DOMINÂNCIA COLABORATIVA: QUANDO FAZER AO OUTRO AQUILO QUE VOCÊ GOSTARIA QUE ELE FIZESSE A VOCÊ É RACIONAL

Filipe Costa de Souza
Universidade Federal de Pernambuco/PIMES, Pernambuco – Brasil.
Av. Prof. Moraes Rêgo, 1235 - Cidade Universitária, Recife - PE - CEP: 50670-901
e-mail: filipecostadesouza@hotmail.com

Leandro Chaves Rêgo
Universidade Federal de Pernambuco/Departamento de Estatística, Pernambuco – Brasil.
Av. Prof. Moraes Rêgo, 1235 - Cidade Universitária, Recife - PE - CEP: 50670-901
e-mail: leandro@de.ufpe.br

RESUMO

Neste artigo, nosso objetivo é discutir a intuição geral do equilíbrio de Nash misto, em particular, analisamos em que situações tornar os demais jogadores indiferentes entre que estratégia escolher é racional (maximiza utilidade). Definimos o conceito de dominância colaborativa e dominância colaborativa estável e, a partir deles, chegamos à seguinte conclusão: em jogos 2x2, se existir um par de estratégias colaborativamente dominantes estáveis, então, o equilíbrio misto não é apropriado. Além disso, mostramos que existem situações em que o par de estratégias colaborativamente dominantes é instável, mas os jogadores são capazes de alcançar a cooperação via contratos de auto-penalização (ou queima de dinheiro), obtendo um resultado melhor do que quando jogam de acordo com o equilíbrio misto.

Palavras-chaves: Equilíbrio de Nash Misto, Dominância Colaborativa, Queima de Dinheiro.
Área de interesse: PO em Economia & Finanças (EF).

ABSTRACT

In this paper, our aim is to discuss the general intuition of mixed Nash equilibrium, in particular, we analyze in what situations making the other players indifferent among their strategies is rational (maximize utility). We define the concept of stable collaborative dominance and, from it, we reach the following conclusion: in 2x2 games, if there is a pair of stable collaboratively dominant strategies, then the mixed equilibrium is not appropriate. Moreover, we show that there are situations in which the pair of collaboratively dominant strategies is unstable, but players are able to cooperate via self-punishment (or burning money) agreements, reaching a better situation than playing the mixed equilibrium.

Keywords: Mixed Nash Equilibrium, Collaborative Dominance, Burning Money.

1. Introdução

O equilíbrio de Nash[1] em estratégia mista (Nash, 1951) é o conceito de solução mais popular na Teoria dos Jogos e amplamente apontado em livros texto como a solução para jogos sem e, em alguns casos, com múltiplos equilíbrios em estratégia pura. O seu uso é justificado em jogos de soma-zero, jogos de coordenação (nos quais nenhum critério de seleção de equilíbrio pode ser utilizado, como, por exemplo, o jogo da Batalha dos sexos) e muitos outros.

Em linhas gerais, uma estratégia mista[2] para um jogador é uma distribuição de probabilidade sobre as suas estratégias puras. Um perfil de estratégias mistas é uma coleção de estratégias mistas, sendo uma para cada jogador que participa do jogo. Assim, um equilíbrio de Nash em estratégias mistas é um perfil de estratégias mistas tal que nenhum jogador tem um incentivo de utilizar outra estratégia mista quando os demais jogam de acordo com o perfil de estratégias do equilíbrio, ou seja, qualquer jogador ao trocar unilateralmente sua estratégia de equilíbrio por outra obterá uma utilidade esperada menor ou igual a que é obtida no equilíbrio. Em um equilíbrio de Nash em estratégias mistas, os jogadores são indiferentes entre as suas estratégias puras que recebem probabilidade positiva de acordo com a estratégia mista, isto é, entre as estratégias puras no suporte da estratégia mista. De fato, como os jogadores são indiferentes entre essas estratégias puras, qualquer distribuição de probabilidade sobre elas dará ao jogador a mesma utilidade esperada. Em um equilíbrio misto, a escolha da distribuição de probabilidade, ou melhor, da estratégia mista é feita com o intuito de que os demais jogadores fiquem indiferentes entre as estratégias puras deles no suporte do equilíbrio.

Baseados nessa intuição, nossa proposta é discutir a validade geral do equilíbrio misto, em particular, analisamos em que situações tornar os demais jogadores indiferentes entre que estratégia escolher é racional (maximiza utilidade). Mas antes de discutir esse ponto, iremos expor algumas críticas existentes ao uso do equilíbrio misto iniciando pela argumentação de instabilidade presente em Harsanyi & Selten (1988, p.14-16).

Imagine um jogo sem equilíbrio em estratégia pura, ou seja, tendo apenas equilíbrio em estratégia mista como mostra a Figura 1.

		Jogador II	
		W	*Z*
Jogador I	*X*	*(45, 30)*	*(0, 90)*
	Y	*(30, 75)*	*(60, 45)*

Figura 1: Jogo sem equilíbrio em estratégia pura.

O equilíbrio em estratégia mista nesse jogo é $E=(M, N)$, com $M=(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, no qual o jogador I escolhe sua estratégia X como probabilidade $\frac{1}{3}$ e sua estratégia Y com a probabilidade complementar de $\frac{2}{3}$ e $N=(\frac{4}{5}, \frac{1}{5})$, no qual o jogador II escolhe a estratégia W com probabilidade $\frac{4}{5}$ e Z com a probabilidade complementar de $\frac{1}{5}$. Por uma questão didática, os autores propõem redefinir uma nova matriz de *payoffs*, sendo que desta vez, incluindo M como uma nova linha para o Jogador I e N como uma nova coluna para o Jogador II, resultado que pode ser visto na Figura 2.

[1] Para uma melhor compreensão das contribuições de Nash recomenda-se a leitura de Kunh *et al.* (1996) e Myerson (1999).

[2] Para definições mais formais do equilíbrio misto, bem como outras interpretações para o mesmo recomendamos: Nash (1951), Harsanyi (1973) e livros textos como, por exemplo, Myerson (1991), Rasmusen (1996) e Osborne & Rubinstein (1994).

		Jogador II		
		X	*Y*	*N*
Jogador I	*X*	*(45, 30)*	*(0, 90)*	*(36, 42)*
	Y	*(30, 75)*	*(60, 45)*	*(36, 69)*
	M	*(35, 60)*	*(40, 60)*	*(36, 60)*

Figura 2: Adicionando as estratégias mistas.

Realizado o processo de avaliação do valor esperado, os autores partem para uma análise de estabilidade do jogo em questão. Observe que se o jogador I escolher a sua estratégia mista *M*, o jogador II não tem nenhum incentivo direto para também jogar a sua estratégia mista (mesmo o par (*M, N*) sendo o equilíbrio do jogo). Isso ocorre, pois, dado que assumimos que o jogador I escolheu *M*, a utilidade esperada do jogador II será sempre de 60 independentemente de sua escolha. O mesmo ocorreria se assumirmos que o jogador II escolhe *N*, o jogador I teria uma utilidade esperada de 36, independentemente da estratégia que venha a escolher. Logo, por existirem infinitas estratégias que agem como melhor resposta a estratégia mista do adversário, o equilíbrio em estratégia mista é classificado como instável[3].

Nessa perspectiva, outro problema pode emergir: o bem-estar social. Observe o jogo proposto por Luce & Raiffa (1989, p. 107) e exposto na Figura 3.

		Jogador II	
		W	*Z*
Jogador I	*X*	*(1, 3)*	*(2, 3)*
	Y	*(1, 1)*	*(2, 1)*

Figura 3: Jogo com múltiplos equilíbrios puros.

Nesse jogo específico, todos os pares de estratégia são equilíbrios de Nash. Assim, utilizando a mesma abordagem de Harsanyi & Selten (1988), iremos criar uma nova matriz do jogo incluindo as estratégias mistas (*M, N*), como mostra a Figura 4. Porém, o leitor pode perceber que esse jogo contém infinitos equilíbrios em estratégias mistas, isto é, qualquer estratégia mista $M=(p^*, 1-p^*)$ para o jogador I, na qual $p^* \in [0,1]$ e qualquer estratégia mista $N=(q^*, 1-q^*)$ para o jogador II, na qual $q^* \in [0,1]$, será uma equilíbrio misto do jogo em questão.

		Jogador II		
		W	*Z*	*N*
Jogador I	*X*	$(1, 3)$	$(2, 3)$	$(2 - q^*, 3)$
	Y	$(1, 1)$	$(2, 1)$	$(2 - q^*, 1)$
	M	$(1, 2p^*+1)$	$(2, 2p^*+1)$	$(2 - q^*, 2p^*+1)$

Figura 4: Jogo com múltiplos equilíbrios puros e infinitos equilíbrios mistos.

Assim, a depender da escolha de p^* e q^*, a sociedade poderia se encontrar no melhor estado social (eficiente no sentido de Pareto) ou, em contrapartida, no estado social menos eficiente (ou ineficiente).

A última crítica é proposta por Kalai & Samet (1984). Os autores desenvolvem um refinamento ao conceito de equilíbrio de Nash na tentativa de eliminar pontos implausíveis do

[3] Ver também Kuhn *et al* (1996).

conjunto original de equilíbrios, denominando-o de equilíbrio persistente (*persistent equilibria*). Contudo, quando tal refinamento é aplicado ao jogo Batalha dos sexos ele elimina o equilíbrio misto, uma vez que a utilidade esperada obtida pelos jogadores é inferior a menor utilidade obtida em qualquer dos equilíbrios puros do jogo, como ilustra a Figura 5.

		Jogador II		
		W	*Z*	*N*
Jogador II	*X*	*(2, 1)*	*(0, 0)*	$({}^{2}/_{3}, {}^{1}/_{3})$
	Y	*(0, 0)*	*(1, 2)*	$({}^{2}/_{3}, {}^{4}/_{3})$
	M	$({}^{4}/_{3}, {}^{2}/_{3})$	$({}^{1}/_{3}, {}^{2}/_{3})$	$({}^{2}/_{3}, {}^{2}/_{3})$

Figura 5: Batalha dos sexos adicionando as estratégias mistas.

Harsanyi & Selten (1988) realizam fortes críticas ao conceito de refinamento proposto por Kalai & Samet (1984), sobretudo, no tocante a eliminação do equilíbrio misto no jogo citado. Os autores indicam que uma vez eliminado o equilíbrio misto, os jogadores não poderiam aplicar nenhum critério de seleção de equilíbrio para saírem do impasse em que se encontram e, por essa razão, o equilíbrio misto seria a opção mais plausível para os jogadores. Nesse ponto, concordamos fortemente com a opinião de Harsanyi & Selten (1988). Ademais, Myerson (1991) argumenta que para saírem desse impasse, os jogadores teriam que recorrer ao conceito de ponto focal[4] o qual, vale ressaltar, a depender do contexto do jogo, pode não existir.

2. Dominância Colaborativa Estável

Iniciamos nossa crítica ao equilíbrio misto analisando a seguinte questão: com base nos jogos expostos na Figura 6, por que o jogador I gostaria de tornar o jogador II indiferente com relação às estratégias dele, ou seja, por que ele jogaria o equilíbrio misto? Observe que nos jogos em questão, ambos os jogadores prefeririam que o outro escolhesse uma estratégia específica, independentemente de sua própria decisão. Mas, antes de responder a questão proposta, formalizamos, pois, esta idéia. Seja $\Gamma = (\mathrm{K}, (\mathrm{S_i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{K}}, (\mathrm{U_i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{K}})$ um jogo 2x2 na forma normal, em que K={I, II} é o conjunto de jogadores e $\mathrm{S_i}$ é o conjunto de estratégias puras e $\mathrm{U_i}$: $\mathrm{S_I} \times \mathrm{S_{II}} \to \mathbb{R}$ a função utilidade, ambas para o jogador $i \in K$. Então, podemos definir:

Dominância Colaborativa forte (ou estrita): Para o jogo Γ, dizemos que a estratégia $s_j^* \in S_j$ é *colaborativamente dominante no sentido estrito* em relação à estratégia $s_j \in S_j$ para o jogador *i* se $U_i(s_i, s_j^*) > U_i(s_i, s_j)$, $\forall\, s_i \in S_i$.

Dominância Colaborativa fraca (ou não-estrita): Para o jogo Γ, dizemos que a estratégia $s_j^* \in S_j$ é *colaborativamente dominante no sentido não-estrito* em relação à estratégia $s_j \in S_j$ para o jogador *i* se $U_i(s_i, s_j^*) \geq U_i(s_i, s_j)$, $\forall\, s_i \in S_i$ e, para um $\hat{s}_i \in S_i$, $U_i(\hat{s}_i, s_j^*) > U_i(\hat{s}_i, s_j)$.

A partir do conceito de dominância colaborativa exposto, podemos refazer a questão anteriormente inquirida: uma vez que exista uma estratégia do jogador *j* que é colaborativamente dominante para o jogador *i*, por que este gostaria de tornar o jogador *j* indiferente com relação às estratégias dele, ou seja, por que ele jogaria o equilíbrio misto? Assim, com base simplesmente no conceito de dominância colaborativa, o jogador *i* não deveria ter incentivo a jogar o equilíbrio

[4] Schelling (1960).

misto. Portanto, uma possível justificativa para este jogar o equilíbrio misto se fundamenta na idéia de estabilidade, conforme vemos a seguir.

Jogador I		*Jogador II*	
		W	*Z*
	X	*(3, 3)*	*(0, 2)*
	Y	*(2, 0)*	*(1, 1)*

Jogo da Caça ao cervo
(i)

Jogador I		*Jogador II*	
		W	*Z*
	X	*(0, 0)*	*(3, 1)*
	Y	*(1, 3)*	*(2, 2)*

Jogo da Galinha
(ii)

Jogador I		*Jogador II*	
		W	*Z*
	X	*(1, 3)*	*(2, 3)*
	Y	*(1, 1)*	*(2, 1)*

Jogo com múltiplos equilíbrios puros
(iii)

Jogador I		*Jogador II*	
		W	*Z*
	X	*(3, 0)*	*(0,1)*
	Y	*(2, 3)*	*(1, 2)*

Jogo sem equilíbrio puro
(iv)

Figura 6: Jogos com estratégia colaborativamente dominante.

Considere novamente os jogos da Figura 6. Neles, ambos os jogadores têm estratégias colaborativamente dominantes. Então, com base nesses jogos, analisemos o que ocorreria se ambos resolvessem cooperar, ou seja, se resolvessem jogar a estratégia que é colaborativamente dominante para o outro. Se assim o fizessem, os jogadores chegariam a um equilíbrio único nos jogos (*i*) e (*iii*), os quais são eficientes no sentido de Pareto. Por essa razão, poderíamos denominar esse dois equilíbrios de Nash de *equilíbrios colaborativos*. Todavia, para os jogos (*ii*), e (*iv*) a combinação de estratégias colaborativamente dominantes levaria os jogadores a pontos da matriz de *payoffs* que não correspondem a equilíbrios de Nash (no sentido puro), isto é, pontos que não são estáveis, mesmo que desejado por ambos. Para tornar esta questão mais clara, observe o jogo (*ii*). Nele, a estratégia *Z* do jogador II é colaborativamente dominante para o jogador I e a estratégia *Y* do jogador I é colaborativamente dominante para o jogador II. Contudo, se escolhessem o par (*Y, Z*) resultando em *payoffs* de (2, 2) – os quais, vale ressaltar, são maiores do que as utilidades esperadas do equilíbrio misto – ambos teriam benefícios por desvios unilaterais de estratégia. Logo o par (*Y, Z*) não é estável e por isso, não poderia ser considerado um equilíbrio, ao menos em jogos não-repetidos.

Então, percebe-se que o conceito de estratégia colaborativamente dominante não é suficiente para garantir que os jogadores não optarão pela estratégia mista. Por isso, é necessário classificar as estratégias colaborativamente dominantes de acordo com o critério de estabilidade a seguir:

Dominância Colaborativa estável (equilíbrio colaborativo): Para o jogo Γ, seja $s_j^* \in S_j$ uma estratégia colaborativamente dominante (fraca ou forte) para o jogador *i*, e seja $s_i^* \in S_i$ uma estratégia colaborativamente dominante (fraca ou forte) para o jogador *j*. Então, dizemos que o par de estratégias (s_i^*, s_j^*) é *colaborativamente estável* se $U_i(s_i^*, s_j^*) \geq U_i(s_i, s_j^*)$, $\forall\, s_i \in S_i$, e $U_j(s_i^*, s_j^*) \geq U_j(s_i^*, s_j)$, $\forall\, s_j \in S_j$.

Logo, podemos afirmar que o par (s_i^*, s_j^*) será estável quando for um equilíbrio de Nash. Ademais, por simplicidade de notação, sempre que $U_i(s_i^*, s_j^*) \geq U_i(s_i, s_j^*)$, $\forall\, s_i \in S_i$, mas ocorrer que $U_j(s_i^*, s_j^*) < U_j(s_i^*, s_j)$, para algum $s_j \in S_j$, diremos que o par (s_i^*, s_j^*) é instável para o jogador *j*. Agora, estamos aptos a responder a questão proposta no início da seção. *Em um jogo 2x2, uma vez que os jogadores tiverem estratégias colaborativamente dominantes, eles apenas* *devem optar pela escolha de outras estratégias (sejam elas puras ou mistas) quando o par de estratégias colaborativamente dominantes não for estável ao menos para um deles.*

3. Em Busca da Colaboração Estável

Na seção anterior, focamos nossa análise em jogos com equilíbrio misto na forma não-degenerada[5], chegando à seguinte conclusão: em um jogo 2x2, se existir um par de estratégias colaborativamente dominantes estáveis, então, o equilíbrio misto não é apropriado. Agora, ampliamos o debate, incluindo os jogos com apenas um equilíbrio puro, ou seja, com equilíbrio misto degenerado. Para isso, acrescentamos à análise outros dois jogos além dos já expostos na Figura 6, como mostra a Figura 7.

		Jogador II	
Jogador I		*W*	*Z*
	X	*(3, 3)*	*(0, 4)*
	Y	*(4, 0)*	*(1, 1)*

Jogo do Dilema dos Prisioneiros (v)

		Jogador II	
Jogador I		*W*	*Z*
	X	*(3, 0)*	*(2, 2)*
	Y	*(1, 1)*	*(0, 3)*

Jogo com equilíbrio puro eficiente (vi)

Figura 7: Jogos com estratégias colaborativamente dominante – parte II.

Avaliando cada jogo, observamos que: no jogo (*v*), a estratégia *W* do jogador II é colaborativamente dominante para o jogador I e a estratégia *X* do jogador I é colaborativamente dominante para o jogador II. Nesse jogo, o par (*X, W*) é instável e o único equilíbrio existente é o par de estratégias (*Y, Z*) que é, contudo, ineficiente. Por outro lado, no jogo (*vi*), a estratégia *W* do jogador II é colaborativamente dominante para o jogador I e a estratégia *Y* do jogador I é colaborativamente dominante para o jogador II. Observe também que o par (*Y, W*) é instável e o único equilíbrio do jogo é o par de estratégias (*X, Z*) que é, por sua vez, eficiente.

Agora, com base nos seis jogos expostos, podemos afirmar que utilizando o conceito de dominância colaborativa estável, os jogadores seriam capazes de alcançar o equilíbrio eficiente nos jogos (*i*) e (*iii*) da Figura 6. Todavia, nos jogos (*ii*) e (*iv*) da Figura 6 e no jogo (*v*) da Figura 7, se optarem pelo equilíbrio misto – que no caso do jogo (*v*) é um equilíbrio degenerado, isto é, ambos os jogadores atribuem probabilidade um às suas estratégias dominantes – os jogadores receberiam uma utilidade esperada menor quando comparada com a utilidade proveniente da combinação de estratégias colaborativamente dominantes (mesmo este não sendo um equilíbrio de Nash). Assim, podemos afirmar que, nesses casos, os jogadores gostariam de tornar o par de estratégias colaborativamente dominantes instável em um equilíbrio de Nash.

Porém, para que esta transformação seja admissível, temos que analisar o jogo não mais pela ótica dos jogos não-cooperativos, e sim dos jogos cooperativos, nos quais a comunicação entre os jogadores bem como a realização de acordos são possíveis. Para facilitar o entendimento do problema proposto e manter a didática utilizada ao longo do texto, analisaremos inicialmente a questão por meio de alguns exemplos antes de defini-la formalmente. Primeiro, suponha o jogo do dilema dos prisioneiros (*v*), suponha também que a comunicação é permitida. Então, os jogadores poderiam, por exemplo, firmar o seguinte acordo conjunto antes do início do jogo: se o meu adversário cooperar comigo e eu não cooperar com ele, eu serei obrigado a me penalizar em uma unidade de minha utilidade (queimar dinheiro).

[5] Utilizaremos os termos equilíbrio misto *degenerado* e *não-degenerado* no mesmo sentido de Fudenberg & Tirole (1991).

A partir desse acordo, o jogo (*v*) da Figura 7 seria transformado como mostra a Figura 8. Agora, o novo jogo passa a ter dois equilíbrios de Nash em estratégia pura, porém, pelo critério da dominância colaborativa estável, o par (*X, W*) seria escolhido.

		Jogador II	
		W	*Z*
Jogador I	*X*	*(3, 3)*	*(0, 4)*
	Y	*(4, 0)*	*(1, 1)*

Jogo original

		Jogador II	
		W	*Z*
Jogador I	*X*	*(3, 3)*	*(0, 3)*
	Y	*(3, 0)*	*(1, 1)*

Jogo transformado

Figura 8: Transformando estratégias colaborativas instáveis em estáveis.

Utilizando um acordo análogo, um resultado semelhante poderia ser obtido no jogo (*ii*) da Figura 6 como mostra a Figura 9. O jogo em questão passaria a ter três equilíbrios em estratégia pura, mas, novamente, pelo princípio da dominância colaborativa estável, apenas o par (*Y, Z*) seria selecionado.

		Jogador II	
		W	*Z*
Jogador I	*X*	*(0, 0)*	*(3, 1)*
	Y	*(1, 3)*	*(2, 2)*

Jogo original

		Jogador II	
		W	*Z*
Jogador I	*X*	*(0, 0)*	*(2, 1)*
	Y	*(1, 2)*	*(2, 2)*

Jogo transformado

Figura 9: Transformando estratégias instáveis em estáveis – um segundo exemplo.

No jogo (*iv*) da Figura 6, note que o par de estratégias colaborativamente dominantes é instável apenas para o jogador I, assim, a comunicação e o acordo necessitam ser apenas parciais, isto é, o contrato deveria ser unilateral. O contrato dirá: se o jogador I não colaborar com o jogador II quando este colaborar, ele terá que se auto-penalizar em uma unidade de sua utilidade, como mostrado na Figura 10.

		Jogador II	
		W	*Z*
Jogador I	*X*	*(3, 0)*	*(0, 1)*
	Y	*(2, 3)*	*(1, 2)*

Jogo original

		Jogador II	
		W	*Z*
Jogador I	*X*	*(2, 0)*	*(0, 1)*
	Y	*(2, 3)*	*(1, 2)*

Jogo transformado

Figura 10: Transformando estratégias instáveis em estáveis – um terceiro exemplo.

Por fim, mesmo existindo contratos capazes de transformar o par (*Y, W*) em um equilíbrio de Nash no jogo (*vi*) da Figura 7, o mesmo não seria assinado pelos jogadores, uma vez que a utilidade esperada obtida pelos jogadores com o par (*Y, W*) é inferior para ambos a que obtida no equilíbrio original. Com base nos exemplos, formalizemos a idéia de jogos com auto-penalização:

Jogo com auto-penalização: Seja $\Gamma = (K, (S_i)_{i \in K}, (U_i)_{i \in K})$ um jogo na forma normal. Dizemos que a função $\Psi(.)$ transforma o jogo Γ em um jogo com auto-penalização (ou queima de dinheiro) se além do conjunto de estratégias S_i, cada jogador tiver a opção de destruir (queimar) uma quantidade continua e positiva de sua utilidade. Assim temos: $\Psi(\Gamma) = (K, (\mathrm{S_i})_{\mathrm{i \in K}}, (\widehat{\mathrm{U}}_\mathrm{i})_{\mathrm{i \in K}})$, com $\widehat{\mathrm{U}}_\mathrm{i}((\times\, \mathrm{s_i})_{\mathrm{i \in K}}) = \mathrm{U_i}((\times\, \mathrm{s_i})_{\mathrm{i \in K}}) - \mathrm{p_i}((\times\, \mathrm{s_i})_{\mathrm{i \in K}})$, em que $\mathrm{p_i}((\times\, \mathrm{s_i})_{\mathrm{i \in K}}) \geq 0$, indica a penalidade sofrida pelo jogador *i* caso ocorra a combinação de estratégias $(\times\, \mathrm{s_i})_{\mathrm{i \in K}}$.

Como o objetivo é penalizar o jogador que não cooperar com o outro jogador quando este cooperar, então, podemos definir sem perda de generalidade que se $\mathrm{s_i^*}$ e $\mathrm{s_j^*}$ são estratégias colaborativamente dominantes para os jogadores *j* e *i*, respectivamente, então, $\forall\, \mathrm{s_i} \neq \mathrm{s_i^*}$ e $\mathrm{s_j} \neq \mathrm{s_j^*}$, temos $\mathrm{p_i}(\mathrm{s_i}, \mathrm{s_j^*}) > 0$, $\mathrm{p_j}(\mathrm{s_i^*}, \mathrm{s_j}) > 0$ e $\mathrm{p_i}$ e $\mathrm{p_j}$ são iguais a zero nos demais casos.

A função de transformação, ou melhor, o contrato entre os jogadores só será assinado se satisfizer a *restrição de participação* (ou restrição de racionalidade individual) que é dada por: $\widehat{\mathrm{U}}_\mathrm{i}((\times\, \mathrm{s_k^*})_{\mathrm{k \in K}}) \geq \mathrm{U_i^*}, \forall i \in \mathrm{K}$. Ela indica que os jogadores só irão assinar o contrato de cooperação se a utilidade obtida ao jogarem suas estratégias colaborativamente dominantes for maior ou igual à utilidade esperada obtida pela escolha do equilíbrio misto no jogo original, que é representada por $\mathrm{U_i^*}$. Como o objetivo do artigo é analisar em que situação é racional jogar um determinado equilíbrio misto, então fixamos um dado equilíbrio misto do jogo (caso exista mais de um) e $\mathrm{U_i^*}$ será a utilidade esperada deste equilíbrio para o jogador *i*. Para tornar esta intuição mais clara, observe o seguinte jogo da Figura 11.

<table>
<tr><td rowspan="4">Jogador I</td><td colspan="3">Jogador II</td></tr>
<tr><td></td><td>W</td><td>Z</td></tr>
<tr><td>X</td><td>(4, 1)</td><td>(2, 1)</td></tr>
<tr><td>Y</td><td>(3, 3)</td><td>(1, 2)</td></tr>
</table>

Figura 11: Definindo a utilidade esperada.

Nele, existem dois equilíbrios puros (*X, W*) e (*X, Z*), mas existem infinitos equilíbrios mistos, *E= (M, N),* nos quais *M*= (1, 0) e *N*=(q*, *1*-q*), com $q^* \in [0,1]$. Assim, é fácil ver que nesse exemplo, a restrição de participação sempre será atendida para o jogador II, porém, só será atendida para o jogador I se $q^* \in [0, 1/2]$. Assim, na perspectiva deste trabalho, os únicos equilíbrios mistos plausíveis são aqueles tais que $q^* > 1/2$, uma vez que os jogadores poderiam através de acordos de auto-penalização obter resultados melhores do que os obtidos jogando qualquer outro equilíbrio misto ($q^* \leq 1/2$).

Por esta razão, o termo $\mathrm{U_i^*}$ é fixado como a utilidade esperada de um determinado equilíbrio misto não-degenerado caso haja mais de um equilíbrio puro no jogo, ou é igual à utilidade proveniente do equilíbrio misto degenerado caso o jogo tenha apenas um equilíbrio puro. Ademais, como assumimos que $\mathrm{p_i}((\times\, \mathrm{s_k^*})_{\mathrm{k \in K}}) = 0$, $\forall i \in \mathrm{K}$, então, a restrição de participação poderia ser reescrita como:

Restrição de participação: $\mathrm{U_i}((\times\, \mathrm{s_k^*})_{\mathrm{k \in K}}) = \widehat{\mathrm{U}}_\mathrm{i}((\times\, \mathrm{s_k^*})_{\mathrm{k \in K}}) \geq \mathrm{U_i^*}, \forall i \in \mathrm{K}$.

Se satisfeita a restrição de participação, o contrato deve garantir que o par de estratégias colaborativamente dominantes seja estável no novo jogo, logo, o mesmo teria que atender a *restrição de estabilidade* (ou restrição de incentivo) dada por: $\widehat{\mathrm{U}}_\mathrm{i}((\times\, \mathrm{s_k^*})_{\mathrm{k \in K}}) \geq \widehat{\mathrm{U}}_\mathrm{i}(\mathrm{s_i}, \mathrm{s_j^*})$, $\forall\, \mathrm{s_i} \in \mathrm{S_i}$ e $\forall i \in \mathrm{K}$. Novamente, como assumimos que $\mathrm{p_i}((\times\, \mathrm{s_i^*})_{\mathrm{i \in K}}) = 0$, também podemos reescrever a restrição de estabilidade:

Restrição de estabilidade (ou de incentivo): $\mathrm{U_i}((\times\, \mathrm{s_k^*})_{\mathrm{k \in K}}) = \widehat{\mathrm{U}}_\mathrm{i}((\times\, \mathrm{s_k^*})_{\mathrm{k \in K}}) \geq \widehat{\mathrm{U}}_\mathrm{i}(\mathrm{s_i}, \mathrm{s_j^*}), \forall\, \mathrm{s_i} \in \mathrm{S_i}$ e $\forall i \in \mathrm{K}$. Ademais, como desejamos que as $\mathrm{s_i^*}$ permaneça uma estratégia colaborativamente dominante, podemos assumir sem perda que $\mathrm{p_i}(\mathrm{s_i}, \mathrm{s_j^*}) = \mathrm{U_i}(\mathrm{s_i}, \mathrm{s_j^*}) - \mathrm{U_i}((\times\, \mathrm{s_k^*})_{\mathrm{k \in K}})$.

O teorema a seguir mostra que sempre que um par de estratégias fortemente colaborativamente dominantes for instável para ambos os jogadores e este também for capaz de satisfazer a restrição de participação, então existirá um contrato de auto-penalização, de forma que tornará este par em um equilíbrio estável e eficiente.

Teorema 1: Seja Γ um jogo 2x2 na forma normal com comunicação e seja (s_I^*, s_{II}^*) um par de estratégias colaborativamente dominantes estritas e instáveis para ambos os jogadores.

Parte A: Se $(s_I^*,\ s_{II}^*) > U_I^*$ e $U_{II}(s_I^*,\ s_{II}^*) > U_{II}^*$, então existe uma função transformação $\Psi(\Gamma)$ capaz de transformar uma situação de não-cooperação, em uma situação de cooperação através da auto-penalização de ambos os jogadores, ou seja, tal que transformará o par (s_I^*, s_{II}^*) em um equilíbrio colaborativo estável e eficiente; e preservará as estratégias s_I^* e s_{II}^* como estratégias fortemente colaborativamente dominantes.

Parte B: Se $U_I(s_I^*,\ s_{II}^*) \geq U_I^*$ e $U_{II}(s_I^*,\ s_{II}^*) \geq U_{II}^*$, então existe uma função transformação $\Psi(\Gamma)$ capaz de transformar uma situação de não-cooperação, em uma situação de cooperação através da auto-penalização de ambos os jogadores, ou seja, tal que transformará o par (s_I^*, s_{II}^*) em um equilíbrio colaborativo estável e eficiente, tornando as estratégias s_I^* e s_{II}^* em estratégias fracamente colaborativamente dominantes.

Para os casos em que o par de estratégias colaborativamente dominantes for instável para apenas um dos jogadores, podemos estender esta idéia com o seguinte corolário:

Corolário 1.1: Seja Γ um jogo 2x2 na forma normal com comunicação parcial e seja (s_I^*, s_{II}^*) par de estratégias colaborativamente dominantes estritas, mas instável apenas para o jogador I (respectivamente II).

Parte A: Se $U_I(s_I^*,\ s_{II}^*) > U_I^*$ e $U_{II}(s_I^*,\ s_{II}^*) > U_{II}^*$, então existe uma função transformação $\Psi(\Gamma)$ capaz de transformar uma situação de não-cooperação, em uma situação de cooperação através da auto-penalização do jogador I (respectivamente II), ou seja, tal que transformará o par (s_I^*, s_{II}^*) em um equilíbrio colaborativo estável e eficiente; e preservará as estratégias s_I^* e s_{II}^* como estratégias fortemente colaborativamente dominantes.

Parte B: Se $U_I(s_I^*,\ s_{II}^*) \geq U_I^*$ e $U_{II}(s_I^*,\ s_{II}^*) \geq U_{II}^*$, então existe uma função transformação $\Psi(\Gamma)$ capaz de transformar uma situação de não-cooperação, em uma situação de cooperação através da auto-penalização do jogador I (respectivamente II), ou seja, tal que transformará o par (s_I^*, s_{II}^*) em um equilíbrio colaborativo estável e eficiente; tornando a estratégia s_I^* (respectivamente s_{II}^*) em uma estratégia fracamente colaborativamente dominante.

Ademais, conclusões e resultados semelhantes também poderiam ser obtidos se assumíssemos jogos com transferência de utilidade. Para um exemplo do mesmo, recomendamos a leitura de Andreoni & Varian (1999).

4. Considerações Finais

Por ser, sem dúvida, o mais importante conceito de solução em Teoria dos Jogos, o equilíbrio de Nash é constante alvo de análise, das quais podemos destacar os seus refinamentos[6], na tentativa de eliminar pontos implausíveis do conjunto original de estratégias, bem como os

[6] Ver Myerson (1978) e Kohlberg & Mertens (1986).

critérios de seleção de equilíbrio[7], os quais buscam estabelecer uma solução única para jogos com múltiplos equilíbrios.

Neste artigo, procuramos analisar o equilíbrio de Nash sob a ótica da racionalidade do equilíbrio misto. Para isto, propomos o conceito de dominância colaborativa estável (que é um equilíbrio de Nash no sentido puro). A partir desta definição, concluímos que em um jogo 2x2, se existir um par de estratégias colaborativamente dominantes estáveis, então, o equilíbrio misto não é apropriado. Além disso, mostramos que existem situações em que o par de estratégias colaborativamente dominantes é instável, mas os jogadores são capazes de alcançar a cooperação via contratos de auto-penalização (ou queima de dinheiro), obtendo um resultado melhor do que quando jogam de acordo com o equilíbrio misto.

Referências

Andreoni, J.; Varian, H. (1999), "Preplay contracting in the Prisoners' Dilemma," Economic Sciences. 96, 10933-10938.
Fundenberg, D; Tirole, J. (1991). Game Theory. Cambridge: MIT Press.
Harsanyi, J. C. (1973). "Games with Randomly Disturbed Payoffs: A New Rationale for Mixed Strategy Equilibrium Points," International Journal of Game Theory. 2, 1-23.
Harsanyi, J. C.; Selten, R. (1988) A General Theory of Equilibrium Selection in Games. London: MIT Press.
Kalai, E.; Samet, D. (1984). "Persistente Equilibria," International Journal of Game Theory, 13, 129-144.
Kohlberg, E.; Mertens, J. F. (1986). "On the Strategic Stability of Equilibria," Econometrica, 54, 1003-1037.
Kuhn, H *et al*. (1996). "The work of John Nash in game theory," Journal of Economic Theory, 69, 153-185.
Luce, R. D; Raiffa, H. (1989). Games and Decision: Introduction and Critical Survey. New York: Dover.
Myerson, R.B. (1978). "Refinements of the Nash Equilibrium Concept," International Journal of Game Theory. 7, 73-80.
Myerson, R.B. (1999). "Nash Equilibrium and the History of Economic Theory," Journal of Economic Literature. 37, 1067-1082.
Myerson, R. B. (1991). Game Theory: analysis of conflict. Londres: Harvard University Press.
Nash, J. F. (1951). "Non-Cooperative Games," The Annals of Mathematics, 54, 286-295.
Osborne, M. J.; Rubinstein, A. (1994). A Course in Game Theory. Cambridge Mass: MIT Press.
Rasmusen, E. (1996). Game and information: an introduction to game theory. Cambridge: Blackwell.
Rydval, O; Ortmann, A. (2005). "Loss avoidance as selection principle: Evidence from simple stag-hunt games," Economics Letters, 88, 101–107.
Schelling, T. C. (1960). The Strategy of Conflict. Londres: Harvard University Press.

[7] Ver, por exemplo, Harsanyi & Selten (1988) e Rydval & Ortmann (2005).