e  $j$ , todas em uma mesma fila; e  $e_{ijk} = 0$ , caso contrário. Observe que se existir um conjunto  $S_{i,j} \subset N$  de máquinas alocadas

entre as máquinas  $i$  e  $j$ , todas elas em uma mesma fila, então podemos estreitar o lado direito da restrição (4) para  $\sum_{k \in S_{i,j}} l_k$ . Além disso,  $d_{ij} > (\ell_i + \ell_j)/2$  quando  $S_{ij} \neq \emptyset$ , de forma que a restrição (5) pode ser também reformulada substituindo-se  $(\ell_i + \ell_j)/2$ , o limitante inferior para  $|x_j - x_i|$ , pelo limitante mais estreito  $d_{ij}$ . Dessa forma, obtemos o seguinte modelo:

M2:

$$\text{Minimizar } \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n c_{ij} d_{ij} \quad (1)$$

(2),(3),(6)-(11)

$$d_{ij} - \left( \frac{\ell_i + \ell_j}{2} \right) \alpha_{ij} - \left( \frac{\ell_i + \ell_j}{2} \right) \alpha_{ji} \geq \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq i, k \neq j}}^n l_k e_{ijk}, \quad (1 \leq i < j \leq n) \quad (12)$$

$$x_i + d_{ij} \leq x_j + 2(L - \ell_i/2 - \ell_j/2)(1 - \alpha_{ij}), \quad (i, j \in N; i < j) \quad (13)$$

$$x_i + d_{ji} \leq x_j + 2(L - \ell_i/2 - \ell_j/2)(1 - \alpha_{ij}), \quad (i, j \in N; i > j) \quad (14)$$

$$e_{ijk} \geq \alpha_{ik} + \alpha_{kj} - 1, \quad (i, j, k \in N; i < j; k \neq i, k \neq j) \quad (15)$$

$$e_{ijk} \geq \alpha_{jk} + \alpha_{ki} - 1, \quad (i, j, k \in N; i < j; k \neq i, k \neq j) \quad (16)$$

$$e_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad (i, j, k \in N; i < j; k \neq i, k \neq j) \quad (17)$$

Note que a restrição (12) é a reformulação da restrição (4). É possível mostrar que sempre vale  $d_{ij} - 2(L - \ell_i/2 - \ell_j/2) \leq x_j - x_i$ , donde seguem as restrições (13) e (14), que representam a reformulação da restrição (5). As restrições (15)-(17) juntamente com o objetivo fazem com que as variáveis  $e_{ijk}$  assumam somente valores de acordo com sua definição. No

modelo M1 há  $\frac{n}{2}(2n^2 - n - 1) + 1$  restrições,  $\frac{n}{2}(n - 1) + n$  variáveis contínuas e  $n(n - 1)$  variáveis binárias. No modelo M2 proposto, há  $n(n^2 - 3n + 2)$  restrições a mais, e  $\frac{n}{2}(n^2 - 3n + 2)$  variáveis binárias a mais. No entanto, a reformulação (12), (13) e (14) das restrições (4) e (5) contribuem para o ganho de performance em relação ao modelo M1.

### 3.1 desigualdades válidas

Como as distâncias formam uma métrica temos que as seguintes desigualdades são válidas:

$$d_{ij} \leq d_{ik} + d_{jk}, \quad d_{ik} \leq d_{ij} + d_{jk}, \quad d_{jk} \leq d_{ij} + d_{ik}, \quad (1 \leq i < j < k \leq n) \quad (18)$$

A variável  $e_{kij}$  é zero se as máquinas  $k, i$  e  $j$  não estiverem todas de um mesmo lado do corredor. Valem, portanto, as desigualdades:

$$e_{ijk} \leq \alpha_{ik} + \alpha_{ki}, \quad e_{ijk} \leq \alpha_{ij} + \alpha_{ji}, \quad e_{ijk} \leq \alpha_{jk} + \alpha_{kj}, \quad (i, j, k \in N; i < j; k \neq i, k \neq j) \quad (19)$$

## 4. Experimentos computacionais

Todos os testes foram realizados usando CPLEX 12.5 em um computador AMD Phenom II X4, 3.0 Ghz, 8 GB de RAM com sistema operacional GNU Linux 64 bits.

As instâncias do problema usadas nos experimentos computacionais podem ser obtidas

com os autores.

#### 4.1 Comparação entre variantes do modelo M2

A fim de analisar os efeitos das desigualdades (18) e (19), testamos o modelo M2 com as seguintes variações:

- $M_C$ : Modelo M2 com as desigualdades (18) usadas como cortes, inseridas por demanda;
- $M_T$ : Modelo M2 com as desigualdades (18) inseridas como restrições;
- $M_{TC}$ : Modelo  $M_T$  com as desigualdades (19) usadas como cortes.

A Tabela 1 mostra uma comparação de M2 e suas variações ( $M_C$ ,  $M_T$ , e  $M_{TC}$ ). Para cada instância do problema, reportamos a referência para os dados da instância, o nome da instância, sua dimensão  $n$ , seu valor ótimo, o modelo utilizado, o número de nós da árvore de enumeração consumidos na resolução, e o tempo de processamento.

Todos os testes terminaram com *gap* de otimalidade igual a zero. Cabe notar que a inserção de cortes é feita utilizando os padrões do CPLEX.

Os testes para os modelos  $M_C$  e  $M_T$  indicam que é melhor inserir as desigualdades triangulares (18) como restrições, particularmente para instâncias maiores (Am12b, Am13a, Am14a, Am14b, P15). Nota-se ainda que o número de nós utilizados em  $M_T$  foi menor que em  $M_C$  na totalidade das instâncias. Quanto ao uso dos cortes (19) em  $M_T$  (variante  $M_{TC}$ ), os testes são inconclusivos: em algumas instâncias, reduziu o tempo de processamento, enquanto em outras o tempo não foi reduzido, especialmente em P15.

A Figura 1 ilustra a comparação do tempo de resolução dos modelos  $M_C$ ,  $M_T$  e  $M_{TC}$ , em relação a M2.

#### 4.2 Comparação da melhor variante do modelo M2 com o modelo M1

Nesta seção, comparamos o modelo M1 com a melhor variante do modelo M2. Os resultados da Tabela 1 indicam que as variantes  $M_T$  e  $M_{TC}$  são melhores que M2 e  $M_C$  pois, quase na totalidade, tempos de resolução e número de nós foram reduzidos. Dentre  $M_T$  e  $M_{TC}$ , os tempos de resolução oscilam. No entanto o número de nós é menor para  $M_{TC}$  em nove das onze instâncias. Por isso elegemos  $M_{TC}$  para comparação com o modelo M1. A Tabela 2 mostra os resultados. Foi imposto um limite de 11h de processamento para a instância P15 e 10h para as outras instâncias. Reportamos assim o *gap* percentual ao fim do processamento.

Os testes mostram que, em geral,  $M_{TC}$  leva a uma redução considerável no tempo de processamento. O número de nós foi drasticamente reduzido em todas as instâncias, o que indica que  $M_{TC}$  é mais apertado que M1. Com isso, podemos esperar que para instâncias maiores a diferença no desempenho fique ainda mais evidente.

As instâncias Am14a e P15 não foram resolvidas dentro dos limites de tempo estabelecidos usando o modelo M1, mas foram resolvidas dentro dos limites de tempo usando o modelo  $M_{TC}$ . Esta é a primeira vez em que uma instância com tamanho  $n = 15$  departamentos foi resolvida. Portanto, com  $M_{TC}$  podemos obter soluções ótimas para instâncias maiores (com 14 e 15 departamentos) e de forma mais eficiente do que com métodos anteriores.

Referência	Problema	$n$	Valor ótimo	Modelo	Nós	Tempo (s)	
Simmons (1969)	S9	9	1179.00	M2	6363	4.38	
				M <sub>C</sub>	6363	4.48	
				M <sub>T</sub>	4525	5.73	
				M <sub>TC</sub>	4233	5.18	
	S9H	9	2293.00	M2	108307	45.57	
				M <sub>C</sub>	108307	45.55	
				M <sub>T</sub>	43398	41.44	
				M <sub>TC</sub>	41613	39.77	
	S10	10	1351.00	M2	24006	30.63	
				M <sub>C</sub>	24006	30.66	
				M <sub>T</sub>	12399	33.45	
				M <sub>TC</sub>	9661	28.83	
S11	11	3424.50	M2	129045	204.27		
			M <sub>C</sub>	129045	204.48		
			M <sub>T</sub>	58632	203.81		
			M <sub>TC</sub>	62661	250.60		
Amaral (2013)	Am12a	12	1493.00	M2	128064	315.27	
				M <sub>C</sub>	128064	315.58	
				M <sub>T</sub>	56325	385.55	
				M <sub>TC</sub>	48031	343.93	
	Am12b	12	1606.50	M2	193728	580.13	
				M <sub>C</sub>	193728	580.75	
				M <sub>T</sub>	58045	371.01	
				M <sub>TC</sub>	48052	302.93	
	Este artigo	Am13a	13	2456.50	M2	444411	1765.65
					M <sub>C</sub>	444411	1767.84
					M <sub>T</sub>	131222	1409.51
					M <sub>TC</sub>	170416	2066.14
Am13b		13	2864.00	M2	258194	1064.68	
				M <sub>C</sub>	258194	1066.18	
				M <sub>T</sub>	112278	1194.74	
				M <sub>TC</sub>	87959	1031.63	
Am14a		14	2904.00	M2	3119910	17018.23	
				M <sub>C</sub>	3119910	17013.99	
				M <sub>T</sub>	713205	12762.93	
				M <sub>TC</sub>	608724	9822.08	
Am14b	14	2736.00	M2	2346090	15747.37		
			M <sub>C</sub>	2346090	15738.54		
			M <sub>T</sub>	606589	10791.88		
			M <sub>TC</sub>	586068	10214.52		
Amaral (2006)	P15	15	3195.00	M2	4952418	40695.29	
				M <sub>C</sub>	4952418	40655.51	
				M <sub>T</sub>	1475006	34867.03	
				M <sub>TC</sub>	1380378	37396.27	

Tabela 1. Comparação entre o modelo M2 e suas variações.

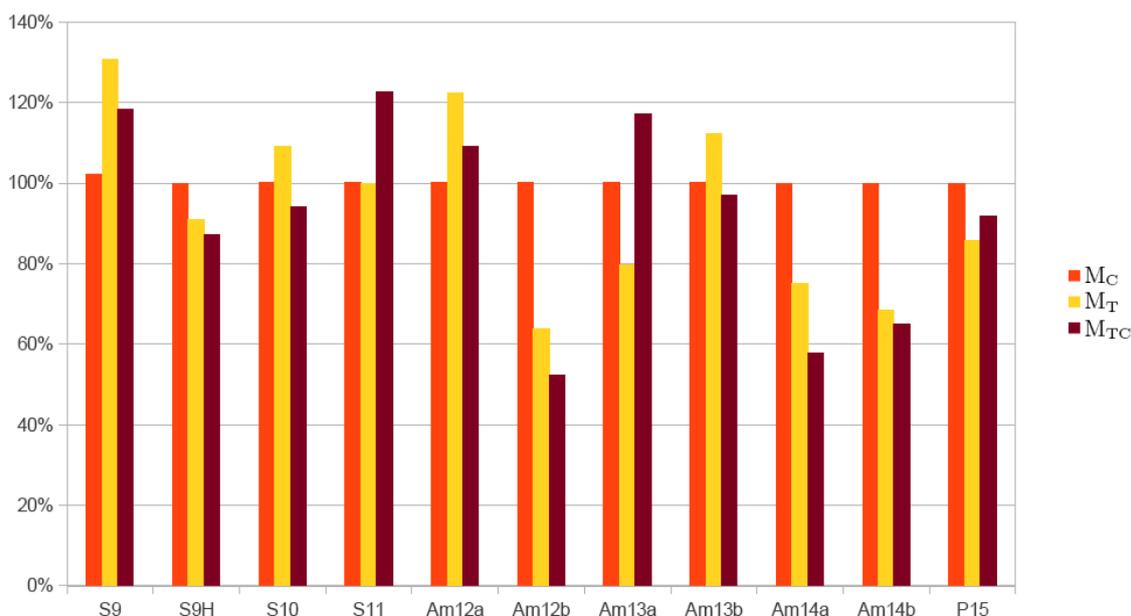


Figura 2: Comparação do tempo de resolução dos modelos M<sub>C</sub>, M<sub>T</sub> e M<sub>TC</sub>, em relação a M2.

Referência	Problema	<i>n</i>	Valor ótimo	Modelo	Nós	Gap (%)	Tempo (s)
Simmons (1969)	S9	9	1179.00	M1	20370	0	6.21
				M <sub>TC</sub>	4233	0	5.18
	S9H	9	2293.00	M1	531635	0	82.70
				M <sub>TC</sub>	41613	0	39.77
S10	10	1351.00	M1	145776	0	49.09	
			M <sub>TC</sub>	9661	0	28.83	
S11	11	3424.50	M1	806178	0	243.56	
			M <sub>TC</sub>	62661	0	250.60	
Amaral (2013)	Am12a	12	1493.00	M1	1678882	0	796.78
				M <sub>TC</sub>	48031	0	343.93
	Am12b	12	1606.50	M1	1146149	0	519.79
				M <sub>TC</sub>	48052	0	302.93
Este artigo	Am13a	13	2456.50	M1	19324040	0	8936.32
				M <sub>TC</sub>	170416	0	2066.14
	Am13b	13	2864.00	M1	4900214	0	2801.19
				M <sub>TC</sub>	87959	0	1031.63
Am14a	14	2904.00	M1	40422082	17.35	36000.47*	
			M <sub>TC</sub>	608724	0	9822.08	
Am14b	14	2736.00	M1	33688687	0	26735.30	
			M <sub>TC</sub>	586068	0	10214.52	
Amaral (2006)	P15	15	3195.00	M1	35756515	14.95	39600,10**
				M <sub>TC</sub>	1380378	0	37396.27

\*limite de 10h de processamento excedido

\*\*limite de 11h de processamento excedido

Tabela 2. Comparação entre os modelos M<sub>TC</sub> e M1.

## 5. Conclusões

Neste artigo, consideramos o problema de disposição de facilidades em fila dupla. Propusemos modificações no modelo de programação inteira mista concebido por Amaral (2013). Testes computacionais mostraram que a formulação modificada tem desempenho consideravelmente melhor.

Acreditamos que melhorias na formulação proposta são possíveis. Em trabalhos futuros, o estudo de desigualdades válidas para o modelo pode levar ao ganho de performance, quando inseridas em um método *branch-and-cut*.

## Referências

- Amaral, A.R.S.** (2006), On the exact solution of a facility layout problem, *European Journal of Operational Research*, 173, 508-518.
- Amaral, A.R.S.** (2013), Optimal solutions for the double row layout problem, *Optimization Letters*, 7, 407-413.
- Chung, J. e Tanchoco, J.M.A.** (2010), The double row problem, *International Journal of Production Research*, 48(3), 709-727.
- Heragu, S.S. e Kusiak, A.** (1988), Machine layout problem in flexible manufacturing systems, *Operations Research*, 36(2), 258-268.
- Simmons, D.M.** (1969), One-dimensional space allocation: an ordering algorithm, *Operations Research*, 17, 812-826.
- Zhang, Z. e Murray C. C.** (2012), A corrected formulation for the double row layout problem, *International Journal of Production Research*, 50, 4220-4223.