

ÍNDICE DE EFICIÊNCIA NÃO RADIAL EM DEA BASEADO EM PROPRIEDADES VETORIAIS

Silvio Figueiredo Gomes Júnior

Doutorado em Engenharia de Produção – Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria, 156, São Domingos, CEP: 24210-240, Niterói, RJ
silviofgj@gmail.com

João Carlos Correia Baptista Soares de Mello

Departamento de Engenharia de Produção – Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria 156, São Domingos, 24210-240, Niterói, RJ
jcsmello@pesquisador.cnpq.br

Lidia Angulo Meza

Departamento de Engenharia de Produção – Universidade Federal Fluminense
Av. dos Trabalhadores, 420, 27255-125, Volta Redonda, RJ
lidia@metal.eeimvr.uff.br

RESUMO

Os modelos clássicos DEA (Análise Envoltória de Dados) determinam a eficiência de unidades produtivas, chamadas DMUs (Decision Making Units) segundo redução dos *inputs* ou aumento dos *outputs* equiproporcionalmente, encontrando apenas um alvo para esta DMU. Este alvo não incorpora preferência do decisor. Trabalhos posteriores propõem a obtenção de alvos alternativos baseados em projeções não-radiais na fronteira eficiente que são obtidas através de variações não proporcionais de *inputs* e *outputs*. Porém, para estes alvos alternativos não são calculadas suas eficiências, o que impede uma comparação entre as DMUs. Assim, diversos índices não-radiais foram propostos. No entanto, estes índices são baseados em médias aritméticas ou médias ponderadas que não consideram as características vetoriais da eficiência. Neste trabalho é apresentado um índice de eficiência não-radial baseado no conceito inicial de eficiência associado a cada alvo alternativo (não radial) de uma DMU ineficiente. Estes alvos alternativos podem ser obtidos através de um modelo multiobjetivo.

PALAVRAS CHAVE. DEA, Eficiência vetorial, Projeção não radial

ÁREA DE CLASSIFICAÇÃO PRINCIPAL DO TRABALHO: DEA (Análise e Envoltória de Dados)

ABSTRACT

The classical DEA (Data Envelopment Analysis) models determine the efficiency of a productive unit called DMU, (Decision Making Unit), based on proportional reduction of inputs or outputs rise, finding only one target to this DMU. This target does not incorporate the decision maker preference. Later studies propose the acquisition of alternative targets through the variations of non-proportional inputs and outputs. However, for such alternatives targets its efficiencies are not calculated what becomes an impediment to establishing a comparison among the DMUs. Therefore the diverse indexes of non-alignment projection have been proposed. Nevertheless such indexes are based in arithmetical averages or weighted averages which do not consider the efficiency vector characteristics. In this study a non-alignment projection efficiency index based on the initial concept of efficiency associated with each alternative target (non-alignment) of an efficient DMU. These alternative targets can be obtained through a multiobjective model.

KEYWORDS. DEA. vector efficiency, non-alignment projection.

1. Introdução

A Análise Envolvória de Dados (CHARNES *et al.*, 1978), mais conhecida por DEA, por seu nome em inglês *Data Envelopment Analysis*, é uma abordagem não paramétrica para avaliação de eficiência de um conjunto de unidades produtivas, chamadas de DMUs, que utilizam os mesmos recursos (*inputs*) para produzir os mesmos produtos (*outputs*).

Em DEA é calculado um índice de eficiência para cada uma das DMUs, podendo classificá-las em eficientes (eficiência 100%) ou ineficientes (eficiência menor que 100%). Para as DMUs ineficientes são calculados alvos, níveis dos *inputs* e *outputs* que devem ser atingidos para eles se tornarem eficientes, assim como um conjunto de referência, que são DMUs eficientes, *benchmarks*, que servem de exemplo de boas práticas gerenciais.

Nos modelos DEA clássicos os alvos para as DMUs ineficientes são obtidos através de uma projeção baseada na redução equiproporcional dos *inputs* ou no aumento equiproporcional dos *outputs*. Para cada orientação esse alvo é único. Entretanto, esta projeção não incorpora nenhum conceito que mostre que este alvo é ser preferível a qualquer outro na fronteira, e tampouco leva em conta preferências do decisor na busca de um alvo eficiente.

Assim, como cada modelo DEA calcula um e somente um alvo para cada DMU ineficiente e que está baseado na projeção determinada pelos modelos DEA padrão, assim, estes alvos podem estar localizados na região fracamente eficiente da fronteira, ou seja, o alvo é eficiente, mas não é necessariamente eficaz (GOLANY, 1988).

Podem, ainda, existir outros alvos localizados na fronteira de eficiência que sejam preferíveis aos decisores e que não sejam encontrados pelos modelos DEA devido à sua forma de projeção. Por isso, nos últimos anos têm surgido modelos para determinar alvos alternativos aos fornecidos pelos modelos DEA clássicos.

Em outro contexto, a utilização de problemas multiobjetivo pode representar uma grande vantagem com relação à programação linear mono-objetivo, pois considera vários aspectos de um problema (CLÍMACO *et al.*, 2003) e tem sido aplicada nas mais diversas áreas. Além disso, enquanto que ao otimizar um problema de programação linear mono-objetivo (ou otimização escalar) é obtida uma solução ou um conjunto de soluções ótimas, com um mesmo valor na função objetivo. Já, na otimização de problemas linear multiobjetivo (ou na otimização vetorial) obtém-se um conjunto de soluções eficientes, também chamadas de não dominadas, não comparáveis entre si em termos dos valores das funções objetivo. Dentre essas o decisor poderá escolher levando em consideração aspectos operacionais e gerenciais.

A idéia da utilização da programação linear multiobjetivo (PLMO) no contexto DEA surge a partir do conceito de Pareto eficiência que ambas abordagens compartilham. Ambas as metodologias procuram um conjunto de unidades não comparáveis entre si, que são eficientes ou as melhores que as outras, em ao menos um aspecto ou dimensão. Isto é, dedicam-se a caracterizar as faces eficientes do espaço de solução dos problemas (STEWART, 1996).

A integração entre a PLMO e DEA se apresenta como uma forma de encontrar alvos alternativos para uma DMU ineficiente.

Apesar dos modelos para determinação de alvos muitas vezes apresentarem melhores *benchmarks* para uma DMU ineficiente, pois projetam esta DMU na fronteira de forma não-radial (ou seja, não considera equiproporcionalidade na redução dos *inputs* ou no aumento dos *outputs* da DMU), estes modelos não fornecem um índice de eficiência para esta DMU, não permitindo assim uma comparação entre elas.

Outro problema encontrado é que os modelos para cálculo de índices de eficiência não-radial existentes não fornecem os *benchmarks* para esta DMU, impedindo uma melhor avaliação da solução apresentada. Além disso, os cálculos dos índices de eficiência são baseados em média aritmética ou média ponderada sem considerar, a priori, as direções de projeção da DMU na fronteira de eficiência.

Os índices baseados em somas perdem o sentido para o cálculo da eficiência em relação à geometria do problema, já que está baseado em distâncias euclidianas. Já os índices baseados em ponderações exigem arbitrariedade por parte do decisor, o que é uma contrariedade dos paradigmas de DEA.

Assim, este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de um índice de eficiência não radial associado a cada alvo alternativo. Estes alvos alternativos podem ser obtidos através de um modelo multiobjetivo que permita a sua escolha e, assim, formação de *benchmarks* para uma DMU. Este índice de eficiência é baseado no conceito inicial de eficiência, ou seja, para uma DMU atingir a fronteira de eficiência, ela deve se deslocar até esta fronteira em uma direção que é determinada pelo decisor, através da escolha do alvo.

2. Modelos para determinação de alvos

A Análise Envoltória de Dados (DEA - *Data Envelopment Analysis*) foi desenvolvida por Charnes, Cooper e Rhodes (1978) e possui dois modelos considerados clássicos: o CCR e o BCC. O primeiro, também conhecido como CRS (*Constant Returns to Scale*), foi apresentado originalmente por Charnes *et al.* (1978) e trabalha com retornos constantes de escala, ou seja, qualquer variação nos *inputs* produz variação proporcional nos *outputs*. O modelo BCC, ou VRS (*Variable Returns to Scale*), foi desenvolvido por Banker *et al.* (1984) e considera retornos variáveis de escala, isto é, substitui o axioma da proporcionalidade entre *inputs* e *outputs* pelo axioma da convexidade.

Segundo Cooper *et al.* (1999), o Modelo do Envelope e o Modelo dos Multiplicadores são formulações equivalentes de modelos DEA clássicos, que por constituírem problemas duais, fornecem a mesma eficiência para cada DMU.

Os modelos DEA do envelope são modelos mono-objetivos que fornecem, além da medida de eficiência, as estimações específicas das mudanças desejadas nas variáveis da DMU ineficiente para esta atingir a eficiência. Estas estimativas são chamadas de alvos ou projeções eficientes e estão baseadas em DMUs eficientes que servem como referência para a ineficiente e constituem um conjunto chamado de conjunto de referência. Os modelos DEA clássicos são baseados no índice de eficiência radial, assim, estes alvos dependem da orientação do modelo, podendo ser orientado a *input* ou a *output*.

O modelo CCR do envelope orientado a *inputs* é apresentado em (1):

$$\begin{aligned} & \text{Min } \theta \\ & \text{Sujeito a} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta \cdot x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s \\ & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \theta \text{ irrestrita.} \end{aligned} \tag{1}$$

Neste modelo θ é a eficiência, que é multiplicada por todos os *inputs* de forma a obter valores que coloquem a DMU na fronteira eficiente, através da redução dos *inputs* e λ_j representa a contribuição da DMU j na formação do alvo da DMU em avaliação.

O modelo BCC do envelope orientado a *input* é descrito em (2) e considera retorno variável de escala. Este modelo é semelhante ao modelo (1), com a inclusão da restrição

$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ que garante a convexidade da fronteira de eficiência.

$$\begin{aligned} & \text{Min } \theta \\ & \text{Sujeito a} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta \cdot x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

Os modelos com orientação a *output* apresentam interpretação semelhante à dos modelos orientados a *input*, considerando um aumento equiproporcional em todos os *outputs* da DMU ineficiente, mantendo constante os valores dos *inputs*, para que esta atinja a fronteira de eficiência.

O alvo fornecido pelos modelos DEA é único, isto significa que existe uma única projeção de acordo com a medida de eficiência DEA, para tornar eficiência uma DMU ineficiente. Esta projeção é baseada na variação equiproporcional dos *inputs* ou *outputs*, com o objetivo de simplificar a modelagem. É uma projeção arbitrária porque não incorpora nenhum conceito que mostre ser esta projeção preferível a qualquer outra na fronteira, e tampouco leva em conta preferências do decisor na busca de um alvo eficiente.

Buscando encontrar alternativas na determinação de alvos, Golany (1988) propõe um algoritmo que tem como objetivo determinar um vetor de *outputs* possíveis, que seja eficiente para um vetor de *inputs* dado. Para atingir este objetivo utiliza-se um enfoque PLMO iterativo para gerar um conjunto de pontos eficientes a serem considerados pela DMU. É o primeiro trabalho que integra as metodologias DEA e PLMO.

A partir dos estudos de Golany (1988), vários pesquisadores dedicaram-se ao estudo da determinação dos alvos ou projeções eficientes, chamados na literatura de *target models*, através de diversos enfoques. O enfoque mais estudado é o que utiliza modelos baseados em estruturas de preferências fornecidos pelo decisor. Tal como indica seu nome, neste enfoque inclui-se informação a priori fornecida pelo usuário ou decisor sobre a importância relativa das variáveis. Desta forma, os julgamentos de valor são incluídos no modelo para achar um alvo que esteja em concordância com as suas necessidades, limitações, recursos, etc.

Os modelos (3) e (4) propostos respectivamente por Thanassoulis e Dyson (1992) e Zhu (1996) necessitam de informação, a priori, sobre a importância relativa das variáveis sob a forma de pesos fornecida pelo usuário ou decisor. Estes modelos são não-radiais, uma vez que a redução nos *inputs* ou aumentos dos *outputs* não é realizada da forma equiproporcional.

Maximizar

$$\sum_{r \in R_0} w_r^+ \phi_r - \sum_{i \in I_0} w_i^- \varphi_i + \varepsilon \left(\sum_{i \in I_0} s_i^- + \sum_{r \in R_0} s_r^+ \right)$$

Sujeito a:

$$\phi_r y_{rj_0} - \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} = 0, r \in R_0$$

$$\varphi_i x_{ij_0} - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = 0, i \in I_0$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rj_0}, r \in \bar{R}_0 \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{ij_0}, i \in \bar{I}_0$$

$$\phi_r \geq 1, \forall r \in R_0$$

$$\varphi_i \leq 1, \forall i \in I_0$$

$$\lambda_j \geq 0, \forall j$$

$$s_i^-, s_r^+ \geq 0, \forall i \in \bar{I}_0 \text{ e } \forall r \in \bar{R}_0$$

$$\text{Maximizar } \frac{\sum_{r=1}^s w_r^+ \phi_r - \sum_{i=1}^m w_i^- \varphi_i}{\sum_{r=1}^s w_r^+ - \sum_{i=1}^m w_i^-}$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = \phi_r y_{rj_0}, r = 1, \dots, s \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \varphi_i x_{ij_0}, i = 1, \dots, m$$

$$\varphi_i, \phi_r \text{ irrestritos } \forall i, r, s_i^-, s_r^+ \geq 0, \forall i, r, \varepsilon > 0$$

$$\text{Onde } \sum_{r=1}^s w_r^+ - \sum_{i=1}^m w_i^- = 1$$

A estrutura de preferências do decisor é expressa através dos pesos w_r^+ e w_i^- a serem atribuídos aos fatores ϕ_r e ϕ_i , onde ϕ_r reflete o aumento percentual no *output* r , e ϕ_i reflete a redução percentual no *input* i para se atingir o alvo. Em aplicações reais, estes modelos devem ser utilizados interativamente testando diferentes conjuntos de pesos (w_r^+ e w_i^-) e permitindo ao decisor controlar a busca de alvos mais apropriados para a DMU. Cabe destacar que estes modelos somente indicam se a DMU é eficiente ou não, e a sua projeção no caso de ineficiência, mas não indica ou grau (escore) de ineficiência da unidade.

Conforme descrito por Clímaco *et al.* (2008), a determinação de alvos em DEA tanto no modelo de Thanassoulis e Dyson quanto no modelo de Zhu apresenta uma dificuldade importante: a escolha dos pesos a serem atribuídos aos fatores ϕ_r e ϕ_i . Não se têm limites para estes pesos nem se sabe seus possíveis valores antes de testar os modelos. Somente a tentativa e erro fornecem uma idéia das dimensões e das suas possíveis variações. Este processo não é sistemático, não há garantias de uma busca exaustiva de todas as possíveis soluções de interesse do usuário. Além disto, também não se sabe como variar os pesos de modo a obter soluções diferentes (alvos diferentes) das já obtidas.

Observa-se ainda que os modelos de Thanassoulis e Dyson e de Zhu são mono-objetivos, com uma agregação de vários objetivos, tendo-se atribuído um peso a cada um, o que pode ser visto como a construção de uma função de utilidade, isto é, a conversão de vários objetivos em uma única função (KORNBLUTH, 1974).

As restrições para ϕ_r e ϕ_i no modelo (3) de Thanassoulis e Dyson indica que o nível dos *outputs* deve permanecer igual ou aumentar, e que o nível dos *inputs* deve permanecer constante ou diminuir, isto é, considera-se dominância. A figura 1 representa este conceito, assim a DMU A pode ser projetada em qualquer ponto situado na região da fronteira de eficiência localizado entre as projeções radiais desta DMU.

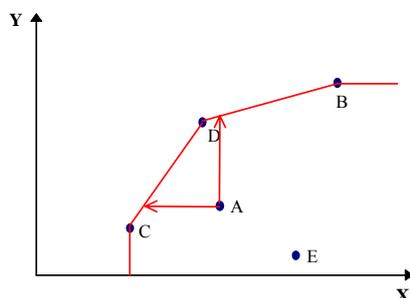


Figura 1. Projeções com dominância

O modelo (4) de Zhu não considera dominância, permitindo uma redução no nível do *output* e/ou um aumento no nível do *input*. Isto pode acontecer quando se considera viável e preferível, do ponto de vista da gerência, um aumento nos *inputs* (redução dos *outputs*) para atingir a fronteira eficiente. Por exemplo, casos de legislação trabalhista onde nenhum trabalhador pode ser demitido (grandes custos e má imagem pública) ou onde existe super produção de um item no mercado.

A partir do algoritmo proposto por Golany (1988), Angulo Meza (2002) propõe um modelo multiobjetivo para tratar cada objetivo independentemente sem a necessidade de agregação em uma função de utilidade e que, além de calcular pontos eficientes (alvos) alternativos, introduz uma nova forma de caracterizar a estrutura de preferências do decisor através da determinação de regiões de indiferença de cada solução eficiente ou não dominada obtida pelos modelos multiobjetivo propostos.

Este modelo é denominado MORO-D (MultiObjective for Ratio Optimization with Dominance) e foi apresentado posteriormente por Soares de Mello *et al.* (2003), Lins *et al.* (2004), Quariguasi Frota Neto e Angulo Meza (2007). Sua idéia principal é que os aumentos nos *outputs* e as reduções nos *inputs* são realizadas de forma independente. Em (5) é apresentado o modelo multiobjetivo MORO-D versão CRS (Retorno Constante de Escala). Uma atualização

deste modelo, com a relaxação de suas restrições de igualdade, é apresentado por Gomes Júnior *et al.* (2010).

$$\begin{aligned}
 & \max \phi_1 \\
 & \dots\dots \\
 & \max \phi_s \\
 & \min \varphi_1 \\
 & \dots\dots \\
 & \min \varphi_m
 \end{aligned} \tag{5}$$

Sujeito a:

$$\phi_r y_{rj_0} = \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j, \quad \forall r = 1, \dots, s$$

$$\varphi_i x_{ij_0} = \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j, \quad \forall i = 1, \dots, m$$

$$\phi_r \geq 1, \quad \forall r = 1, \dots, s$$

$$\varphi_i \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, m$$

O modelo (5) possui uma função objetivo para a projeção de cada variável. Assim ϕ_r representa o aumento para cada *output* r e φ_i representa a redução para cada *input* i . As duas primeiras restrições do modelo garantem que o alvo encontrado esteja na fronteira eficiente. As duas últimas restrições garantem que a DMU seja dominada pelo alvo no sentido de Pareto, isto é, o alvo não pode ter nenhum *input* maior nem nenhum *output* menor do que a DMU. Este modelo é a versão CRS, pois considera proporcionalidade entre *inputs* e *outputs*. Já na versão VRS (Retorno Variável de Escala) deve ser incluída a restrição de convexidade, isto é,

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1.$$

Se a DMU for eficiente, estará na fronteira Pareto eficiente ou fortemente eficiente e assim $\phi_r^* = \varphi_i^* = 1, \forall r, i$, pois as restrições de igualdade do modelo obrigam folgas nulas. Caso contrário, os alvos para os *outputs* são dados por (6) e os alvos para os *inputs* são dados por (7).

$$y_{rj_0}^* = \phi_r^* y_{rj_0}, \quad \forall r \tag{6}$$

$$x_{ij_0}^* = \varphi_i^* x_{ij_0}, \quad \forall i \tag{7}$$

O valor final $y_{rj_0}^*$ e $x_{ij_0}^*$ depende do alvo escolhido pelo decisor, definindo assim os valores para ϕ_r^* e φ_i^* dentre as soluções não dominadas do modelo problema (5). Desta forma, é possível obter alvos alternativos baseados nas preferências do decisor.

Embora estes modelos encontrem alvos alternativos para uma DMU ineficiente, baseado em projeções não-radiais, o que muitas vezes é preferível por questões gerenciais, eles não fornecem o grau de ineficiência da DMU. Buscando resolver esta deficiência, diversos índices de eficiência foram desenvolvidos por vários autores. Dentre eles podemos citar Färe e Lovell (1978), Ruggiero e Bretschneider (1998), Ziezchang (1984), Färe (1975); Färe *et al* (1983), Färe *et al* (1985), Pastor *et al* (1999), Cooper e Pastor (1995) e Tone (2001).

Entretanto, todos estes índices de eficiência são baseadas em média aritmética ou média ponderada, sem considerar, a priori, as direções de projeção da DMU na fronteira de eficiência, ou seja, não considera os conceitos vetoriais ligados à eficiência e, assim, estes índices não possuem um significado definido. Desta forma, os índices baseados em somas perdem o sentido para o cálculo da eficiência em relação à geometria do problema, já que está baseado apenas em distâncias euclidianas. Já os índices baseados em ponderações exigem arbitrariedade por parte do decisor, o que é uma contrariedade dos paradigmas de DEA.

3. Índice de eficiência baseado em conceitos vetoriais – formulação bidimensional

Não faz sentido tratar a eficiência como um escalar, uma vez que esta grandeza depende do ponto de projeção da DMU na fronteira e, por isso, ela é caracterizada por um número e por uma direção de projeção. Grandezas caracterizadas desta forma são vetoriais.

Soares de Mello *et al.* (2005) propõem um índice de eficiência vetorial mas, como afirmado pelos autores, o índice proposto possui restrições quanto à sua utilização.

Propõe-se, então, o desenvolvimento de um índice de eficiência não radial baseado nas propriedades vetoriais do problema, ou seja, para uma DMU atingir a fronteira de eficiência, ela deve se deslocar até esta fronteira em uma direção que é determinada pelo decisor, através da escolha do alvo.

A figura 2 ilustra os conceitos que serão utilizados para a obtenção do índice vetorial de eficiência. O desenvolvimento será feito para o caso bidimensional, pois permite uma melhor visualização.

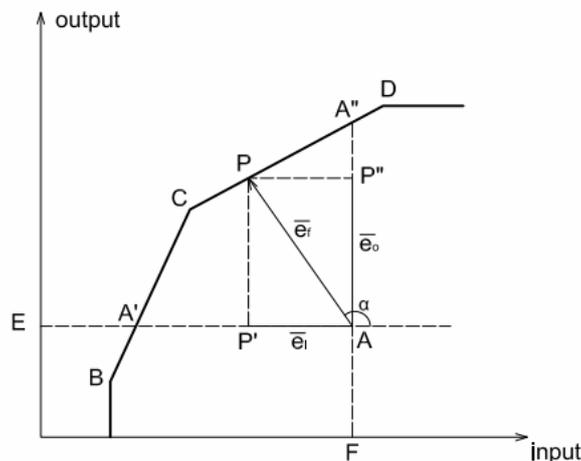


Figura 2. Representação bidimensional da fronteira DEA-BCC.

A eficiência com orientação a *input* ou com orientação a *output* nos modelos DEA clássicos são dadas pela razão entre a distância da projeção da DMU na fronteira de eficiência até o eixo coordenado e a distância entre a DMU e o eixo coordenado. Assim, para a DMU A, as eficiências orientadas a *input* e a *output*, calculadas pelos modelos DEA clássicos, são dadas, respectivamente, pelas equações (8) e (9).

$$e_{fi} = \frac{\overline{EA'}}{\overline{EA}} \quad (8)$$

$$e_{fo} = \frac{\overline{FA}}{\overline{FA''}} \quad (9)$$

Por outro lado, o complemento da eficiência é dado pela razão entre a distância entre a DMU e sua projeção na fronteira e a distância entre a DMU e o eixo coordenado. Para a DMU A, os complementos das eficiências com orientação a *input* e com orientação a *output* são dadas, respectivamente, pelas equações (10) e (11).

$$e_{fi} = 1 - e_{fi} = \frac{\overline{A'A}}{\overline{EA}} \quad (10)$$

$$e_{fo} = 1 - e_{fo} = \frac{\overline{AA''}}{\overline{FA''}} \quad (11)$$

No entanto, o que se deseja é calcular o índice de eficiência da DMU quando esta se projeta na fronteira segundo uma projeção não radial.

Suponha-se, então, que a DMU A se projeta na fronteira de eficiência no alvo determinado pelo ponto P, definindo uma direção α com o eixo horizontal. A DMU A possui coordenadas (x, y) e as coordenadas do ponto P são conhecidas e denominadas (x_E, y_E).

A projeção horizontal do ponto P representa o complemento da eficiência da DMU A se esta fosse projetada somente com orientação a *input*, dada pela equação (12) e a projeção vertical do ponto P representa o complemento da eficiência da DMU A em relação à orientação a *output* conforme a equação (13).

$$\overline{e_{f_i}} = \frac{\overline{AP'}}{\overline{EA}} \quad (12) \quad \text{e} \quad \overline{e_{f_o}} = \frac{\overline{AP''}}{\overline{FP''}} \quad (13)$$

Desta forma, o complemento da eficiência não radial da DMU A quando esta tem como projeção o alvo definido pelo ponto P pode ser calculado pela equação (14).

$$\overline{e_f} = \sqrt{\overline{e_{f_i}}^2 + \overline{e_{f_o}}^2} = \sqrt{\frac{\overline{AP'}^2}{\overline{EA}^2} + \frac{\overline{AP''}^2}{\overline{FP''}^2}} \quad (14)$$

Substituindo as coordenadas dos pontos A, E, F, P e suas projeções P' e P'', temos a equação (15).

$$\overline{e_f} = \sqrt{\left(\frac{x - x_E}{x}\right)^2 + \left(\frac{y_E - y}{y_E}\right)^2} \quad (15)$$

Como o índice de eficiência deve ser definido no intervalo [0,1] (COOPER E PASTOR, 1995), temos que a eficiência da DMU A quando projetada no alvo especificado pelo ponto P é igual à diferença de seu complemento até a unidade. Assim, a eficiência não radial da DMU A quando projetada no ponto P é dada pela equação (16).

$$e_f = 1 - \sqrt{\left(\frac{x - x_E}{x}\right)^2 + \left(\frac{y_E - y}{y_E}\right)^2} \quad (16)$$

As coordenadas do ponto P que é o alvo da DMU na fronteira são definidas pelas funções objetivo do modelo MORO-D e calculadas pelas equações (17) e (18). Assim, as coordenadas do ponto P são:

$$x_E = \phi \cdot x \quad (17)$$

$$y_E = \phi \cdot y \quad (18)$$

Substituindo as expressões (17) e (18) na expressão (16), a eficiência não radial de uma DMU quando projetada em um ponto P sobre a fronteira é definida pela expressão (19).

$$e_f = 1 - \sqrt{(1 - \phi)^2 + \left(1 - \frac{1}{\phi}\right)^2} \quad (19)$$

4. Validação do índice de eficiência vetorial

Seja r a reta que passa pelos pontos $A(x, y)$ e $P(x_E, y_E)$ da figura 2. Deseja-se fazer com que o ponto (x, y) caminhe em direção ao ponto $P(x_E, y_E)$ sobre a reta r . Desta forma, quando a distância entre estes pontos for infinitesimal, o valor da eficiência deve ser igual a 1 pois o ponto (x, y) estará a uma distância infinitesimal da fronteira de eficiência. Assim, definimos o limite da equação (20):

$$e_f = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_E,y_E)} 1 - \sqrt{\left(\frac{x - x_E}{x}\right)^2 + \left(\frac{y_E - y}{y_E}\right)^2} \quad (20)$$

Os caminhos que o ponto (x, y) se aproxima do ponto $P(x_E, y_E)$ são definidos por retas. Assim, o conjunto de todas as retas que passam pelo ponto $P(x_E, y_E)$, ou seja, o caminho por onde esta aproximação pode ocorrer é definido pela equação (21).

$$y - y_E = m(x - x_E) \Rightarrow y = m(x - x_E) + y_E \quad (21)$$

Aplicando a equação (21) sobre a expressão do limite definida em (20), este limite se transforma na equação (22):

$$e_f = \lim_{x \rightarrow x_E} 1 - \sqrt{\left(\frac{x - x_E}{x}\right)^2 + \left(\frac{y_E - m(x - x_E) - y_E}{y_E}\right)^2} \quad (22)$$

No limite quando $x \rightarrow x_E$ o valor da expressão é igual a 1, o que garante a validação do índice para o caso bidimensional.

Além da projeção da DMU em um ponto qualquer da fronteira, deve-se validar o índice vetorial para os casos particulares de projeções radiais dos modelos DEA clássicos. Assim, temos os casos de projeção radial com orientação a *input* e projeção radial com orientação a *output*.

4.1. Projeção radial com orientação a *input*

Como neste caso o valor do *output* se mantém constante, ou seja, $\phi = 1$ ($y = y_E$) e somente o valor do *input* varia, temos a expressão (23):

$$e_f = 1 - \sqrt{(1 - \phi)^2 + \left(1 - \frac{1}{\phi}\right)^2} = 1 - \sqrt{(1 - \phi)^2} = 1 - 1 + \phi = \phi \quad (23)$$

Assim, a eficiência da DMU é a própria eficiência orientada a *input*.

4.2. Projeção radial com orientação a *output*

Neste caso o valor do *input* se mantém constante, ou seja, $\phi = 1$ ($x = x_E$), alterando apenas o valor do *output*, temos a expressão (24):

$$e_f = 1 - \sqrt{(1 - \phi)^2 + \left(1 - \frac{1}{\phi}\right)^2} = 1 - \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\phi}\right)^2} = 1 - 1 + \frac{1}{\phi} = \frac{1}{\phi} \quad (24)$$

Ou seja, a eficiência da DMU é a própria eficiência orientada a *output*.

Desta forma, verifica-se que o índice proposto satisfaz aos casos de projeção radial com orientação a *input* e com orientação a *output*.

5. Exemplo numérico

Para exemplificação da utilização do índice de eficiência vetorial, utiliza-se os dados apresentados na tabela 1 referentes a 5 DMUs genéricas, com 1 *input* e 1 *output*.

DMU	Input	Output
A	5	8
B	1	6
C	9	10
D	8	7
E	4	9

Tabela 1 – Dados numéricos

Avaliou-se a eficiência das DMUs utilizando o modelo BCC (VRS) orientado a *input* e orientado a *output* com a utilização do software SIAD, apresentado na tabela 2. Pode-se verificar que as DMUs B, C e E são as DMUs eficientes e, portanto, as que formam a fronteira de produção (figura 3). Além das eficiências orientadas a *input* e a *output*, tem-se como resultado as DMUs que são *benchmarks* para as DMUs ineficientes assim como os alvos que estas DMUs devem ser projetadas.

DMU	Eficiência		Benchmark		Benchmark		Alvo	
	Input	Output	Orientação a input		Orientação a output		Input	Output
A	0,8	0,9524	E 100%		C 20%	E 80%	(4, 8)	(5; 8,4)
B	1	1						
C	1	1						
D	0,3125	0,7292	B 50%	E 50%	C 80%	E 20%	(2,5; 7)	(8; 9,6)
E	1	1						

Tabela 2 – Resultados

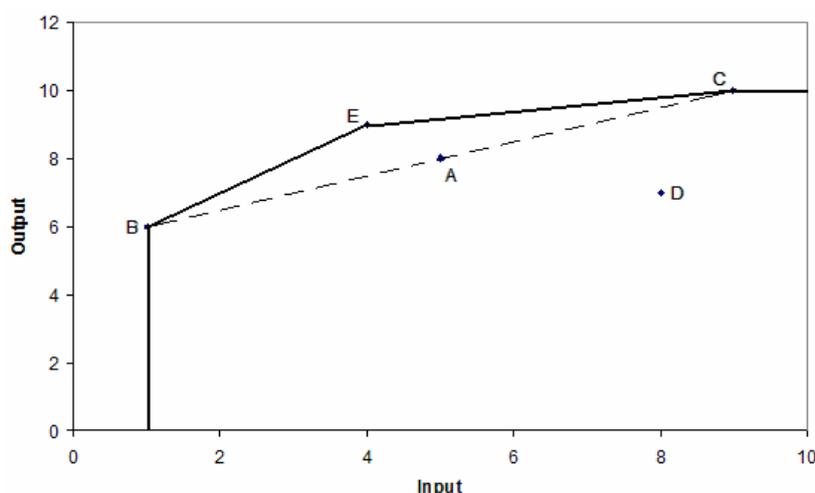


Figura 3. Fronteira de produção.

Os resultados apresentados pelo DEA clássico apresentam projeções radiais, assim, não há variação do *output* quando a projeção é feita com orientação a *input* e, por outro lado, não há variação do *input* quando a projeção é feita com orientação a *output*. Além disso, verifica-se os benchmarks para as DMUs A e D. Nota-se que os benchmarks são pontos intermediários entre DMUs eficientes. Gerencialmente estes resultados podem não fazer muito sentido, pois a DMU está se espelhando em práticas fictícias.

O índice vetorial permite calcular a eficiência da DMU quando esta é projetada não radialmente. Assim, projetando a DMU A na DMU E, pois é a DMU eficiente mais próxima, a sua eficiência calculada pelo índice vetorial apresentado na equação (16) é 0,726. Pelo mesmo motivo, projetando a DMU D na DMU C, a eficiência vetorial é 0,675.

Pela figura 3, nota-se que a DMU A localiza-se sobre uma reta que passa pelas DMUs B e C, formando uma fronteira de produção fictícia que, segundo Soares de Mello *et al.* (2005), era a fronteira na qual o índice de eficiência era calculado segundo seu índice vetorial. Desta forma, a DMU A deveria ter eficiência unitária, o que gerava limitações quanto a utilização do índice. Entretanto, verifica-se que isto não acontece.

6. Conclusões

Os modelos DEA clássicos trabalham com projeções radiais das DMUs na fronteira de eficiência, considerando reduções equiproporcionais dos *inputs* ou aumentos equiproporcionais dos *outputs*. No entanto, em vários problemas gerenciais é necessário que existam alternativas ao alvo único fornecido pelos modelos DEA padrão. Uma alternativa é a possibilidade de variação dos *inputs* ou *outputs* de forma independente.

Para considerar estas variações, modelos de programação linear multiobjetivo vêm sendo desenvolvidos. Apesar disso, estes modelos multiobjetivos não calculam o índice de eficiência da DMU analisada, o que impede uma avaliação destas DMUs.

Por outro lado, ao longo dos últimos anos, várias pesquisas desenvolveram novas medidas de eficiência ou aprimoraram as medidas já existentes. Entretanto, os índices desenvolvidos apresentam deficiências em suas utilizações, seja pela forma como foram elaborados utilizando médias aritméticas ou ponderadas, seja por restrições em sua utilização. Além do que não fornecem benchmarks para as DMUs ineficientes.

Assim, o índice de eficiência vetorial apresentado neste trabalho possui a vantagem de utilizar os conceitos de eficiência em sua formulação e não possuir nenhuma restrição em sua utilização, permitindo determinar o grau de ineficiência de uma DMU quando esta se projeta em um alvo alternativo sobre a fronteira de eficiência. Assim, fornece aos decisores um maior número de informações para melhorar o processo de decisão.

Agradecimentos

À FAPERJ e ao CNPq pelo apoio financeiro.

7.Referências

- Angulo Meza, L.** (2002), *Um Enfoque Multiobjetivo para a Determinação de Alvos na Análise Envoltória de Dados (DEA)* (Doutorado). Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- Banker, R.D.; Charnes, A.; Cooper, W.W.** (1984) Some models for estimating technical scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, 30, 9, 1078-1092.
- Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E.** (1978), Measuring the efficiency of decision-making units. *European Journal of Operational Research*, 2, 6, 429-444.
- Clímaco, J. C. N., Antunes, C. H., Alves, M. J. G.,** *Programação Linear Multiobjetivo*, Universidade de Coimbra, Coimbra, 2003.
- Clímaco, J. C. N., Soares de Mello, J. C. C. B., Angulo-Meza, L.,** Performance Measurement – From DEA to MOLP. (Ed. Encyclopedia of Decision Making and Decision Support Technologies. Hershey: Information Science Reference), 709-715, 2008.
- Cooper, W. W., Pastor, J. T.** (1995), Global Efficiency Measurement in DEA. *Working Paper*, Universidad de Alicante, Alicante, Espanha.
- Cooper, W. W., Park, K. S., Pastor, J. T.** (1999), RAM: A Range Adjusted Measure of Inefficiency for Use with Additive Models, and Relations to Other Models and Measures in DEA. *The Journal of Productivity Analysis*, 11, 1, 5-42.
- Färe, R.** (1975), Efficiency and the Production Function. *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 35, 317-324.
- Färe, R., Lovell, C. A. K.** (1978), Measuring the Technical Efficiency of Production. *Journal of Economic Theory*, 19, 1, 150-162.
- Färe, R., Lovell, C. A. K., Zieschang, K.,** *Measuring the Technical Efficiency of Multiple Output Production Technologies*. Eichhorn, W., Henn, R., Neumann, K., Shephard, R.W. (eds), Quantitative Studies on Production and Prices, Würzburg and Vienna, Physica-Verlag, 1983.
- Färe, R., Grosskopf, S., Lovell, C. A. K.,** *The Measurement of Efficiency of Production*. Boston, Kluwer-Nijhoff Publishing, 1985.
- Golany, B.** (1988), An interactive MOLP procedure for the extension of DEA to Effectiveness Analysis, *Journal of the Operational Research Society*, 39, 8, 725-734.
- Gomes Júnior, S. F., Soares de Mello, J. C. C. B., Angulo Meza, L., Chaves, M. C. C., Pereira, E. R.** (2010), Equivalências em modelos MOLP-DEA que fornecem benchmarks para unidades ineficientes – o modelo MORO-D-R, *Revista Ingepro*, 2, 3, 14-24.
- Kornbluth, J. S. H.** (1974), Duality, Indifference and Sensitivity Analysis in MOLP. *Operational Research Quarterly*, 25, 4, 599-614.
- Lins, M. P. E., Angulo Meza, L., Moreira da Silva, A. C.** (2004), A multi-objective approach to determine alternative targets in data envelopment analysis, *Journal of the Operational Research Society*, 55, 1090–1101.
- Pastor, J. T., Ruiz, J. L. Sirvent, I.** (1999), An Enhanced DEA Russell Graph Efficiency Measure. *European Journal of Operational Research*, 115, 596-607.

- Quariguasi Frota Neto, J. E., Angulo-Meza, L.** (2007), Alternative targets for data envelopment analysis through multi-objective linear programming: Rio de Janeiro Odontological Public Health System Case Study, *Journal of the Operational Research Society*, 58, 865–873.
- Ruggiero, J., Bretschneider, S.** (1998), The Mighthed Russell Measure of Technical Efficiency. *European Journal of Operational Research*, 108, 438-451.
- Soares De Mello, J. C. C. B., Angulo-Meza, L., Gomes, E. G., Serapião, B. P., Lins, M. P. E.** (2003), Análise de Envoltória de Dados no estudo da eficiência e dos benchmarks para companhias aéreas brasileiras, *Pesquisa Operacional*, 23, 2, 325-345.
- Soares de Mello, J. C. C. B., Angulo Meza, L., Gomes, E. G., Biondi Neto, L.** (2005), Limites para eficiencias não radiais em DEA: uma abordagem vectorial. *Investigação Operacional*, 25, 2, 243-252.
- Stewart, T. J.** (1996), “Relationships between data envelopment analysis and multicriteria decision analysis”, *Journal of the Operations Research Society*, 47, 654-665.
- Thanassoulis, E., Dyson, R. G** (1992), Estimating preferred target input-output levels using Data Envelopment Analysis. *European Journal of Operational Research*, 56, 80-97.
- Tone, K.** (2001), A Slacks-Based Measure of Efficiency in Data Envelopment Analysis. *European Journal of Operational Research*, 130, 498-509.
- Zhu, J.** (1996), Data Envelopment Analysis with Preference Structure. *Journal of the Operational Research Society*, 47, 136-150.
- Zieschang, K.** (1984), An Extended Farrell Efficiency Measure. *Journal of Economic Theory*, 33, 2, 387-396.