

Algoritmos Polinomiais para Colorações Ótimas em Algumas Famílias de Grafos

Clícia V. P. Friedmann
Abel R. G. Lozano

Faculdade de Formação de Professores
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Lilian Markenzon

Núcleo de Computação Eletrônica
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Christina F. E. M. Waga

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Bento Gonçalves - RS, Brasil
2010

Conteúdo

| | |
|--|-----------|
| Prefácio | 5 |
| 1 Introdução | 7 |
| 1.1 Conceitos Básicos | 7 |
| 1.2 Famílias | 8 |
| 1.3 Coloração | 9 |
| 1.4 Notas Bibliográficas | 10 |
| 2 Coloração de Vértices | 11 |
| 2.1 Introdução | 11 |
| 2.2 Resultados Conhecidos | 12 |
| 2.3 Grafos Periplanares Maximais | 13 |
| 2.4 Notas Bibliográficas | 17 |
| 3 Coloração de Arestas | 19 |
| 3.1 Introdução | 19 |
| 3.2 Cotas Inferiores e Superiores | 19 |
| 3.3 Quadrados Latinos e Grafos Completos | 20 |
| 3.4 Grafos Teia Completos | 23 |
| 3.5 Notas Bibliográficas | 26 |
| 4 Coloração Total | 29 |
| 4.1 Introdução | 29 |
| 4.2 Produto Cartesiano de Grafos | 31 |
| 4.3 Grafos Grade | 33 |
| 4.4 Notas Bibliográficas | 35 |

4

| | | |
|----------|---|-----------|
| 5 | Coloração Equilibrada | 37 |
| 5.1 | Coloração Equilibrada de Vértices | 37 |
| 5.1.1 | Definição e Exemplos | 37 |
| 5.1.2 | Cotas e Conjecturas | 39 |
| 5.1.3 | Grafos Bipartidos Completos | 39 |
| 5.2 | Coloração Equilibrada de Arestas | 42 |
| 5.3 | Coloração Total Equilibrada | 44 |
| 5.4 | Notas Bibliográficas | 45 |

Prefácio

Há mais de 150 anos, a coloração de grafos tem sido um tópico importante de pesquisa, desde a sua introdução como um problema de coloração de mapas. A grande quantidade de aplicações só aumentou o interesse no assunto, e foi natural o surgimento de extensões e variações do problema. A resolução eficiente de problemas por computador é outro tópico que hoje se apresenta como uma relevante área de pesquisa.

Entretanto, os currículos regulares dos cursos de matemática, computação e engenharia, nem sempre contemplam, com os devidos detalhes, a teoria algorítmica de grafos nas disciplinas que oferecem. Por esta razão, julgamos de interesse a apresentação de um texto que exemplifique a resolução algorítmica de tipos clássicos de problemas de coloração em algumas famílias conhecidas de grafos.

No Capítulo 1, são introduzidos conceitos básicos em teoria de grafos, necessários ao entendimento do restante do texto.

O problema clássico de coloração de vértices é apresentado no Capítulo 2 e é ilustrado pela família dos grafos periplanares maximais.

No Capítulo 3, a coloração de arestas é estudada e a família de grafos *teia* é colorida.

A coloração total é abordada no Capítulo 4 e a família tratada é a dos grafos *grade*.

Para complementar, apresentamos, no Capítulo 5, a coloração equilibrada de vértices, de arestas e total para a família dos grafos bipartidos completos.

Para finalizar, gostaríamos de prestar nossos sinceros agradecimentos à SOBRAPO, pelo espaço concedido para divulgação deste material, fruto de nossa experiência como professores da área.

Rio de Janeiro, 6 de agosto de 2010.

Clícia Friedmann, Abel Lozano, Lilian Markenzon e Christina Waga.

Capítulo 1

Introdução

O objetivo deste texto é mostrar os principais problemas de coloração e como podemos resolvê-los de maneira eficiente para algumas famílias de grafos. Após apresentarmos cada coloração e revermos alguns resultados teóricos mais significativos, introduziremos uma família conhecida na literatura, para a qual uma solução eficiente do problema será exibida.

Gostaríamos de frisar que nossa intenção é desenvolver soluções algorítmicas para os problemas de coloração abordados, mostrando como o conhecimento das características estruturais das famílias estudadas é fundamental. Omitimos no texto as demonstrações de importantes teoremas, como os de Vizing e Brooks, por considerarmos que podemos encontrá-las facilmente na literatura e não são o foco do minicurso.

1.1 Conceitos Básicos

Um grafo *não orientado*, ou simplesmente *grafo* G é um par (V, E) , onde V é o conjunto de *vértices* e E é o conjunto de *arestas*; cada aresta é um par não ordenado de vértices. Dada uma aresta $vw \in E$, os vértices v e w são denominados *extremidades* da aresta; dizemos também que a aresta *incide* sobre os vértices v e w . Uma aresta com as extremidades iguais é denominada um *laço*.

Os grafos que consideramos neste texto são finitos (possuem um número finito de vértices) e não têm laços. Usaremos sempre as convenções $n = |V|$ e $m = |E|$.

Dois vértices são *adjacentes* ou *vizinhos* quando são extremidades de uma aresta. Analogamente, duas arestas distintas incidentes ao mesmo vértice são chamadas *adjacentes*. O *conjunto de vizinhos* de um vértice $v \in V$ é o conjunto $N(v) = \{w \in V \mid vw \in E\}$. A cardinalidade $N(v)$ é denominada o *grau* de v , notado $d(v)$. O *grau máximo de um grafo* é $\Delta(G) = \max_{v \in V} \{d(v)\}$.

Um *caminho* em $G = (V, E)$ é uma sequência $[v_1, v_2, \dots, v_k]$ de $k > 0$ vértices tal que para $k > 1$ tem-se $v_i v_j \in E$, para $i = 1, \dots, k - 1$. O *comprimento* do caminho é $k - 1$. Um caminho é dito *simples* se os vértices que o constituem são todos distintos. Um *ciclo* é um caminho de comprimento maior ou igual a três em que o primeiro e o último vértices coincidem. Um *ciclo simples* é um caminho de comprimento maior ou igual a três em que somente o primeiro e o último vértices coincidem. Um grafo que não possui ciclos é dito *acíclico*.

Um grafo $G' = (V', E')$ é *subgrafo* de $G = (V, E)$ quando $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$. Dado um subconjunto de vértices $S \subseteq V$, denominamos $G[S] = (S, \{xy \in E \mid x \in S \text{ e } y \in S\})$ o *subgrafo de G induzido por S* . Em outras palavras, $G[S]$ é o subgrafo de G que tem S como conjunto de vértices e possui todas as arestas de E com extremidades pertencentes a S . Dizemos que S é uma *clique* quando $G[S]$ for um *grafo completo*, isto é, possui todas as arestas possíveis. Uma t -clique, $t \geq 1$, é uma clique de cardinalidade t . Na Figura 1.1, o subgrafo induzido por $S = \{d, f, g, h\}$ é $G[S] = (\{d, f, g, h\}, \{df, dg, fg, gh\})$, que não é completo. Já $S = \{a, b, c\}$ é uma 3-clique, pois induz um subgrafo completo. Quando S é uma t -clique e $G = G[S]$, denotamos $G = K_t$.

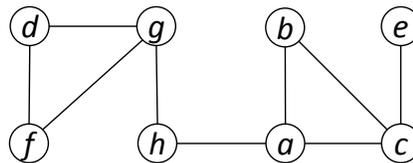


Figura 1.1: Exemplos de grafos.

Um grafo é *conexo* quando existir pelo menos um caminho entre cada par de vértices, do contrário, o grafo é dito *desconexo*.

1.2 Famílias

O conjunto de todos os grafos que satisfazem uma dada propriedade constitui uma *família* de grafos. Existem, na literatura, diversas famílias que vêm sendo, ao longo do tempo, exaustivamente estudadas tais como, os grafos planares (aqueles que podem ser desenhados sobre uma superfície plana sem que as arestas se cruzem) e os grafos hamiltonianos (aqueles que possuem um ciclo simples contendo todos os vértices do grafo).

Normalmente a definição de uma família consiste em mencionar a propriedade satisfeita pelos grafos que a constituem, exatamente como fizemos nesses dois exemplos. A seguir, algumas famílias importantes.

Um grafo onde quaisquer dois vértices distintos são adjacentes, é denominado *grafo completo*. Denotamos um grafo completo com n vértices por K_n . Um grafo conexo acíclico é denominado uma *árvore* e notado por T . Já um grafo conexo em que todos os vértices têm grau igual a dois, é um *grafo ciclo*. Denotamos um grafo ciclo com n vértices por C_n . O grafo obtido de C_n pela remoção de uma aresta é o *grafo caminho* P_n com n vértices. Se todos os vértices de C_{n-1} forem adjacentes a um vértice $v \notin C_{n-1}$, temos um *grafo roda* W_n com n vértices. O grafo cujo conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos V_1 e V_2 de forma que nenhuma aresta tenha ambas as extremidades no mesmo subconjunto, é dito *grafo bipartido* e denotado por $G = (V_1 \cup V_2, E)$. Um *grafo estrela* S_n com n vértices é um grafo bipartido cujo conjunto V_1 possui um único vértice e este vértice é adjacente a todos os vértices em V_2 . Temos na Figura 1.2 alguns exemplos.

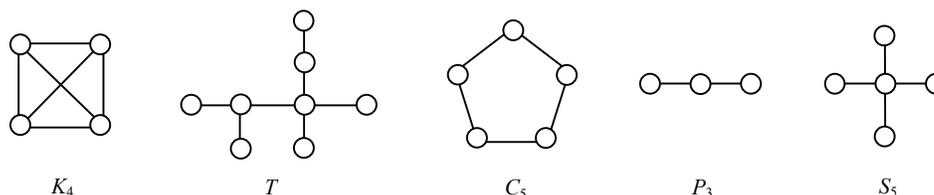


Figura 1.2: Exemplos de grafos.

Quando uma família de grafos é definida, um importante problema computacional a ser resolvido é o do *reconhecimento*, que consiste em obter um algoritmo para verificar se um grafo qualquer, dado como entrada, pertence à família em questão. Tal reconhecimento nem sempre é possível em tempo polinomial.

Todas as famílias escolhidas para exemplificar os problemas de coloração podem ser reconhecidas em tempo polinomial.

1.3 Coloração

Uma *coloração própria* de um grafo $G = (V, E)$ é uma atribuição de cores aos *elementos* do grafo, vértices, arestas ou ambos, de tal forma que elementos adjacentes recebem cores distintas. O conjunto de elementos com a mesma cor constitui uma *classe de cor*.

A cardinalidade do menor conjunto de cores que colore propriamente o conjunto V do grafo é o *número cromático*, representado por $\chi(G)$. O problema clássico de coloração de vértices consiste em colorir um grafo qualquer de maneira própria com o menor número de cores. Algumas variações desse problema surgiram nos últimos anos, impondo restrições sobre as cores disponíveis para cada vértice. Podemos destacar alguns tipos de colorações

condicionadas, tais como a coloração equilibrada (do inglês *equitable coloring*) e a coloração 2-distante (do inglês *2-distant coloring*). A coloração de vértices será apresentada no Capítulo 2, ilustrada pela família dos grafos periplanares maximais.

Analogamente, temos o *índice cromático*, $\chi'(G)$, que é a cardinalidade do menor conjunto de cores que colore propriamente o conjunto E . Para esta coloração temos o Teorema de Vizing que estabelece dois possíveis valores para $\chi'(G)$. As questões relativas a este tipo de coloração serão estudadas na família dos grafos teia completos no Capítulo 3.

A cardinalidade do menor conjunto de cores que colore propriamente o conjunto $V \cup E$ é o *número cromático total*, representado por $\chi''(G)$. Essa coloração será analisada no Capítulo 4 para os grafos grade.

Para complementar, apresentamos a coloração equilibrada de vértices, arestas e total para a família dos grafos bipartidos completos no Capítulo 5.

1.4 Notas Bibliográficas

Os livros de Diestel [11] e Gross e Yellen [15] abrangem, ampla e sistematicamente, a teoria de grafos; em português, podemos citar Boaventura [3]. Já os livros de McHugh [29] e Szwarcfiter [39] abordam, de maneira mais específica, aspectos referentes à área de algoritmos em grafos. Branstädt [5] é o texto fundamental sobre famílias de grafos e suas propriedades.

Coloração é um assunto mais estudado em Teoria de Grafos, e sua bibliografia é muito vasta. Como textos didáticos podemos citar os livros de Kubale [25], Yap [43] e Jensen e Toft [20].

Capítulo 2

Coloração de Vértices

2.1 Introdução

O problema mais conhecido de coloração em grafos é a coloração de vértices, isto é, colorir os vértices de tal forma que vértices adjacentes não tenham a mesma cor. Toda vez que uma situação de conflito entre pares de objetos pode ser modelada por grafos, e a solução do problema é uma partição do conjunto de objetos em subconjuntos mutuamente não conflitantes; esse problema pode ser visto como um problema de coloração. Em muitas dessas aplicações, interessa minimizar o número de cores utilizada.

Seja C um conjunto de cores. Uma *coloração própria dos vértices de G* é uma função $c : V \rightarrow C$ tal que se $vw \in E$ então $c(v) \neq c(w)$. Denotaremos por $c(S)$ o conjunto de cores utilizadas para colorir os vértices de $S \subset V$. Dizemos que G é *t -colorível* quando $|c(V)| = t \leq |C|$. O *número cromático* de G , denotado por $\chi(G)$, é o menor valor de t para o qual existe uma coloração própria de G .

Alguns resultados são imediatos:

- A atribuição de cores diferentes a todos os vértices de um grafo fornece um limite superior bastante óbvio: $1 \leq \chi(G) \leq n$.
- Se o grafo G contém uma clique de tamanho k , então pelo menos k cores são necessárias em uma coloração própria.
- Um grafo completo com n vértices requer n cores: $\chi(G) = n$.

Neste capítulo, vamos nos dedicar, principalmente, ao estudo de grafos planares e suas subfamílias. Faremos uma revisão dos principais resultados conhecidos e apresentaremos um algoritmo linear que determina a coloração ótima para grafos periplanares maximais, uma subfamília dos planares com interessantes propriedades.

2.2 Resultados Conhecidos

Nesta seção será apresentada uma revisão sobre a coloração de grafos planares. Os primeiros resultados sobre coloração de grafos se referem exatamente a essa família. Em 1852, Francis Guthrie apresentou a famosa *Conjectura das Quatro Cores*, observando que quatro cores eram suficientes para colorir um mapa de tal maneira que duas regiões fronteiriças não sejam coloridas com a mesma cor. Um mapa pode ser modelado por um grafo planar, cada região representada por um vértice e a fronteira entre duas regiões representada por uma aresta. Essa prova demorou até 1976 para ser exibida; entretanto, as tentativas produziram outros frutos. Um importante resultado foi obtido em 1890, por Heawood, o *Teorema das Cinco Cores*, que, como indicado por seu nome, estabelece que todo grafo planar pode ser colorido com não mais de cinco cores. Algoritmos eficientes para esta coloração são conhecidos; deve-se entretanto lembrar que esta não é uma coloração ótima para um grafo planar. A conjectura foi finalmente provada por Appel e Haken, sendo o primeiro resultado significativo que contou com o auxílio de um computador em seu desenvolvimento. Uma prova alternativa foi apresentada por Robertson *et al.*, dando origem a um algoritmo de complexidade $O(n^2)$ para a resolução do problema.

Grafos planares que podem ser coloridos com duas cores são facilmente reconhecidos. É, na realidade, uma particularização do resultado visto no Teorema 2.1. Sua prova é simples, que enunciaremos a seguir.

Teorema 2.1. *Um grafo é bicolorível se e somente se é bipartido.*

A família dos bipartidos, já definidos na Seção 1.2, é especialmente relevante para o problema da coloração. Além do Teorema 2.1, outras colorações serão vistas para a família no Capítulo 5.

Muitos resultados sobre coloração de grafos planares dizem respeito ao comprimento de seus ciclos, como é visto, por exemplo, no teorema a seguir, que apresenta outra maneira de reconhecer grafos bicoloríveis.

Teorema 2.2. *Um grafo G é bicolorível se e somente se G não contém ciclos de comprimento ímpar.*

Garantir que um grafo planar pode ser colorido com três cores é igualmente fácil? Se todas as faces são triangulares, o teorema que se segue apresenta a condição para tal.

Teorema 2.3. *Um grafo planar que tem todas as faces triangulares é 3-colorível se e somente se todos os vértices têm grau par.*

No Teorema 2.4 apresentamos um importante resultado, conhecido como Teorema de Grötzsch.

Teorema 2.4. *Todo grafo planar livre de triângulos é 3-colorível.*

Um algoritmo de complexidade $O(n \log n)$ já é conhecido para esta coloração. Entretanto, se é permitido ao grafo planar ter triângulos, determinar se o grafo é 3-colorível se torna NP-completo.

Em resumo, grafos planares podem ser coloridos de maneira eficiente com 2, 4 ou 5 cores. Garantir uma coloração com 3 cores é tarefa que se apresenta bem mais complicada, e talvez a área de pesquisa mais interessante. Na próxima seção vamos apresentar uma família, não livre de triângulos, para a qual é possível obter uma 3-coloração ótima em tempo linear para todos os membros.

2.3 Grafos Periplanares Maximais

Um grafo $G = (V, E)$ é *cordal* quando todo ciclo simples de comprimento maior ou igual a 4 possui uma corda (i.e. uma aresta ligando dois vértices não consecutivos do ciclo). Um grafo é *periplanar* se ele pode ser imerso no plano sem cruzamento de arestas de tal forma que todos os seus vértices estejam na face exterior. Um grafo periplanar é *maximal* quando a adição de uma aresta entre dois vértices não adjacentes resulta em um grafo não periplanar. Grafos periplanares maximais (*mops*, do inglês *maximal outerplanar graphs*) constituem uma subfamília de grafos cordais planares. Observe que como os vértices de um mop se encontram na face exterior, o contorno desta estabelece um ciclo hamiltoniano. As arestas do mop que pertencem ao ciclo hamiltoniano são chamadas externas; as demais, internas. Em todo mop, existem n arestas externas e $n - 3$ arestas internas, totalizando $2n - 3$ arestas.

A Figura 2.1 mostra um grafo periplanar não cordal, um periplanar maximal e um periplanar cordal não maximal.

Um mop $G = (V, E)$, com $|V| \geq 3$, pode ser também recursivamente definido:

1. um grafo completo com 3 vértices é um mop.
2. se G é um mop imerso no plano de tal forma que todo vértice pertence à face exterior, e H é obtido ligando-se um novo vértice às extremidades de uma aresta da face exterior, então H é um mop.
3. nada é um mop se não for construído por um número finito de aplicações das regras (1) e (2).

A definição recursiva acima estabelece, na realidade, uma construção passo a passo para um mop. Observe que, dado um mop qualquer, o acréscimo

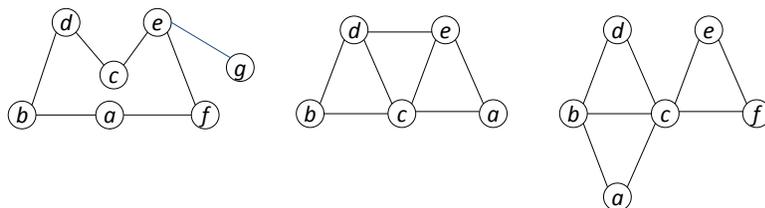


Figura 2.1: Três grafos periplanares.

de um vértice a este mop corresponde ao acréscimo deste vértice acompanhado de duas novas arestas, que passam a estabelecer um novo ciclo hamiltoniano. A Figura 2.2 ilustra este processo.

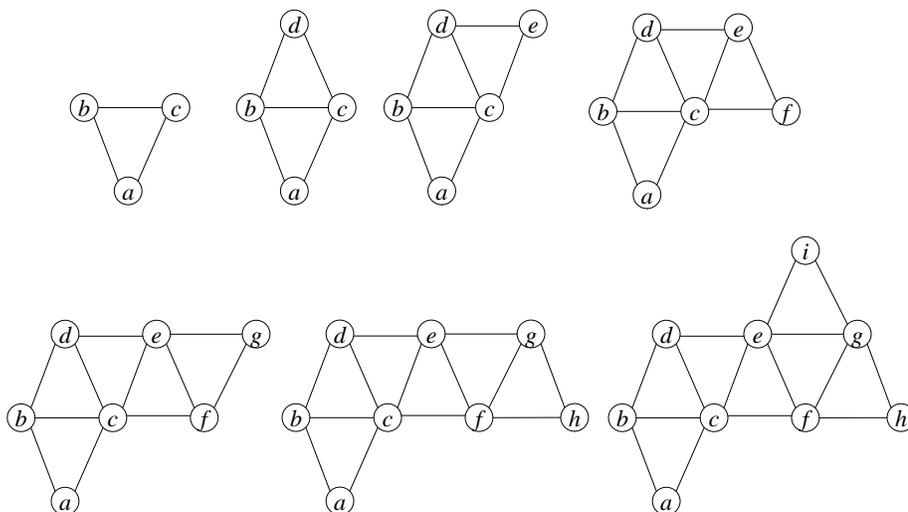


Figura 2.2: A construção de um mop.

Uma *rotulação recursiva* para um grafo periplanar maximal $G = (V, E)$ é uma função bijetiva $\beta : V \rightarrow \{1, \dots, |V|\}$ que satisfaz:

- (i) para $v = \beta^{-1}(1)$ e $w = \beta^{-1}(2)$, $vw \in E$;
- (ii) para $3 \leq k \leq |V|$, $\beta^{-1}(k)$ é adjacente a exatamente dois vértices v e w tais que $\beta(v) < k$ e $\beta(w) < k$.

Em outras palavras, os vértices rotulados com 1 e 2 devem ser extremidades de uma aresta de G e qualquer vértice com rótulo superior a 2 deve ser adjacente a exatamente dois vértices com rótulos estritamente menores que o seu.

É fácil observar que uma rotulação recursiva exprime uma possível sequência de construção. Para o mop construído na Figura 2.2, a rotulação recursiva de seus vértices é apresentada na Figura 2.3.

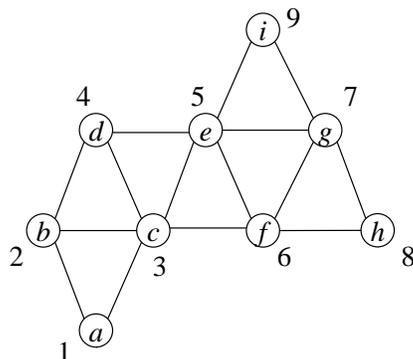


Figura 2.3: Rotulação recursiva.

Essa observação nos fornece a ideia principal para um procedimento simples de construção da rotulação recursiva de um mop dado G . O mop G será “desconstruído”, isto é, a rotulação será obtida em ordem inversa. A cada passo, um vértice de grau 2 é removido do grafo (e acrescentado ao fim da sequência). Os vértices pertencentes à sua lista de adjacência, que ainda não foram rotulados, são atualizados, tendo seu grau diminuído. Os vértices que podem ser removidos são mantidos em uma lista. A sequência dos vértices também será determinada, na variável seq . O Algoritmo 2.1 implementa esta tarefa.

Algoritmo 2.1. *Obtenção da Rotulação Recursiva*

Entrada: Mop G , representado por listas de adjacência;
Saída: Rotulação β ;
Início
Para $v \in V$ **faça**
 $\beta[v] \leftarrow 0$; $grau[v] \leftarrow |N(v)|$;
 $lista \leftarrow \{v \in V \mid grau[v] = 2\}$;
 $i \leftarrow n$;
Enquanto $i > 3$ **faça**
 Retire um elemento v de $lista$;
 $seq[i] \leftarrow v$; $\beta[v] \leftarrow i$; $i \leftarrow i - 1$;
 Para $w \in N(v)$ **faça**
 Se $\beta[w] = 0$ **então**
 $grau[w] \leftarrow grau[w] - 1$;
 Se $grau[w] = 2$ **então** Inserir w em $lista$;
 $seq[3] \leftarrow t$; $seq[2] \leftarrow w$; $seq[1] \leftarrow v$; restam em $lista$: v, w, t
 $\beta[v] \leftarrow 1$; $\beta[w] \leftarrow 2$; $\beta[t] \leftarrow 3$;
Fim.

A rotulação recursiva indica uma forma bem simples para colorir um mop. Primeiramente, os vértices rotulados 1, 2 e 3, que estabelecem uma clique de cardinalidade 3, recebem três cores quaisquer. Sabemos que todo

vértice $v \in V$ tal que $\beta(v) = k$, para $3 \leq k \leq |V|$, é adjacente a exatamente dois vértices de rótulo menor que o seu. Então, se colorirmos os vértices seguindo a ordem da rotulação recursiva, o vértice v , quando analisado, terá exatamente dois vizinhos já coloridos, podendo receber a terceira cor, que estará disponível. Desta forma, um mop será colorido com três cores, o mínimo possível, tendo em vista que todas as cliques maximais do grafo têm cardinalidade 3.

O algoritmo de coloração se resume então a:

Passo 1: Estabelecer uma rotulação recursiva;

Passo 2: Percorrer os vértices, na ordem estabelecida por sua rotulação recursiva, atribuindo cor a cada vértice.

O Passo 1 é resolvido pelo Algoritmo 2.1; o Algoritmo 2.2, apresentado a seguir, implementa o Passo 2.

Algoritmo 2.2. *Coloração de G*

Entrada: Mop G , a ordem seq de sua rotulação β , $C = \{1, 2, 3\}$;

Saída: 3-coloração $c : V \rightarrow C$ de G ;

Início

Para $v \in V$ **faça** $c[v] \leftarrow 0$;

$v \leftarrow seq[1]$; $w \leftarrow seq[2]$;

$c[v] \leftarrow 1$; $c[w] \leftarrow 2$;

Para $i = 3, \dots, n$ **faça**

$v \leftarrow seq[i]$;

$soma \leftarrow 0$;

Para $w \in N(v)$ **faça**

Se $c[w] \neq 0$ **então**

$soma \leftarrow soma + c[w]$;

$c[v] \leftarrow 6 - soma$;

Fim.

Tanto o Algoritmo 2.1, que obtém a rotulação recursiva, quanto o Algoritmo 2.2, que colore os vértices seguindo a sequência obtida, percorrem os vértices e, para cada vértice, seus vizinhos. Logo, ambos têm complexidade $O(m)$. Como o grafo é planar, $O(n)$.

Grafos periplanares não maximais também podem ser coloridos de maneira eficiente. Primeiramente é preciso testar se o grafo é 2-colorível. Observe que o primeiro grafo da Figura 2.1 o é. Caso o grafo não seja bipartido, basta adicionar arestas de forma a obter um mop e colori-lo, usando os algoritmos apresentados.

2.4 Notas Bibliográficas

Francis Guthrie apresentou a Conjectura das Quatro Cores em 1852, que só foi provada em 1976 by Kenneth Appel and Wolfgang Haken [1]. Uma prova alternativa foi apresentada mais recentemente por Robertson *et al.* [33]. Um sumário dos resultados se encontra no site [41]. O Teorema das Três Cores deve seu nome a Herbert Grötzsch, que publicou sua prova em 1959. Um algoritmo de complexidade de tempo de $O(n \log n)$ para encontrar uma 3-coloração de um grafo que obedece a essa condição foi publicado Kowalik [24] em 2004. No caso geral, o problema é abordado por Garey e Johnson [14].

Syslo [38], Beyer [2] e Mitchell [31] são referências introdutórias sobre grafos periplanares maximais. Um algoritmo para o reconhecimento de um mop é encontrado em [22].

Capítulo 3

Coloração de Arestas

3.1 Introdução

Neste capítulo, estudamos a coloração de arestas que, de forma semelhante à coloração de vértices, estabelece que arestas adjacentes devem ter cores diferentes.

Dados $G = (V, E)$ um grafo e C um conjunto de cores, uma coloração de arestas de G com as cores de C é uma função $c' : E \rightarrow C$ tal que para todo par de arestas incidentes $uv, uv' \in E$ tem-se que $c'(uv) \neq c'(uv')$.

É importante observar que uma coloração de arestas define uma partição de E em emparelhamentos. Um *emparelhamento* é um conjunto de arestas, duas a duas não adjacentes. De fato, pela definição acima, tem-se que se $c'(uv) = c'(u'v')$, então uv não é adjacente a $u'v'$. Logo, cada classe de cor é um emparelhamento em G .

Obter uma coloração própria de arestas é fácil, basta usar uma cor diferente para cada aresta, entretanto, a ideia é colorir as arestas de G usando o menor número de cores possível. Desta forma, definimos o *índice cromático* de um grafo G , denotado por $\chi'(G)$, como sendo o menor inteiro k para o qual G tem uma coloração de arestas com k cores.

3.2 Cotas Inferiores e Superiores

Vamos analisar as cotas inferiores e superiores para $\chi'(G)$. O limite inferior natural é exatamente $\Delta(G)$, pois todas as arestas incidentes a um vértice de grau máximo devem ter cores diferentes. O surpreendente na coloração de arestas é que, diferente da coloração de vértices, o limite superior para o número de cores em C excede somente em uma unidade o limite inferior. Este resultado é devido ao matemático russo Vadim G. Vizing (1964), cujo

teorema enunciamos a seguir.

Teorema 3.1. *Para todo grafo $G = (V, E)$, $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Concluimos então que, dado um grafo G ,

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Se o grafo G é tal que $\chi'(G) = \Delta(G)$ então dizemos que é *classe 1*; caso $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$, o grafo é *classe 2*. Em geral, é difícil determinar quando um grafo é classe 1 ou 2, mas existem famílias de grafos para as quais é possível resolver o problema de forma eficiente. Por exemplo, grafos bipartidos e grafos completos de grau par são classe 1, já os grafos completos de grau ímpar são classe 2. Ressaltamos ainda que para mostrar que um grafo G é de classe 2 não basta exibir uma coloração com $\Delta(G) + 1$ cores, devemos provar também que não existe uma coloração com $\Delta(G)$ cores. Vejamos o caso de K_n , com n ímpar. Uma coloração própria de arestas pode ser vista como uma partição do conjunto E em emparelhamentos, sendo que cada um deles pode ter no máximo $\frac{n-1}{2}$ arestas. Como $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$, então são necessários $\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{n-1}{2}} = n = \Delta(G) + 1$ emparelhamentos para colorir as arestas de K_n .

Na próxima seção apresentamos uma ferramenta matemática que possui diversas aplicações, o quadrado latino, que no nosso caso é utilizado para colorir grafos completos.

3.3 Quadrados Latinos e Grafos Completos

Dado um conjunto $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, um *quadrado latino de ordem n relativo ao conjunto S* é uma matriz quadrada A de ordem n , onde $A(i, j) \in S$, para todo $i, j \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$ e nenhum elemento de S é repetido nas linhas ou colunas de A .

Observamos que podem existir mais do que um quadrado latino associado a um mesmo conjunto, conforme a Figura 3.1.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 1 | 4 | 2 |
| 3 | 1 | 4 | 2 | 0 |
| 1 | 4 | 2 | 0 | 3 |
| 4 | 2 | 0 | 3 | 1 |
| 2 | 0 | 3 | 1 | 4 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |
| 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |

Figura 3.1: Quadrados latinos associados ao conjunto $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Para colorir grafos completos de ordem ímpar vão nos interessar os quadrados latinos simétricos com relação à diagonal principal. A Figura 3.2 ilustra a coloração de K_5 usando um quadrado latino com esta característica.

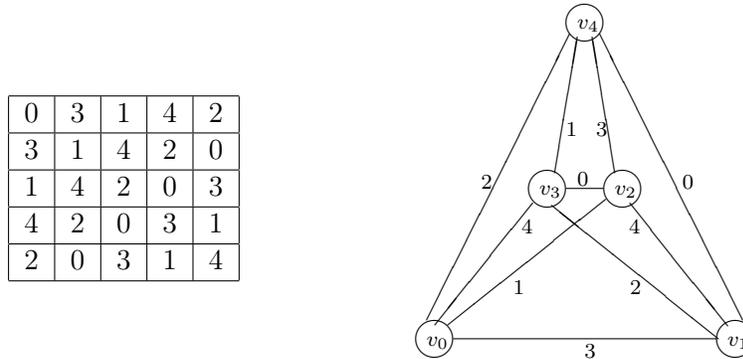


Figura 3.2: Coloração de K_5 usando um quadrado latino de ordem 5.

A coloração das arestas de $K_5 = (V, E)$ é feita da seguinte forma. Seja $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$. A aresta $v_i v_j$, $i \neq j$, recebe a cor correspondente à posição linha i e coluna j da matriz A que representa o quadrado latino. Vamos estender o resultado acima para qualquer grafo completo de ordem ímpar e lançar mão de um artifício que constrói implicitamente o quadrado latino. Se interpretarmos que na matriz o último elemento da cada linha está “colado” ao primeiro como se fosse um cilindro, então cada linha $i = 1, 2, 3, 4$ da matriz é obtida deslocando-se a linha 0, i posições à esquerda. Logo, basta apenas gerar uma linha da matriz (digamos a linha 0), para obter a coloração. Isto é feito de forma recursiva por:

$$\begin{cases} A(0, 0) = 0; \\ A(0, i) = (A(0, i - 1) + 3) \bmod 5 \quad \text{para } i = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Em geral, para n ímpar, temos:

$$\begin{cases} A(0, 0) = 0; \\ A(0, i) = (A(0, i - 1) + (n - 2)) \bmod n \quad \text{para } i = 1, \dots, n - 1. \end{cases}$$

Em decorrência, uma coloração de arestas $c' : E \rightarrow C$ pode ser gerada por

$$c'(v_i v_j) = A(0, (i + j) \bmod n)$$

para $i = 0, \dots, n - 2$ e $j = i + 1, \dots, n - 1$. Como estamos tratando do grafo completo, o número de arestas é $\frac{n(n-1)}{2}$. Logo, a coloração se consegue em ordem $O(n^2)$. Observe que a geração implícita do quadrado latino, de complexidade $O(n)$, não acarreta uma melhoria na complexidade global do algoritmo. Entretanto, como o quadrado latino é usado em outros tipos de coloração, julgamos pertinente chamar atenção para o artifício. As explicações anteriores se resumem no Algoritmo 3.1.

Algoritmo 3.1. *Coloração de arestas de K_n ímpar*

Entrada: n ímpar; vetor $a[n]$; grafo K_n ;
Saída: coloração de arestas $c' : E \rightarrow \{0, \dots, n - 1\}$;
Início
 $a[0] \leftarrow 0$;
Para $i \leftarrow 1$ **até** $n - 1$ **faça**
 $a[i] \leftarrow (a[i - 1] + (n - 2)) \bmod n$;
Para $i \leftarrow 0$ **até** $n - 2$ **faça**
Para $j \leftarrow i + 1$ **até** $n - 1$ **faça**
 $c'(v_i v_j) = a[(j + i) \bmod n]$;
Fim.

Finalmente, devemos ressaltar que o mesmo quadrado latino que é usado para colorir as arestas de um grafo completo de ordem ímpar n serve também para colorir as arestas de um grafo completo de ordem par $n+1$, já que o grafo K_{n+1} pode ser obtido a partir de K_n pela inclusão de um novo vértice ligado a todos os outros. As cores que aparecem na diagonal do quadrado latino de ordem n estão ausentes nas arestas do vértice correspondente. Assim, essas cores podem ser usadas para colorir as arestas incidentes ao novo vértice.

Para ilustrar, mostramos na Figura 3.3 a coloração de K_4 usando o mesmo quadrado latino de ordem 3 que foi usado para colorir K_3 . Desta forma, todo grafo completo de ordem par é classe 1.

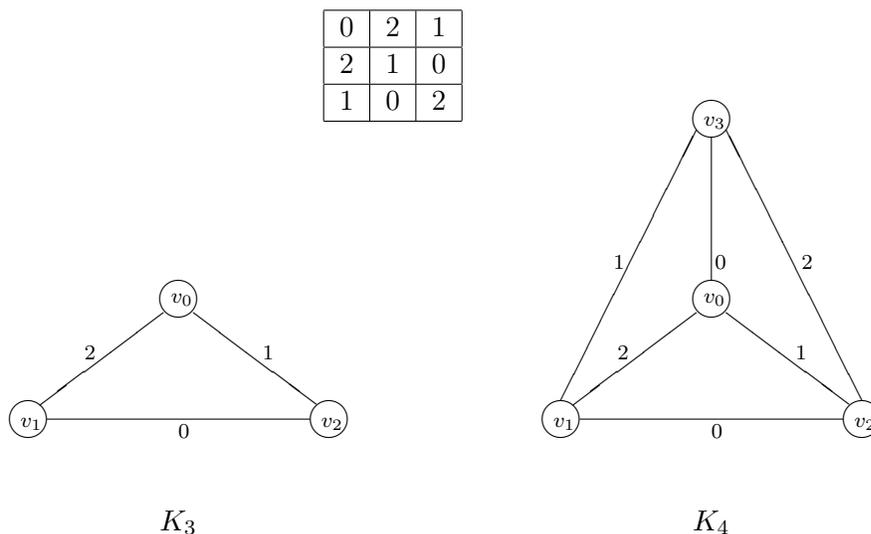


Figura 3.3: K_4 colorido, usando um quadrado latino de ordem 3.

Na próxima seção, apresentamos a coloração de arestas de grafos teia completos e mostraremos que eles são classe 1.

3.4 Grafos Teia Completos

Uma árvore $T = (V, E)$ é uma *teia base* quando existe no máximo um vértice de grau maior do que dois, denominado *raiz* ou *centro* da teia base, denotado por c . Se nenhum vértice tem grau maior do que dois, então qualquer vértice pode ser o centro. Uma *perna* da teia base é um caminho do centro a um vértice de grau um. O *tamanho* de uma perna é o seu número de vértices. A *distância de um vértice v ao centro, $d(v, c)$* , é o número de vértices existentes no caminho de c até v .

Um *grafo teia* T_k , com $k \geq 3$, é uma teia base T com k pernas p_1, \dots, p_k , sendo que cada perna p_i , $i = 1, \dots, k$, tem tamanho pelo menos igual a dois. Além disso, dois vértices em pernas distintas, $v \in p_i$ e $u \in p_j$, com $i \neq j$, são adjacentes quando $|i - j| \in \{1, k - 1\}$ e $d(v, c) = d(u, c)$.

Um grafo teia é *completo*, denotado por $T_{k,\ell}$ quando todas as pernas têm o mesmo tamanho ℓ e quaisquer dois vértices $v \in p_i$ e $u \in p_j$ com $i \neq j$, $|i - j| \in \{1, k - 1\}$ e $d(v, c) = d(u, c)$, são adjacentes.

Na Figura 3.4 temos em (a) uma teia T , em (b) um grafo teia T_4 e em (c) um grafo teia completo $T_{4,4}$.

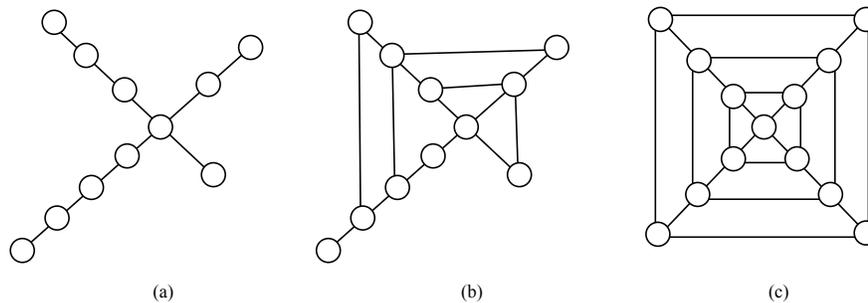


Figura 3.4: Teias.

Um grafo teia completo é *não trivial* quando é distinto de K_3 . A seguir, um resultado básico.

Lema 3.1. *Seja $T_{k,\ell} = (V, E)$ um grafo teia completo não trivial. Então,*

1. $|V| = k(\ell - 1) + 1$;
2. $|E| = 2k(\ell - 1)$;
3. $\Delta(T_{k,\ell}) = \begin{cases} 3 & \text{se } k = 3 \text{ e } \ell = 2; \\ 4 & \text{se } k = 3 \text{ e } \ell > 2; \\ k & \text{se } k \geq 4. \end{cases}$

Queremos colorir as arestas de um grafo teia completo qualquer e classificá-lo como sendo classe 1 ou classe 2, para tal, é fundamental relembrar a operação $+_k$ de adição módulo k , com $k > 1$, apresentada a seguir.

| | | | | | |
|---------|---------|-----|-----|-----|---------|
| $+_k$ | 0 | 1 | 2 | ... | $k - 1$ |
| 0 | 0 | 1 | 2 | ... | $k - 1$ |
| 1 | 1 | 2 | 3 | ... | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | ... | 1 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $k - 1$ | $k - 1$ | 0 | 1 | ... | $k - 2$ |

Baseado na definição de $T_{k,\ell}$, com $k \geq 3$, temos alguns passos a seguir para obtermos um algoritmo eficiente. Vamos considerar a seguinte nomeação dos vértices das k pernas,

$$\begin{aligned}
 p_0 &= \{c, v_{0,0}, \dots, v_{0,(\ell-2)}\} \\
 p_1 &= \{c, v_{1,0}, \dots, v_{1,(\ell-2)}\} \\
 &\dots \\
 p_{k-1} &= \{c, v_{(k-1),0}, \dots, v_{(k-1),(\ell-2)}\}
 \end{aligned}$$

Passo 1: Coloração do grafo estrela em torno do centro c usando as k cores $\{0, \dots, k - 1\}$.

Passo 2: Completar a coloração do grafo roda de centro c ainda usando as k cores. Seja a aresta vu a ser colorida tal que a cor da aresta cv é i e a cor da aresta cu é $(i +_k 1)$. Logo, a cor de vu será $(i +_k 2)$. Para esta coloração, basta considerar somente as três primeiras colunas da tabela da operação $+_k$.

Passo 3: Considerando que o grafo $T_{k,\ell}$ possui camadas de grafos ciclo concêntricos, basta repetir as cores, das arestas coloridas no Passo 2, nas arestas “paralelas”.

Passo 4: Coloração das arestas que conectam os grafos ciclo. As primeiras ligações serão coloridas de forma cíclica utilizando as cores das arestas do grafo estrela. Nas demais arestas situadas ao longo da perna, usaremos alternadamente ou uma certa cor cc ou a mesma cor da aresta correspondente no grafo estrela. Segundo o Lema 3.1 item 3, alguns cuidados devem ser tomados. Em geral, cc será igual a cor da aresta da primeira ligação correspondente. No caso em que $k = 3$ e $\ell > 2$, cc será igual a quatro.

Podemos entender melhor os passos, analisando o grafo $T_{4,4}$. No Passo 1 temos uma atribuição das cores 0, 1, 2 e 3 às arestas do grafo estrela, vide item (a) da Figura 3.5.

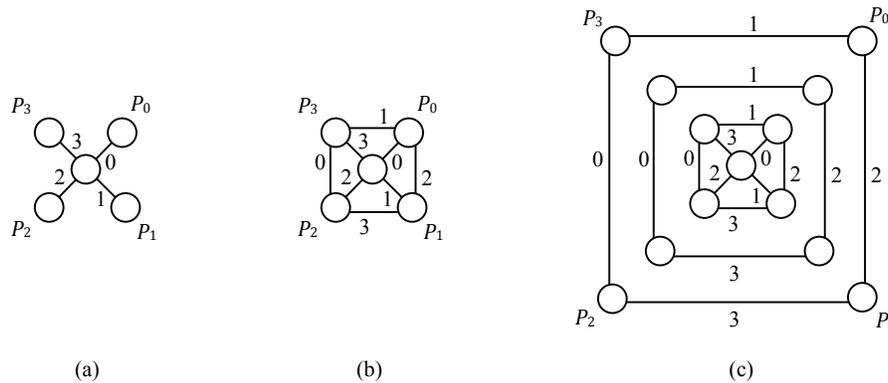


Figura 3.5: Passos 1, 2 e 3 do algoritmo.

| +4 | i | $i + 4 \ 1$ | $i + 4 \ 2$ |
|----|-----|-------------|-------------|
| | 0 | 1 | 2 |
| | 1 | 2 | 3 |
| | 2 | 3 | 0 |
| | 3 | 0 | 1 |

Tabela 3.1: Três primeiras colunas.

Para o Passo 2, se prestarmos atenção à Tabela 3.1 com as três primeiras colunas da tabela da operação $+4$, percebemos que na terceira coluna temos as cores das arestas do grafo roda. Observe no item (b) a ideia deste passo. No item (c) temos o resultado do Passo 3.

O Passo 4, após colorir a primeira ligação de um ciclo usando as cores das arestas do grafo estrela, ver na Figura 3.6 (a), prossegue colorindo as outras ligações de forma alternada, vide item (b).

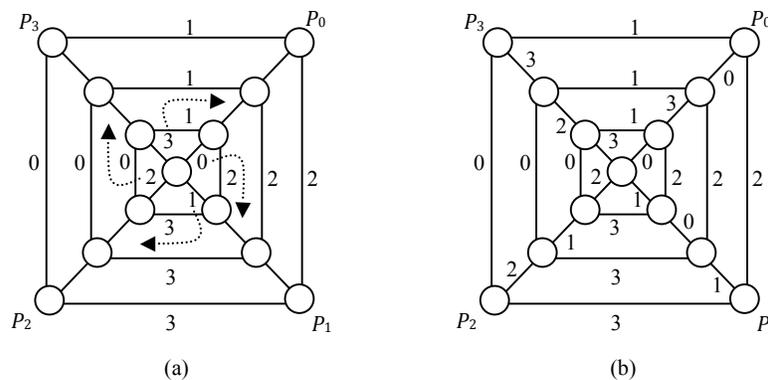


Figura 3.6: Passo 4 do algoritmo.

Algoritmo 3.2. *Obtenção da Coloração de Arestas de $T_{k,\ell}$*

Entrada: $\ell \geq 2$ e os $k \geq 3$ caminhos $p_i = \{c, v_{i,0}, \dots, v_{i,(\ell-2)}\}$, $i = 0, \dots, k-1$

Saída: coloração $c' : E \rightarrow \{1, 2, \dots, \Delta(T_{k,\ell})\}$;

Início

Para $i = 0, \dots, k-1$ **faça** $c'(c v_{i,0}) \leftarrow i$;

Para $i = 0, \dots, k-1$ **faça** $c'(v_{i,0} v_{(i+k1),0}) \leftarrow c'(c v_{(i+k2),0})$;

Se $\ell \geq 3$ **então**

Para $i = 0, \dots, k-1$ **faça**

Para $j = 1, \dots, \ell-2$ **faça**

$c'(v_{i,j} v_{(i+k1),j}) \leftarrow c'(v_{i,0} v_{(i+k1),0})$;

Se $k = 3$ **então**

Para $j = 0, \dots, \ell-3$ **faça**

Para $i = 0, \dots, k-1$ **faça**

Se j par **então**

$c'(v_{i,j} v_{i,(j+1)}) \leftarrow 3$

senão

$c'(v_{i,j} v_{i,(j+1)}) \leftarrow c'(c v_{i,0})$

senão

Para $j = 0, \dots, \ell-3$ **faça**

Para $i = 0, \dots, k-1$ **faça**

Se $j = 0$ **então**

$c'(v_{i,j} v_{i,(j+1)}) \leftarrow c'(c v_{(i+k(k-1)),0})$

senão

Se j par **então**

$c'(v_{i,j} v_{i,(j+1)}) \leftarrow c'(v_{i,0} v_{i,1})$

senão

$c'(v_{i,j} v_{i,(j+1)}) \leftarrow c'(c v_{i,0})$

Fim.

Assim, é possível colorir as arestas de grafos teia completos $T_{k,\ell}$ com $\Delta(T_{k,\ell})$ cores, conseqüentemente, essa família é classe 1. Apresentamos o Algoritmo 3.2 para a coloração de arestas. O algoritmo tem complexidade $O(k\ell)$, o que pode ser calculado observando-se os índices de variação das iterações. Então, pelo Lema 3.1 item 2, a complexidade é linear no número de arestas.

3.5 Notas Bibliográficas

A coloração de arestas é estudada em praticamente todos os livros de teoria dos grafos. Recomendamos especialmente os livros, [3] e [27]. Em ambos aparece a demonstração do Teorema de Vizing com enfoques diferentes, embora, todas as demonstrações que temos consultado são semelhantes. Para estudar sobre quadrados latinos é possível consultar [28] e o uso destes em coloração pode ser visto em [43]. Também encontramos bom material sobre

estes temas disponível na internet como por exemplo em [12] ou na apostila [21]. Hoyer [18] estuda a complexidade da coloração de arestas. Coloração de grafos teia pode ser encontrada em [36].

Capítulo 4

Coloração Total

4.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos a coloração total de grafos, na qual vértices e arestas são coloridos de maneira própria e conjuntamente com o menor número de cores possível. Veremos alguns resultados a respeito desta coloração e nos deteremos num algoritmo polinomial para colorir totalmente grafos grade.

Seja $G = (V, E)$ ou simplesmente G um grafo e C um conjunto de cores não vazio. Uma *coloração total* de G é uma função $c'' : V \cup E \rightarrow C$ tal que:

1. dois vértices ou duas arestas adjacentes de G não têm a mesma imagem;
2. arestas adjacentes têm imagens distintas.

Denominamos *número cromático total*, denotado por $\chi''(G)$, o menor número de cores com que o grafo G é totalmente colorido.

O conceito de coloração total de um grafo foi introduzido e estudado independentemente por Behzad e Vizing nos idos de 1965. É imediato que $\chi''(G) \geq \Delta(G) + 1$. Em relação a um limitante superior, o que existe até o momento é a *Conjectura de Behzad-Vizing* ou *Conjectura da coloração total*, que enunciamos a seguir:

Conjectura 4.1. *Para todo grafo G , tem-se que $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Dado um grafo G , temos pela conjectura que $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$ ou $\chi''(G) = \Delta(G) + 2$. Dizemos então que o grafo é *tipo 1* no primeiro caso e *tipo 2* no outro. Temos que os caminhos P_n de comprimentos maiores que 2 e estrelas S_n são tipo 1, enquanto que grafos bipartidos completos $K_{p,q}$ são tipo 2. A Figura 4.1 ilustra as colorações totais dos grafos S_6 e $K_{3,3}$.

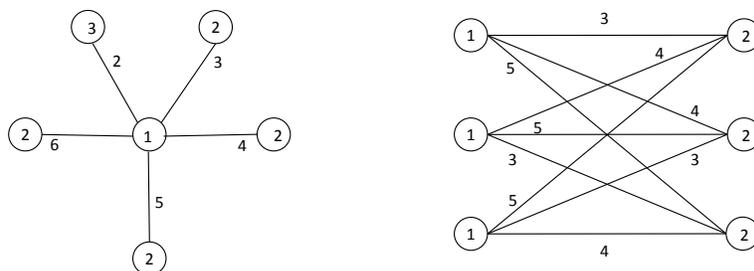


Figura 4.1: Colorações totais de S_6 e $K_{3,3}$.

Muitos dos resultados que envolvem coloração total se concentram na validade da Conjectura Behzad-Vizing, ou seja, em que condições ou para que família de grafos ela é válida. A seguir, enunciamos alguns desses resultados gerais para grafos $G = (V, E)$ com $|V| = n$.

- Se G contém um conjunto independente de vértices S tal que $|S| \geq n - \Delta(G) - 1$ então $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$.
- A conjectura de Behzad-Vizing é válida para qualquer grafo bipartido.
- Para qualquer grafo G tal que $\Delta(G) = 3$ então $\chi''(G) \leq 5$.
- Para qualquer grafo G tal que $\Delta(G) = 4$ então $\chi''(G) \leq 6$.
- A conjectura de Behzad-Vizing é válida para grafos com $\Delta(G) = 5$.
- Se $\Delta(G) \geq n - 4$ então $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$.

A Conjectura Behzad-Vizing foi provada, entre outros, para grafos dualmente-cordais, de intervalos, potências de ciclos, aranha e alguns casos de produto cartesiano de grafos, sendo que veremos esses últimos com mais detalhes ao longo do capítulo. Em relação a grafos planares, a conjectura só permanece para aqueles com o grau máximo igual a 6.

Temos que, em uma mesma família de grafos, alguns podem ser tipo 1 e outros tipo 2. Por exemplo, ciclos C_n com n múltiplo de 3 e grafos completos K_n com n ímpar são tipo 1, mas os demais casos de ciclos e grafos completos são tipo 2. A Figura 4.2 mostra a coloração de K_4 e K_5 que são respectivamente tipo 2 e tipo 1.

Sanchez-Arroyo demonstrou que o problema de determinar o número cromático total de um grafo é NP-difícil; estudá-lo então para famílias par-

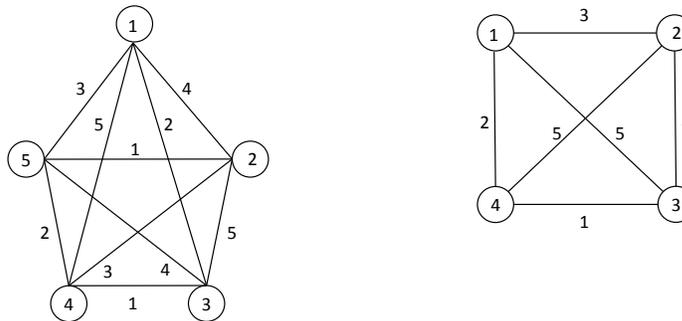


Figura 4.2: Colorações tipo 1 e tipo 2.

ticulares é interessante. Por exemplo, para grafos planares, até o presente momento, não sabemos se os de grau máximo 7 são tipo 1 ou 2.

As próximas seções abordam a coloração total de produto cartesiano de grafos. Primeiramente, definimos esse produto, depois apresentamos alguns resultados relativos à coloração desses grafos e, finalmente, partimos para o estudo mais detalhado dos grafos grade, para os quais mostramos um algoritmo polinomial para a coloração total ótima.

4.2 Produto Cartesiano de Grafos

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. O *produto cartesiano* de A e B , denotado por $A \times B$ é dado por: $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$.

O *produto cartesiano de dois grafos* G e H , $G \times H$, é o grafo cujo conjunto de vértices é o produto cartesiano $V(G) \times V(H)$. Dois vértices do produto (u, v) e (u', v') são adjacentes se, e somente se,

1. $u = u'$ e a aresta $vv' \in E(H)$ ou
2. $v = v'$ e a aresta $uu' \in E(G)$.

Os grafos G e H do produto cartesiano $G \times H$ são os *fatores* do produto. Tem-se que $\Delta(G \times H) = \Delta(G) + \Delta(H)$.

O produto cartesiano de grafos foi definido primeiramente por Sabidussi em 1960. Neste texto, nos deteremos no produto cartesiano de dois grafos caminho P_n e $P_{n'}$, que é denominado *grafo grade*, ou *grid*, $P_n \times P_{n'}$, sendo $n, n' \geq 3$. Citamos como outros exemplos os *prismas* $P_n \times C_{n'}$ e os *toros* $C_n \times C_{n'}$. A Figura 4.3 mostra o grafo grade $P_5 \times P_4$, o prisma $P_5 \times C_3$ e o toro $C_3 \times C_3$.

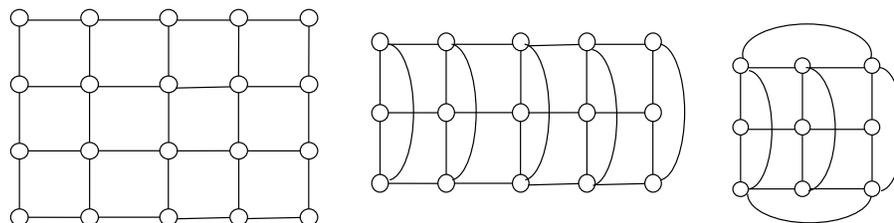


Figura 4.3: Grafos cartesianos.

A coloração total de alguns produtos cartesianos de grafos tem sido estudada por diversos autores. Dentre os resultados encontrados na bibliografia, vamos enunciar o lema a seguir, que foi demonstrado por Zmazek e Zerovnik, e tem como uma de suas consequências o fato de os grafos grade serem tipo 1.

Lema 4.1. *Sejam G e H dois grafos quaisquer tais que $\Delta(G) \leq \Delta(H)$ e r o número de cores de uma coloração total própria de H . Então*

$$\chi''(G \times H) \leq \Delta(G) + r.$$

Como consequências do Lema 4.1, temos que:

1. Se a conjectura de Bezhad-Vizing é válida para o grafo H então ela é satisfeita para o produto cartesiano de G e H . De fato, pelo lema acima, $\chi''(G \times H) \leq \Delta(G) + \chi''(H) \leq \Delta(G) + \Delta(H) + 2$.
2. Se no produto cartesiano $G \times H$, o fator de maior grau for tipo 1 então o produto cartesiano é tipo 1; o mesmo acontece se os dois grafos forem tipo 1. Por exemplo, os grafos grade $P_n \times P_{n'}$ são tipo 1, pois caminhos de comprimentos maiores que 2 são tipo 1.

Destacamos ainda que a dificuldade para colorir totalmente o produto cartesiano de dois grafos G e H está relacionada com a coloração total do grafo de maior grau. Se ele é tipo 1 ou 2 então podemos colorir totalmente $G \times H$ satisfazendo a conjectura de Bezhad-Vizing. Além do mais, a demonstração do lema, que omitimos, é construtiva e sugere uma maneira de fazer coloração total dos produtos cartesianos de grafos em geral.

Temos como objetivo a coloração total dos grafos grade $P_n \times P_{n'}$. Poderíamos colorir esses grafos de acordo com o que é sugerido na demonstração do lema anterior. Não faremos assim, pois os grafos grade podem ser totalmente coloridos com maior simplicidade por meio do algoritmo que apresentaremos na próxima seção.

4.3 Grafos Grade

Nessa seção apresentamos um algoritmo para colorir totalmente um grafo grade $P_n \times P_{n'}$, sendo $n, n' \geq 3$. Sabemos, como consequência do Lema 4.1, que os grafos grade são tipo 1. O grau máximo desses grafos é quatro então eles são totalmente coloridos com cinco cores. Sem perda de generalidade, faremos corresponder respectivamente os números 0, 1, 2, 3 e 4 a cada uma dessas cinco cores.

Observamos que, num grafo grade $P_n \times P_{n'}$, cada um de seus vértices pode ser associado a um ponto (x, y) do plano com coordenadas inteiras $1 \leq x \leq n$ e $1 \leq y \leq n'$. Dois vértices v, w de coordenadas (x, y) e (x', y') , são adjacentes se a distância entre eles é 1, isto é:

- $x = x'$ e $|y - y'| = 1$ ou
- $y = y'$ e $|x - x'| = 1$.

O algoritmo consta de três passos:

Passo 1: coloração de vértices;

Passo 2: coloração de arestas, respeitando as cores já atribuídas aos vértices;

Passo 3: coloração total.

No Passo 1, colorimos os vértices. É fácil observar que um grafo grade é formado por subgrafos C_4 , isto é, 2-coloríveis. Em um grafo grade, $\Delta(G) = 4$. Seja v um vértice tal que $d(v) = 4$. Se utilizarmos duas cores para os vértices, ao prosseguirmos para o Passo 2, serão necessárias mais quatro cores para as arestas (ver Figura 4.4). Utilizaremos então três cores para os vértices.

Vamos então aproveitar as propriedades das coordenadas de vértices adjacentes para colori-los utilizando a função de resto de divisão por 3, isto é, mod 3.

No Passo 2 colorimos as arestas. Observe a disposição do grafo grade no plano: arestas verticais são paralelas, logo, podem ser coloridas alternadamente com as cores 3 e 4, ainda não utilizadas. Para colorir as arestas horizontais, vamos voltar a usar as cores 0, 1 e 2. Como dois vértices adjacentes usam apenas duas delas, então nos sobra a outra cor para colorir a aresta incidente.

No Passo 3, as duas colorações são combinadas. Como informação de entrada temos o conjunto de vértices acompanhados de suas coordenadas cartesianas e uma matriz *vert* que, para cada par (x, y) , indica o vértice associado.

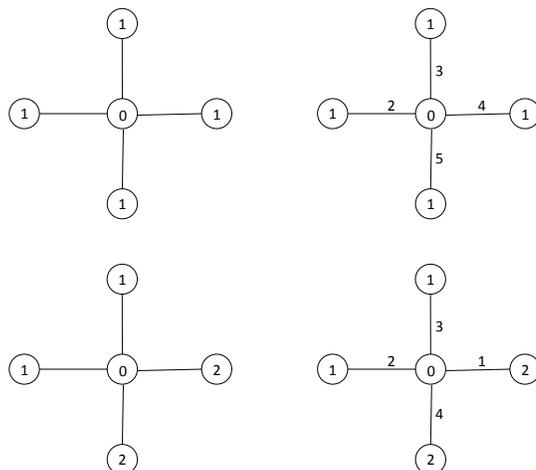


Figura 4.4: Casos possíveis.

Algoritmo 4.1. *Coloração Total*

Entrada: Grade G ; matriz $vert$;
Saída: Coloração total $c'' : V \cup E \rightarrow C$;

Início

Para $v \in V$ **faça**

$c''[v] \leftarrow (x + y) \bmod 3$;

Para $x = 1, \dots, n$ **faça**

Para $y = 1, \dots, n' - 1$ **faça**

$v \leftarrow vert[x, y]$; $w \leftarrow vert[x, y + 1]$;

Se $\bmod(y, 2) = 1$ **então**

$c''[vw] \leftarrow 3$;

senão

$c''[vw] \leftarrow 4$;

Para $y = 1, \dots, n'$ **faça**

Para $x = 1, \dots, n - 1$ **faça**

$v \leftarrow vert[x, y]$; $w \leftarrow vert[x + 1, y]$;

$c''[vw] \leftarrow 3 - (c''[v] + c''[w])$;

Fim.

No Passo 1, o algoritmo percorre os vértices do grafo grade, com complexidade $O(nn')$. No Passo 2, as arestas são coloridas; para tal, dois percursos nos vértices são utilizados. O primeiro para colorir as arestas verticais, e segundo, as horizontais. A complexidade total do algoritmo é $O(nn')$.

A figura 4.5 ilustra a coloração total do grafo grade $P_5 \times P_4$.

Chamamos a atenção para o fato de o algoritmo apresentado não recolorir nem vértices e nem arestas do grafo grade, ou seja, a coloração total é obtida

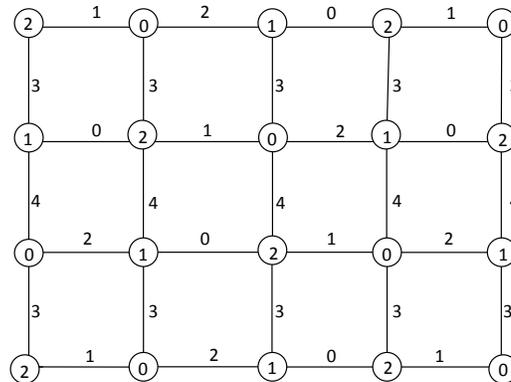


Figura 4.5: Coloração total de $P_5 \times P_4$.

pela junção direta das colorações dos vértices e das arestas sem modificação alguma. Até o presente momento, a grande parte dos algoritmos de coloração total de grafos recolorem vértices ou arestas.

4.4 Notas Bibliográficas

Os produtos cartesianos são estudados em detalhes em [19]. Os principais resultados gerais sobre coloração total encontram-se em [43]. Sanchez-Arroyo [34] estuda a complexidade da coloração total. Em relação à validade da conjectura de Bezhad-Vizing para algumas famílias de grafos temos, entre outras, as seguintes referências: dualmente-cordais [13], de intervalos [4], aranha [36], potências de ciclos [10] e grafos planares [35, 42, 40]. Especificamente a respeito da coloração total de produtos cartesianos podemos citar [37, 46, 23, 32].

Capítulo 5

Coloração Equilibrada

Neste capítulo vamos tratar de um tipo especial de coloração, a coloração equilibrada. Esta coloração estabelece que duas classes de cores ou são iguais ou uma excede a outra em um elemento. Veremos coloração equilibrada de vértices, arestas e total. Apresentamos algoritmos polinomiais para as colorações equilibradas de grafos bipartidos completos.

5.1 Coloração Equilibrada de Vértices

5.1.1 Definição e Exemplos

Uma coloração própria de vértices é equilibrada quando a cardinalidade das classes de cores diferem no máximo em um. Este conceito foi introduzido por Walter Meyer em 1973.

Considere $c : V \rightarrow C$ uma coloração própria do grafo G . Os vértices com a mesma cor $i \in C$ formam a classe da cor i , ou seja, a imagem inversa da cor i ,

$$c^{-1}(i) = \{v \in V \mid c(v) = i\}.$$

A coloração c é uma *coloração equilibrada dos vértices de G* quando para quaisquer $i, j \in C$, $i \neq j$,

$$\left| |c^{-1}(i)| - |c^{-1}(j)| \right| \leq 1.$$

Podemos também definir coloração equilibrada por meio de uma partição do conjunto de vértices. Se o conjunto de vértices V de G pode ser particionado em k classes V_1, V_2, \dots, V_k tais que cada classe é um conjunto independente e para todo $i, j = 1, \dots, k$ e $i \neq j$,

$$\left| |V_i| - |V_j| \right| \leq 1$$

então G é denominado *equilibradamente k -colorível*, e (V_1, V_2, \dots, V_k) é uma *partição independente equilibrada do conjunto V* . O menor inteiro k para o qual G é equilibradamente k -colorível é o *número cromático equilibrado de G* , denotado por $\chi_{eq}(G)$.

É interessante notar que, para a coloração usual, se um grafo é k -colorível então também é $(k + 1)$ -colorível. Já na coloração equilibrada, não temos esta propriedade. Por exemplo, o grafo $K_{5,5}$ é equilibradamente 2-colorível, mas não possui uma coloração equilibrada com 3 cores.

A seguir apresentamos alguns exemplos de números cromáticos equilibrados e cardinalidades das classes de cores para algumas famílias bem conhecidas.

1. $\chi_{eq}(K_n) = n$ e cada classe de cores é unitária.
2. $\chi_{eq}(P_n) = 2$; se n é par, as duas classes de cores têm cardinalidade $\frac{n}{2}$, e caso ímpar, uma tem cardinalidade $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ e a outra $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.
3. $\chi_{eq}(C_n) = \begin{cases} 2 & n \text{ par;} \\ 3 & n \text{ ímpar.} \end{cases}$

Se n é par, as duas classes de cores têm cardinalidade $\frac{n}{2}$.

Se n é ímpar, então:

- se $n \equiv 0 \pmod{3}$, as três classes de cores têm a mesma cardinalidade $\frac{n}{3}$;
- se $n \equiv 1 \pmod{3}$, duas classes têm cardinalidade $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ e a outra $\lceil \frac{n}{3} \rceil$;
- se $n \equiv 2 \pmod{3}$, duas classes têm cardinalidade $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ e a outra $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.

4. $\chi_{eq}(Star_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

Se n é ímpar, uma classe unitária e $\frac{n-1}{2}$ classes têm cardinalidade dois.

Se n é par, duas classes são unitárias e $\frac{n-2}{2}$ classes têm cardinalidade dois.

5. $\chi_{eq}(W_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, $n \geq 5$, e as classes recaem no caso dos grafos S . Para o caso em que $n = 4$, temos que $\chi_{eq}(W_4) = 4$, com classes unitárias.

Os exemplos podem nos fazer pensar que a coloração equilibrada é facilmente obtida. Infelizmente, o problema de coloração equilibrada de vértices é também NP-difícil.

5.1.2 Cotas e Conjecturas

Como toda coloração equilibrada é uma coloração de vértices, temos que:

$$\chi(G) \leq \chi_{eq}(G).$$

A igualdade entre estes invariantes é possível, por exemplo, em grafos linha.

Em 1970, Hajnal e Szemerédi mostraram que qualquer grafo G pode ser equilibradamente colorido com k cores, se $k \geq \Delta(G) + 1$, estabelecendo assim uma cota superior para o número cromático. Uma curiosidade, o enunciado do Teorema 5.1 era uma conjectura de Paul Erdős de 1964.

Teorema 5.1. *Para todo grafo G , $\chi_{eq}(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Relembrando o teorema de Brooks (1941) a seguir, para coloração usual de vértices.

Teorema 5.2. *Se G não é um grafo completo nem um ciclo ímpar então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Podemos perceber a similaridade desse teorema com a Conjectura para Coloração Equilibrada (Equitable Coloring Conjecture, ECC) de Meyer.

Conjectura 5.1. *Se G não é um grafo completo nem um ciclo ímpar, então $\chi_{eq}(G) \leq \Delta(G)$.*

Esta conjectura já foi verificada para todos os grafos com até seis vértices, os grafos bipartidos, os grafos k -partidos completos e os grafos linha.

Há uma conjectura um pouco mais completa do que a ECC, a Δ ECC, apresentada por Chen, Lih e Wu.

Conjectura 5.2. *Seja G um grafo conexo. Se G não é um grafo completo, um ciclo ímpar nem um grafo bipartido completo $K_{2k+1, 2k+1}$ com $k \geq 1$, então $\chi_{eq}(G) \leq \Delta(G)$.*

Devemos observar que, o valor da cota $\Delta(G)$ para um dado grafo G pode ser bem maior do que o valor do número cromático equilibrado. Um grafo com $\Delta(G) = 192$ pode ser colorido equilibradamente com somente dezesseis cores, como veremos na próxima seção.

5.1.3 Grafos Bipartidos Completos

Vamos agora analisar mais detalhadamente a coloração equilibrada de grafos bipartidos completos.

Sejam p e q dois inteiros positivos não nulos. Um grafo bipartido $K_{p,q} = (V_1 \cup V_2, E)$ é *completo* quando $|V_1| = p$, $|V_2| = q$ e $|E| = pq$.

Estamos interessados em obter o número cromático equilibrado de grafos $K_{p,q}$ bipartidos completos e verificar se satisfazem à ECC. Vamos considerar, a partir de agora e, sem perda de generalidade, que $p \leq q$. Alguns casos são bem simples: se $p = q$ ou $q = p + 1$ então $\chi_{eq}(K_{p,q}) = 2$ e se $q = pk$ com k inteiro então $\chi_{eq}(K_{p,q}) = k + 1$. Apresentaremos um algoritmo que determina $\chi_{eq}(K_{p,q})$, baseado no Teorema da Divisão Euclidiana, que vamos primeiramente relembrar.

Teorema 5.3. *Sejam a e b inteiros positivos. Existem únicos números inteiros k e r tais que $a = bk + r$ com $0 \leq r < b$.*

A ideia do algoritmo é a seguinte: a maior cardinalidade possível para uma classe de cor é p . Como $p \leq q$, devemos dividir q por p , obtendo $q = pk + r$ com $0 \leq r < p$. Analisando o resto r da divisão, dois casos podem acontecer:

- r é menor ou igual do que o quociente k da divisão.

Neste caso, a distribuição dos vértices pelas classes será equilibrada, pois cada um dos r vértices pode ser incluído em uma das $k > r$ classes existentes.

- r é maior do que o quociente da divisão.

Se r for maior do que o número k de classes com p vértices em V_2 , a coloração não será equilibrada. Devemos então reduzir a cardinalidade das classes, isto é, dividir p sucessivamente por $2, 3, \dots$ até que r seja menor ou igual do que o número de classes. Com isto, temos a sequência decrescente de divisores $p, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \lfloor \frac{p}{3} \rfloor, \dots$. Esta estratégia determina o menor número de cores para uma coloração equilibrada de vértices, pois quando não é possível ter classes, tanto em V_1 quanto em V_2 , com p elementos, o maior valor para a cardinalidade de uma classe é $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor$. Reavaliando q , se o equilíbrio não for obtido, repetimos o procedimento até conseguirmos. Como existe uma quantidade finita de inteiros entre p e 1 , temos a certeza de que o algoritmo pára.

Existe uma exceção, quando o resto r for igual ao divisor vigente (p ou $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ ou $\lfloor \frac{p}{3} \rfloor \dots$) menos uma unidade. Neste caso, esses elementos formarão uma nova classe, sem que o equilíbrio seja prejudicado.

Vejam os exemplos, o grafo $K_{8,30}$. Como $30 = 8 \cdot 3 + 6$, existem 3 classes com 8 vértices e “sobraram” 6 vértices que se colocados numa nova classe, desequilibram a coloração. Para serem distribuídos de maneira a obter o equilíbrio seriam necessárias pelo menos seis classes em V_2 , mas a quantidade de classes (3) é insuficiente. Então, devemos estabelecer a nova cardinalidade das classes, $\frac{8}{2} = 4$. Assim, $30 = 4 \cdot 7 + 2$ e conseguimos uma distribuição que induz uma coloração equilibrada dos vértices. Os 8 vértices de V_1 estão

distribuídos (coloridos) em duas classes de cores e os 30 de V_2 em cinco classes com 4 vértices e duas com 5 vértices, totalizando 9 cores para uma coloração equilibrada de vértices do grafo $K_{8,30}$.

No pior caso, em que as classes são unitárias, o Algoritmo 5.1 tem complexidade $O(p)$.

Algoritmo 5.1. *Obtenção do Número Cromático Equilibrado de $K_{p,q}$*

Entrada: $p \leq q$ inteiros positivos;

Saída: $\chi_{eq}(K_{p,q})$;

Início

$i \leftarrow 0$;

Repita

$i \leftarrow i + 1$;

$k \leftarrow \text{div}(q, \lfloor \frac{p}{i} \rfloor)$;

$r \leftarrow \text{mod}(q, \lfloor \frac{p}{i} \rfloor)$;

até $r \leq k$ ou $r = \lfloor \frac{p}{i} \rfloor - 1$;

Se $r > k$ **então** $i \leftarrow i + 1$;

$\chi_{eq}(K_{p,q}) \leftarrow k + i$;

Fim.

Como $\chi_{eq}(K_{3,5}) = 3$, na Figura 5.1 item (a), temos uma possível coloração equilibrada de vértices usando as cores 1, 2 e 3. Já $\chi_{eq}(K_{8,14}) = 5$, no item (b) temos uma coloração equilibrada dos oito vértices de V_1 e dos quatorze de V_2 usando as cores 1, 2, 3, 4 e 5.

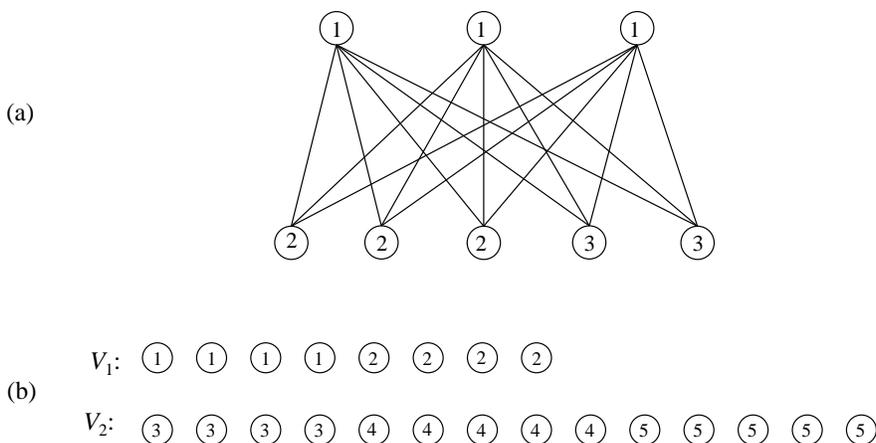


Figura 5.1: Colorações equilibradas de vértices.

Finalmente, apresentamos alguns números cromáticos equilibrados.

| Grafo G | $\chi_{eq}(G)$ | $\Delta(G)$ |
|--------------|----------------|-------------|
| $K_{10,10}$ | 2 | 10 |
| $K_{35,36}$ | 2 | 36 |
| $K_{8,15}$ | 3 | 15 |
| $K_{15,45}$ | 4 | 45 |
| $K_{8,14}$ | 5 | 14 |
| $K_{4,23}$ | 6 | 23 |
| $K_{9,59}$ | 7 | 59 |
| $K_{33,96}$ | 8 | 96 |
| $K_{8,30}$ | 9 | 30 |
| $K_{9,32}$ | 10 | 32 |
| $K_{67,192}$ | 16 | 192 |

5.2 Coloração Equilibrada de Arestas

Analogamente, temos a *coloração equilibrada de arestas* $c'_{eq} : E \rightarrow C$ e o *índice cromático equilibrado* $\chi'_{eq}(G)$ de um grafo G como sendo o menor inteiro k para o qual G tem uma coloração de arestas equilibrada com k cores.

Um resultado bem interessante é:

Teorema 5.4. *Seja G um grafo. Então $\chi'(G) = \chi'_{eq}(G)$.*

Como o problema da coloração de arestas é NP-difícil, o de equilibrada também o é. Para a família dos grafos bipartidos, temos o teorema de König (1916), que determina o valor do índice cromático.

Teorema 5.5. *Seja G é um grafo bipartido então $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Voltamos agora aos grafos bipartidos completos, estudados na seção anterior. Temos que $\chi'_{eq}(K_{p,q}) = q$. Vamos apresentar um algoritmo para coloração equilibrada das arestas, baseado novamente no uso de um quadrado latino de ordem q , simétrico em relação à diagonal principal como o apresentado a seguir.

| | | | | | |
|---------|-----|-----|-----|---------|---------|
| 1 | 2 | 3 | ... | $q - 1$ | q |
| 2 | 3 | 4 | ... | q | 1 |
| 3 | 4 | 5 | ... | 1 | 2 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $q - 1$ | q | 1 | ... | $q - 3$ | $q - 2$ |
| q | 1 | 2 | ... | $q - 2$ | $q - 1$ |

Considere, sem perda de generalidade, $V_1 = \{1, 2, \dots, p\}$, $V_2 = \{1, 2, \dots, q\}$ e $p \leq q$. As cores das arestas são determinadas pelos valores do quadrado latino, indexado pelos vértices. A particular distribuição das cores pelas linhas do quadrado nos garante que a utilização das q cores é equilibrada, cada classe de cor possui p arestas. Podemos colorir até grafos bipartidos completos $K_{q,q}$.

Por exemplo, para o grafo $K_{3,5}$ são necessárias somente três linhas consecutivas do quadrado latino 5×5 .

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |

Podemos observar a coloração das arestas de forma equilibrada na Figura 5.2.

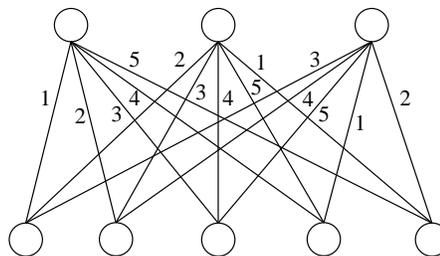


Figura 5.2: Coloração equilibrada de arestas do $K_{3,5}$.

O algoritmo proposto faz a geração implícita do quadrado latino. Por essa razão, apenas as arestas são percorridas, acarretando a complexidade $O(pq)$. A seguir, apresentamos o algoritmo.

Algoritmo 5.2. *Obtenção da Coloração de Arestas Equilibrada de $K_{p,q}$*

Entrada: $V_1 = \{1, 2, \dots, p\}$ e $V_2 = \{1, 2, \dots, q\}$;

Saída: coloração $c'_{eq} : E \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$;

Início

Para $i = 1, \dots, p$ **faça**

Para $j = 1, \dots, q$ **faça**

Se $i + j \leq q + 1$ **então**

$c'_{eq}(ij) \leftarrow i + j - 1$;

senão

$c'_{eq}(ij) \leftarrow (i + j - 1) - q$;

Fim.

5.3 Coloração Total Equilibrada

Da mesma forma, uma *coloração total* de um grafo G é *equilibrada* quando o número de elementos do grafo (vértices ou arestas) em quaisquer duas classes de cores difere no máximo em um. Assim, temos a coloração total equilibrada $c''_{eq} : V \cup E \rightarrow C$ e o *número cromático total equilibrado* $\chi''_{eq}(G)$ de G .

Temos a seguir um resultado em coloração total equilibrada para a família dos grafos bipartidos completos.

Teorema 5.6. *Para todo grafo bipartido completo,*

$$\chi''_{eq}(K_{p,q}) = \begin{cases} \Delta(K_{p,q}) + 1 & \text{se } p \neq q; \\ \Delta(K_{p,q}) + 2 & \text{se } p = q. \end{cases}$$

O algoritmo que propomos considera que $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, $V_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_q\}$ e $p \leq q$. Todos os vértices de V_1 são coloridos com a cor 1. A classe de cor 1 possui então p elementos. Os vértices de V_2 são coloridos com as cores $2, 3, \dots, q + 1$. Cada classe dessas cores possui, neste momento, um único elemento. Cada vértice de V_1 tem q arestas incidentes, que recebem as cores $2, 3, \dots, q + 1$, se $p < q$, ou $2, 3, \dots, q + 2$ quando $p = q$; em ambos os casos de forma cíclica, como na Seção 5.2. Então, cada classe, ao final, terá $p + 1$ elementos, vértices e/ou arestas.

A seguir, apresentamos o algoritmo.

Algoritmo 5.3. *Obtenção da Coloração Total Equilibrada de $K_{p,q}$*

Entrada: $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ e $V_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_q\}$;

Saída: coloração $c''_{eq} : V \cup E \rightarrow \{1, \dots, \Delta(K_{p,q}) + 2\}$;

Início

Se $p = q$ **então** $f \leftarrow 1$;

senão $f \leftarrow 0$;

Para $i = 1, \dots, p$ **faça** $c''_{eq}(v_i) \leftarrow 1$;

Para $i = 1, \dots, q$ **faça** $c''_{eq}(u_i) \leftarrow i + 1$;

Para $i = 1, \dots, p$ **faça**

Para $j = 1, \dots, q$ **faça**

Se $i + j > q + f$ **então**

$c''_{eq}(v_i u_j) \leftarrow (i + j + 1) - (q + f)$;

senão

$c''_{eq}(v_i u_j) \leftarrow i + j + 1$;

Fim.

Para avaliar a complexidade do algoritmo, observamos que, primeiramente, os vértices são percorridos e coloridos. Em seguida, a coloração das arestas é realizada de maneira análoga à Seção 5.2 e depende da geração

implícita do quadrado latino. A complexidade do algoritmo para coloração total equilibrada do grafo $K_{p,q}$ é então $O(pq)$.

Na Figura 5.3 temos a coloração total equilibrada do grafo $K_{3,5}$ usando 6 cores.

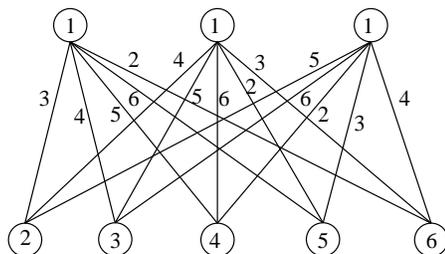


Figura 5.3: Coloração total equilibrada do $K_{3,5}$.

Podemos concluir que os números e índices cromáticos equilibrados para grafos bipartidos completos satisfazem a seguinte cadeia de desigualdade:

$$\chi_{eq}(K_{p,q}) \leq \chi'_{eq}(K_{p,q}) \leq \chi''_{eq}(K_{p,q}).$$

Por exemplo, para $K_{3,5}$, a cadeia fica instanciada em $3 \leq 5 \leq 6$, e para o grafo $K_{67,192}$, temos $16 \leq 192 \leq 193$.

5.4 Notas Bibliográficas

O artigo de Meyer [30] é a referência clássica em coloração equilibrada de vértices: define essa coloração, apresenta o primeiro resultado para árvores e a ECC. O de Hajnal e Szemerédi [16] é o primeiro a, de forma indireta, estabelecer uma cota para o número cromático equilibrado. No trabalho de Chen e de Lih [8], encontramos um estudo mais detalhado sobre coloração equilibrada em árvores. Chen, Lih e Wu em [9] apresentam a Δ ECC. Artigos que apresentam famílias de grafos que satisfazem a Δ ECC, Lih e Wu [26] para grafos bipartidos, Chen, Ko e Wu [7] para grafos split, Zhang e Yap [44] para certos grafos planares e Wang e Zhang [45] para grafos linha e grafos r -partidos. O trabalho fundamental em coloração equilibrada de arestas é de Hilton e de Werra [17]. O livro editado por Kubale [25] contém uma seleção interessante de colorações não usuais. O Teorema de Brooks, mencionado no capítulo, pode ser encontrado [6].

Bibliografia

- [1] K. Appel, W. Haken, Every planar map is four colorable, *Bull. Amer. Math. Soc.* 82 (1976), 711-712.
- [2] T. Beyer, W. Jones, W., S. Mitchell, Linear algorithms for isomorphism of maximal outerplanar graphs, *Journal of ACM* 26 (1979), 603-610.
- [3] P. O. Boaventura Netto, *Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos*, Editora Edgard Blücher (2006).
- [4] V.A. Bojarshinov, Edge and total coloring of interval graphs, *Disc. Appl. Math.* 114 (2001), 23-28.
- [5] A. Brandstädt, V.B. Le, J. Spinrad: *Graph Classes - a Survey*, SIAM Monographs in Discrete Mathematics and Applications (1999).
- [6] R.L. Brooks, On coloring the nodes of a network, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 37 (1941), 194-197.
- [7] B.-L. Chen, M.-T. Ko, K.-W. Lih, P.-L. Wu, Equitable and m-bounded coloring of split graphs, in M.Deza, R. Euler and I. Manoussakis, eds., *Combinatorics and Computer Science, Lecture Notes in Computer Science* 1120 (1996), 1-5.
- [8] B.-L. Chen, K.-W. Lih, Equitable coloring of trees. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 61 (1994), 83-87.
- [9] B.-L. Chen, K.-W. Lih, P.-L. Wu, Equitable coloring and the maximum degree, *Europ. J. Combinatorics* 15 (1994), 443-447.
- [10] C. N. Campos, C. P. Mello, A result on the total coloring of power of cycles, *Disc. Appl. Math.* 155 (2007), 585-597.
- [11] R. Diestel, *Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics 173, Springer-Verlag New York, Inc. (2005).
- [12] P. Feofiloff, Y. Kohyakwa, Y. Wakabayashi, *Uma introdução sucinta à teoria dos grafos*, (2009), disponível em:
<http://www.ime.usp.br/~pf/teoriadosgrafos/>

- [13] C.M.H. Figueiredo, J. Meidanis, C.P. Mello, Total-chromatic number and chromatic index of dually chordal graphs. *Inf. Proc. Lett.* 70 (1999), 147-152.
- [14] M. R. Garey, D. S. Johnson, Some simplified NP-complete graph problems, *Theoretical Computer Science* 1(3) (1976), 237-267.
- [15] J. Gross, J. Yellen, *Graph Theory and its Applications*, the CRC Press series on Discrete Mathematics and its Applications (1998).
- [16] A. Hajnal, E. Szemerédi, Proof of a conjecture of Erdős. A. Rényi, V. T. Sós, eds., *Combinatorial Theory and Its Applications*, Vol. 2, *Colloq. Math. Soc. János Bolyai* 4 (Ed. P. Erdős, A. Rényi, and V. T. Sós), Amsterdam, Netherlands: North-Holland (1970), 601-623.
- [17] A. J. W. Hilton, D. de Werra, A sufficient condition for equitable edge-colourings of simple graphs, *Discrete Math.* 128 (1994), 179-201.
- [18] I. Holyer, The NP-completeness of edge-coloring, *SIAM J. Computing* 10 (1981), 718-720.
- [19] W. Imrich, S. Klavzar, D. Rall, *Topics in Graph Theory: Graphs and Their Cartesian Products*, A K Peters Ltd, (2008).
- [20] T. R. Jensen, B. Toft, *Graph Coloring Problems*, Wiley-Interscience, New York, 1995.
- [21] S. Jurkiewicz, *Grafos; Uma Introdução*, disponível em:
<http://www.obmep.org.br/export/sites/default/arquivos/apostilas-pic2008/Apostila5-Grafos.pdf>
- [22] C. M. Justel, L. Markenzon, L., Lexicographic breadth first search and k-trees, *Proceedings of JIM'2000 - Secondes Journées de l'Informatique Messine, França* (2000), 23-28.
- [23] A. Kemnitz, M. Marangio, Total colorings of cartesian products of graphs, *Congres. Numer.* 165 (2003), 99-109.
- [24] L. Kowalik, Fast 3-coloring triangle-free planar graphs, *Proc. 12th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2004)*, LNCS 3221 (2004), 436-447.
- [25] M. Kubale et al, Graph colorings, *Amer. Math. Society* 352 (2004), 35-53.
- [26] K.-W. Lih, P.-L. Wu, On equitable coloring of bipartite graphs, *Discrete Math.* 151 (1996), 155-160.

- [27] L. Lovász, *Combinatorial Problems and Exercises*, 2.ed., Amsterdam: Elsevier (1993).
- [28] L. Lovász, J. Pelikán, K. Vesztergombi, *Matemática Discreta*, SBM (2003).
- [29] J. A. McHugh, *Algorithmic Graph Theory*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1990).
- [30] W. Meyer, Equitable coloring, *Amer. Math. Monthly* 80 (1973), 920-922.
- [31] S. Mitchell, Linear Algorithms to Recognize Outerplanar and Maximal Outerplanar Graphs, *Information Processing Letters* 9 (1979), 229-232.
- [32] K. Prnaver, B. Zmazek, On the total chromatic number of direct products graphs, *J. Appl. Math Comput.* (2009).
- [33] N. Robertson, D. P. Sanders, P. D. Seymour and R. Thomas, The four colour theorem, *J. Combin. Theory Ser. B.* 70 (1997), 2-44.
- [34] A. Sanchez-Arroyo, Determining the total number is NP-hard. *Discrete Math.* 78(3) (1989), 315-319.
- [35] D. P. Sanders, Y. Zhao, On total 9-coloring planar graphs of maximum degree seven. *J. Graph Theory* 31 (1999), 67-73.
- [36] S. R. Sharebaf, Vertex, edge and total coloring in spider graphs. *Appl. Math. Sci.* 3 (2009), 877-881.
- [37] M. A. Seoud, A. E. I. Abd El Maqoud, R. J. Wilson, J. Williams, Total colouring of cartesian products. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* no 4 vol. 28 (1997), 481-487.
- [38] M. M. Syslo, Outerplanar graphs: characterizations, testing, coding and counting, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math.* 26 (1978), 675-684.
- [39] J. L. Szwarcfiter, *Grafos e Algoritmos Computacionais*, Editora Campus (1984).
- [40] X. Tan, H. Chen, J. Wu, Total coloring of planar graphs without adjacent 4-cycles. *The Eighth International Symposium on Operational Research and its Applications*, China (2009), 20-22.
- [41] R. Thomas, disponível em <http://people.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html>.
- [42] Y. Wang, M. Shangguan, Q. Li. On total chromatic number of planar graphs without 4-cycles. *Science in China Series A: Mathematics* 50 (2007), 81-86.

- [43] H.-P. Yap, *Total Colorings of Graphs*. Springer Verlag (1996).
- [44] H.-P. Yap, Y. Zhang, Equitable colourings of planar graphs, *J. Comb. Math. Comb. Comp.* 27 (1998), 97-105.
- [45] W. Wang, K. Zhang, Equitable colorings of line graphs and complete r-partite graphs, *System Sci. Math. Sci.* 13 (2000), 190-194.
- [46] B. Zmazek, J. Zerovnik, Behzad-Vizing conjecture and Cartesian product graphs, *J. Appl. Math. Lett.* 15 (2002), 781-784.