Uma abordagem dual para resolver problemas de programação quadrática nebulosa

Ricardo C. Silva e Akebo Yamakami
Departamento de Telemática – DT
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação – FEEC
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP
av. Albert Einstein, 400, 13083-852, Campinas–SP
{rcoelhos,akebo}@dt.fee.unicamp.br

Resumo

Embora programação quadrática possa ser definida como uma classe específica da programação não-linear, ela pode também ser usada para generalizar a programação linear. Por esse motivo, pode-se encontrar várias aplicações no mundo real com problemas quadráticos. No mundo real são também encontradas ambiguidade e imprecisão de maneira natural nos dados e/ou modelos desses problemas, que requerem soluções mais realistas. A lógica nebulosa é uma ferramenta que surgiu para tratar essa situação, pois modela as imprecisões da vida real. Ela é aplicada em uma crescente variedade de campos práticos, inclusive em problemas de otimização. Sabendo da importância desse tipo de problema, esse projeto tem como finalidade apresentar uma nova abordagem dual para resolver problemas de programação quadrática com incerteza no conjunto de restrições. A abordagem proposta é aplicada em dois exemplos numéricos teóricos, que mostram a sua eficiência.
Palavras-chave: Lógica nebulosa, Otimização quadrática, Teoria de dualidade

Abstract

Although quadratic programming can be defined as a specific class of non-linear programming, it is also generalized of linear programming. For this reason, many real applications with quadratic programming can be found. In the real-world, some vagueness data and/or uncertain models are also found in natural way that require solutions realistic. Fuzzy logic is a tool, which has arised to treat this situation, that model the imprecisions. It is applied in an increasing variety of fields practical, including the optimization problems. Knowing the importance of this problem, this work presents a novel dual approach for solving problems quadratic programming with uncertainties in the set of constraints. The proposed approach is implemented in two numerical examples theorists that show their efficiency.
Keywords: Fuzzy logic, Quadratic optimization, Duality theory

1 Introdução

Uma ampla variedade de tarefas físicas e mentais que são formuladas pelo ser humano, das quais não têm nenhum tipo de medição e cálculo exatos, inspiraram o conceito de Inteligência Artificial (IA) nos primeiros cinqüenta anos do século passado. A definição de IA pode ser descrita como "o estudo e projeto de agentes inteligentes (Poole *et al.* 1998)", sendo que um agente inteligente é um sistema que considera seu ambiente e toma ações que maximizam suas chances de sucesso (Russel & Norvig 2003). A capacidade de calcular e raciocinar com informação baseada em *perceptrons* pode ser aplicada a problemas do mundo real, no qual a informação de decisão relevante é uma mistura de medições e percepções (Zadeh 2001), sendo que, em geral, medições são clássicas enquanto percepções são nebulosas.

A melhor maneira de modelar esse tipo de situação é usando as metodologias de *Soft Computing* (SC) que é uma coleção de metodologias que almeja explorar a tolerância pela imprecisão e incerteza para conseguir tratabilidade, robustez, solução de baixo custo e melhor relação com a realidade. Em (Zadeh 1994), SC é uma associação de metodologias centradas em lógica difusa, neuro-computação e raciocínio probabilístico. De acordo com Verdegay *et al.* (2008), SC é uma família de métodos de resolução de problemas que pode ser vista como raciocínio aproximado e métodos de otimização e/ou aproximação funcional. O raciocínio aproximado é dividida em modelos probabilísticos e teoria de conjuntos nebulosos, enquanto o segundo grupo está dividido em redes neurais artificiais e meta-heurísticas.

A teoria de conjuntos nebulosos, que foi desenvolvida por Zadeh (1965), ajuda no tratamento das imprecisões presentes nos problemas da vida real. Ela permite a incorporação de características subjetivas nos modelos de tomada de decisão. Essa teoria nebulosa tem encontrado inúmeras aplicações devido a sua fácil implementação, flexibilidade, natureza tolerante a dados imprecisos e habilidades de modelar comportamentos não-lineares de complexidade arbitrária por causa de sua base em termos de linguagem natural. Em (Dubois & Prade 1980, Pedrycs & Gomide 1998, Zimmermann 1996) podem ser encontradas uma breve introdução em lógica nebulosa e algumas aplicações nas áreas de reconhecimento de padrões, análise de dados, controle, economia, pesquisa operacional, entre outras.

Esse trabalho estará focado nos métodos de otimização, os quais são baseados no conhecimento matemático que teoricamente garantem a convergência para uma solução ótima. Esses métodos estão inseridos na área de Programação Matemática (PM), que surgiu na metade do século passado com um objetivo militar e depois usado em problemas em geral. Entretanto, seu impacto já foi bastante notável e tem várias sub-áreas, sendo a Programação Quadrática (PQ) uma delas, a qual tem uma função objetivo quadrática e restrições lineares. Assim, PQ pode ser visto como uma generalização de um problema de programação linear, sendo que ao mesmo tempo é também definido como uma classe especial de problemas de programação não-linear. Esse conjunto de problemas pode ser formalizado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c^t x} + \tfrac{1}{2}\mathbf{x^t Q x} \\ \text{s.a} \quad & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{1}$$

onde $\mathbf{c}$ é um vetor de dimensão n, $\mathbf{b}$ de dimensão m, $\mathbf{A}$ é uma matriz de dimensão $m \times n$ e $\mathbf{Q}$ é uma matriz simétrica de dimensão $n \times n$. Existem várias classes de problemas que são naturalmente expressos como problemas quadráticos e que podem ser encontrados em teoria de jogos, planejamento e análise de circuitos, processamento de sinais, sistemas de controle, problemas que envolvem economia, alocação de facilidades, entre outros. Algumas aplicações podem ser encontradas em (Floudas *et al.* 1999, Hock & Schittkowski 1981, Schittkowski 1987).

Uma das etapas críticas no processo de modelagem de problemas reais por técnicas de programação matemática é a escolha dos dados, que carecem de conhecimento exato e somente valores aproximados, vagos ou imprecisos são conhecidos. Nesse ponto entra a teria dos conjuntos nebulosos e a sua aplicabilidade em programação matemática é muito ampla, pois permite ao decisor uma maior flexibilidade em sua formulação. Bellman & Zadeh (1970) provou que existe um problema de programação linear equivalente. Desde então, programação linear nebulosa se desenvolveu em várias direções com muitas aplicações com sucesso, como é descrito em (Delgado *et al.* 1994, Lai & Hwang 1992, Negoita & Ralescu 1975). Hoje em dia, programação matemática nebulosa é considerada uma importante área de otimização, em geral. Assim, o Problema (1) pode ser reescrito como um problema de programação quadrática nebuloso da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min \quad & \tilde{\mathbf{c}}^{\mathbf{t}}\tilde{\mathbf{x}} + \tfrac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}^{\mathbf{t}}\tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{x}} \\ \text{s.a} \quad & \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} \lesssim \tilde{\mathbf{b}} \\ & \tilde{\mathbf{x}} \gtrsim \tilde{\mathbf{0}}. \end{aligned} \tag{2}$$

onde o símbolo "$\tilde{\cdot}$" representa que os dados ou a relação de ordem são imprecisos. No entanto, nesse trabalho está focado no tratameto da incerteza somente na relação de ordem no conjunto de restrições. Os demais campos imprecisos dessa formulação serão tratados em trabalhos futuros.

Diante do exposto acima, o objetivo desse trabalho está em desenvolver uma abordagem dual para resolver problemas de otimização quadrática nebulosa, onde a imprecisão está inserida na relação de ordem do conjunto de restrições. O desenvolvimento de abordagens duais para resolver problemas de programação quadrática nebulosa é importante, pois ela é uma generalização da programação linear e um caso particular da programação não-linear. Na área de programação quadrática nebulosa dual existem poucos trabalhos e um deles pode ser encontrado em (Bector & Chandra 2005). Enquanto na área linear pode-se destacar os trabalhos de Rödder & Zimmermann (1980), que considera uma interpretação econômica das variáveis duais, de Verdegay (1984) foi definido um probelma nebuloso dual com a ajuda de problemas de programação linear paramétrica e mostrou que ambos os problemas nebulosos primal e dual têm as mesmas soluções nebulosas sob algumas condições apropriadas. Wu (2003) considera a função Lagrangeana e multiplicadores Lagrangeanos no problema dual, mas propõe uma determinada função Lagrangeana nebulosa para resolvê-los. Em (Inuiguchi *et al.* 2003), é definido conceitos de soluções factíveis e satisfatórias da abordagem dual dos problemas de otimização linear nebulosa.

Esse trabalho está dividido da seguinte forma: na Seção 2 é apresentado uma abordagem dual para problemas de programação quadrática nebulosa já publicada; na Seção 3 é apresentada uma nova abordagem dual para esse tipo de problema quadrático, que mostra que o problema dual obtem os mesmos valores do primal sob sertas condições; As simulações numéricas de dois problemas básicos selecionados e uma análise dos resultados obtidos são apresentadas na Seção 4; na Seção 5, finalmente, são apresentadas as conclusões deste trabalho.

2 Abordagem dual de Bector e Chandra

O estudo da teoria de dualidade é importante porque ela associa o problema original, chamado primal, a um novo problema, chamado dual, que são equivalentes sobre certas condições. Em alguns casos, o problema dual é mais fácil para obter uma solução ótima que o problema primal. Essa afirmação também se extende aos problemas de programação matemática nebulosa, e em alguns trabalhos foram desenvolvidos abordagens duais para problemas lineares nebulosos. Contudo, uma abordagem dual para problemas não-lineares nebulosos, em particular os problemas quadráticos, foram pouco estudados. Pode-se destacar o trabalho publicado por Bector & Chandra (2005), o qual será apresentado nessa seção. No caso clássico, o problema primal pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^{\mathbf{t}}\mathbf{x} - \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathbf{t}}\mathbf{Q}\mathbf{x} \\ \text{s.a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{3}$$

onde $\mathbf{x}$ e $\mathbf{c}$ são vetores pertencentes ao $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{b}$ é um vetor pertencente ao $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{A}$ é uma matriz pertencente ao $\mathbb{R}^{m\times n}$ e $\mathbf{Q}$ é uma matriz simétrica semidefinida positiva pertencente ao $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Existem algumas abordagens para formalizar o problema dual associado e a abordagem escolhida em (Bector & Chandra 2005) é descrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{b}^{\mathbf{t}}\mathbf{u} + \tfrac{1}{2}\mathbf{w}^{\mathbf{t}}\mathbf{Q}\mathbf{w} \\ \text{s.a} \quad & \mathbf{A}^{\mathbf{t}}\mathbf{u} + \mathbf{Q}\mathbf{w} \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{w} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{4}$$

onde $\mathbf{w}$ é um vetor pertencente ao $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u}$ é um vetor pertencente ao $\mathbb{R}^m$.

Tomando os níveis de aspiração, como Z_0 e W_0, para as funções objetivos dos Problemas (3) e (4), respectivamente, a versão nebulosa desses problemas pode ser considerada como segue:

$$\begin{aligned} &\text{Achar } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tal que} \\ &\mathbf{c}^{\mathbf{t}}\mathbf{x} - \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathbf{t}}\mathbf{Q}\mathbf{x} \gtrsim Z_0 \\ &\mathbf{A}\mathbf{x} \lesssim \mathbf{b} \\ &\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{5}$$

e

$$\begin{aligned} &\text{Achar } (\mathbf{u},\mathbf{w}) \in (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \text{ tal que} \\ &\mathbf{b}^{\mathbf{t}}\mathbf{u} + \tfrac{1}{2}\mathbf{w}^{\mathbf{t}}\mathbf{Q}\mathbf{w} \lesssim W_0 \\ &\mathbf{A}^{\mathbf{t}}\mathbf{u} + \mathbf{Q}\mathbf{w} \gtrsim \mathbf{c} \\ &\mathbf{u} \geq \mathbf{0} \\ &\mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{6}$$

onde $\lesssim$ e $\gtrsim$ são os símbolos da relação de ordem nebulosa, que representam as características imprecisas do problema. De acordo com Zimmermann (1996), essas relações nebulosas podem sofrer uma certa violação, que representa uma variação no termo independente permitindo um relaxamento nas restrições dos Problemas (5) e (6), enfoques primal e dual nebulosos respectivamente.

Assim, as constantes p_0 e $p_i (i = 1,\ldots,m)$ podem ser escolhidas pelo decisor, que correspondem às violações máximas permitidas associadas a função objetivo e restrições do problema primal. Agora é possível descrever as funções de pertinência $\mu_0(\mathbf{x})$, que está associada à função objetivo, e $\mu_i(\mathbf{x})(i = 1,\ldots,m)$, que estão associadas às restrições, como segue:

$$\mu_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{c}^{\mathbf{t}}\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathbf{t}}\mathbf{Q}\mathbf{x} \geq Z_0 \\ 1 - \dfrac{Z_0 - \mathbf{c}^{\mathbf{t}}\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathbf{t}}\mathbf{Q}\mathbf{x}}{p_0} & Z_0 - p_0 \leq \mathbf{c}^{\mathbf{t}}\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathbf{t}}\mathbf{Q}\mathbf{x} < Z_0 \\ 0 & \mathbf{c}^{\mathbf{t}}\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathbf{t}}\mathbf{Q}\mathbf{x} < Z_0 - p_0 \end{cases}$$

e

$$\mu_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{A}_i\mathbf{x} \leq b_i \\ 1 - \dfrac{\mathbf{A}_i\mathbf{x} - b_i}{p_i} & b_i < \mathbf{A}_i\mathbf{x} \leq b_i + p_i \\ 0 & \mathbf{A}_i\mathbf{x} > b_i + p_i \end{cases}$$

Logo, usando essas funções de pertinência, um problema clássico equivalente do problema quadrático nebuloso primal pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \max \quad & \alpha \\ \text{s.a} \quad & \mathbf{c^t x} - \tfrac{1}{2}\mathbf{x^t Q x} \geq Z_0 - (1-\alpha)p_0 \\ & \mathbf{A}_i\mathbf{x} \leq b_i + (1-\alpha)p_i \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \alpha \in [0,1],\ i = 1,\ldots,m. \end{aligned} \tag{7}$$

De maneira similar, as constantes q_0 e $q_j (j = 1,\ldots,n)$ podem ser escolhidas pelo decisor conrrespondendo às violações máximas permitidas associadas a função objetivo e restrições do problema dual. Logo, usando as funções de pertinência do Problema (6), um problema clássico equivalente do probelma quadrático nebuloso dual também pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} \min \quad & \beta \\ \text{s.a} \quad & \mathbf{b^t u} + \tfrac{1}{2}\mathbf{w^t Q w} \leq W_0 + (1-\beta)q_0 \\ & \mathbf{A^t}_j\mathbf{u} + \mathbf{Q}_j\mathbf{w} \geq c_j - (1-\beta)q_j \\ & \mathbf{u} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{w} \geq \mathbf{0},\ \beta \in [0,1], j = 1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{8}$$

No intuito de provar que os Problemas (7) e (8), primal e dual repectivamente, são equivalentes (Bector & Chandra 2005) descrevem o seguinte teorema.

Teorema 1 (Dualidade fraca) *Seja* $(\mathbf{x},\alpha)$ *factíveis para o Problema (7) e* $(\mathbf{u},\mathbf{w},\beta)$ *factíveis para o Problema (8). Então,*

1. $(\alpha-1)\sum_{i=1}^{m} p_i u_i + (\beta-1)\sum_{j=1}^{n} q_j x_j \leq F(\mathbf{u},\mathbf{w}) - f(\mathbf{x})$.
2. $(\alpha-1)p_0 + (\beta-1)q_0 \leq (f(\mathbf{x}) - F(\mathbf{u},\mathbf{w}) + (W_0 - Z_0))$.

onde $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c^t x} - \frac{1}{2}\mathbf{x^t Q x}$ *e* $F(\mathbf{u},\mathbf{w}) = \mathbf{b^t u} + \frac{1}{2}\mathbf{w^t Q w}$.

Demonstração: Pode ser encontrada em (Bector & Chandra 2005). ■

3 Abordagem dual sobre ambiente nebuloso

Diante do que já foi comentado, uma abordagem dual pode ser utilizada tanto em casos simples como em casos mais gerais, pois as questões teóricas e as técnicas computacionais podem ser muito mais simples. De acordo com (Silva *et al.* 2007), problema quadrático primal em um ambiente nebuloso, onde a relação de ordem do conjunto de restrições tem uma natureza nebulosa, pode ser transformado em um problema quadrático paramétrico equivalente. Aplicando a teoria de dualidade nesse problema paramétrico, um problema quadrático paramétrico dual pode ser construido. Assim, esse problema dual pode ser equivalente a um problema quadrático nebuloso dual. O problema quadrático primal em um ambiente nebuloso pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c^t x} + \tfrac{1}{2}\mathbf{x^t Q x} \\ \text{s.a} \quad & \mathbf{Ax} \lesssim \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{9}$$

onde as funções de pertinência

$$\mu_i : \mathbb{R} \to (0,1], \;\; i = 1,\dots,m$$

nas restrições nebulosas são determinadas pelo decisor. É claro que cada função de pertinência, que corresponde a cada restrição, terá um nível de satisfação para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Esse grau é igual a 1 quando a restrição não tem qualquer violação e decresce para 0 com maior violação. Assim, essas funções de pertinência pode ser formulada como segue

$$\mu_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{A}_i\mathbf{x} \leq b_i \\ 1 - \dfrac{\mathbf{A}_i\mathbf{x} - b_i}{p_i}, & b_i < \mathbf{A}_i\mathbf{x} \leq b_i + p_i \\ 0, & \mathbf{A}_i\mathbf{x} > b_i + p_i \end{cases}$$

A fim de resolver esse problema, um conjunto contendo todas as restrição nebulosa é definido. É claro que $\forall \alpha \in (0,1]$, um α-corte do conjunto de restrições nebulosas formará um conjunto clássico paramétrico

$$X(\alpha) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \mu_X(\mathbf{x}) \geq \alpha\}$$

onde $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mu_X(\mathbf{x}) = \inf \mu_i(\mathbf{x}), i \in I$$

Assim, um α-corte da i-ésima restrição será denotado por $X_i(\alpha)$. Logo, se $\forall \alpha \in (0,1]$,

$$S(\alpha) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / \mathbf{c^t x} + \frac{1}{2}\mathbf{x^t Q x} = \min\ \mathbf{c^t y} + \frac{1}{2}\mathbf{y^t Q y},\ \mathbf{y} \in X(\alpha) \right\}$$

a solução nebulosa desse problema será, portanto, o conjunto nebuloso definido pela seguinte função de pertinência

$$S(\alpha) = \begin{cases} \sup\{\alpha : x \in S(\alpha)\}, & x \in \bigcup_\alpha S(\alpha) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Sempre que $\forall \alpha \in (0,1]$,

$$X(\alpha) = \bigcap_{i \in I} \{x \in \mathbb{R}^n / \mathbf{A}_i\mathbf{x} \leq r_i(\alpha), \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

com $r_i(\alpha) = b_i + d_i(1-\alpha)$, a solução operativa do Problema (9) pode ser encontrada, α-corte por α-corte, formalizando o seguinte problema de programação quadrática paramétrica:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c^t x} + \tfrac{1}{2}\mathbf{x^t Q x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}_i\mathbf{x} \leq r_i(\alpha) \\ & \mathbf{x} \geq 0,\ \alpha \in (0,1],\ i = 1,\dots,m. \end{aligned} \tag{10}$$

Assim, um problema de programação quadrática nebulosa pode ser parametrizado. A partir desse ponto a teoria da dualidade, apresentada em (Izmailov & Solodov 2005), será usada para que o problema dual paramétrico seja formulada. Uma das maneiras é usar a dualidade Lagrangeana, a qual insere as restrições na função objetivo com uma certa ponderação. Aplicando a dualidade Lagrangeana no Problema (10), temos

$$L(\mathbf{x},\lambda)=\mathbf{c^t x}+\frac{1}{2}\mathbf{x^t Q x}+\lambda^{\mathbf{t}}\left(\mathbf{Ax}-\mathbf{r}(\alpha)\right).$$

sendo que o vetor λ, que pertence ao $\mathbb{R}^m$, é chamado de multiplicador de Lagrange e cada posição desse vetor está diretamente ligada a uma restrição do probelma primal. A função dual Lagrangeana é definida como o valor mínimo da Lagrangeana sobre $\mathbf{x}$.Assim, temos

$$\begin{aligned}\phi(\lambda) &= \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^\mathbf{n}} L(\mathbf{x},\lambda)\\ &= \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^\mathbf{n}} \mathbf{c^t x}+\tfrac{1}{2}\mathbf{x^t Q x}+\lambda^{\mathbf{t}}\left(\mathbf{Ax}-\mathbf{r}(\alpha)\right)\end{aligned}$$

Aplicando $\nabla_x L(\mathbf{x},\lambda)=0$ obtemos o valor mínimo para $\mathbf{x}=-Q^{-1}\left(A^t\lambda+c\right)$ e substituindo esse valor na equação acima, temos

$$\begin{aligned}\phi(\lambda) &= \min_{\lambda\geq\mathbf{0}}\ \mathbf{c^t}\left(-\mathbf{Q^{-1}}\left(\mathbf{A^t}\lambda+\mathbf{c}\right)\right)+\tfrac{1}{2}\left(-\mathbf{Q^{-1}}\left(\mathbf{A^t}\lambda+\mathbf{c}\right)\right)^{\mathbf{t}}\mathbf{Q}\left(-\mathbf{Q^{-1}}\left(\mathbf{A^t}\lambda+\mathbf{c}\right)\right)+\\ &\quad +\lambda^{\mathbf{t}}\left(\mathbf{A}\left(-\mathbf{Q^{-1}}\left(\mathbf{A^t}\lambda+\mathbf{c}\right)\right)-\mathbf{r}(\alpha)\right)\\ &= \min_{\lambda\geq\mathbf{0}}\ -\left(\lambda^{\mathbf{t}}\mathbf{A}+\mathbf{c^t}\right)\mathbf{Q^{-1}}\left(\mathbf{A^t}\lambda+\mathbf{c}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\lambda^{\mathbf{t}}\mathbf{A}+\mathbf{c^t}\right)\mathbf{Q^{-1}}\left(\mathbf{A^t}\lambda+\mathbf{c}\right)-\lambda^{\mathbf{t}}\mathbf{r}(\alpha)\\ &= \min_{\lambda\geq\mathbf{0}}\ -\tfrac{1}{2}\left(\lambda^{\mathbf{t}}\mathbf{A}+\mathbf{c^t}\right)\mathbf{Q^{-1}}\left(\mathbf{A^t}\lambda+\mathbf{c}\right)-\lambda^{\mathbf{t}}\mathbf{r}(\alpha)\end{aligned}$$

Portanto, o problema quadrático paramétrico dual é dado por:

$$\begin{aligned}\max\quad & \phi(\lambda)=-\tfrac{1}{2}\left(\lambda^{\mathbf{t}}\mathbf{A}+\mathbf{c^t}\right)\mathbf{Q^{-1}}\left(\mathbf{A^t}\lambda+\mathbf{c}\right)-\lambda^{\mathbf{t}}\mathbf{r}(\alpha)\\ & \lambda\geq 0,\ \alpha\in(0,1].\end{aligned}\tag{11}$$

A idéia básica dessa nova abordagem dual é usar um problema paramétrico para obter um conjunto de soluções, para os diferentes valores de α, e então usar o Teorema da Representação para integrá-los formando uma solução nebulosa.

4 Exemplos numéricos

Nessa seção, dois exemplos numéricos simples serão apresentados, que ilustram a construção do par de problemas quadráticos nebulosos primal-dual. Os resultados obtidos são comparados aos encontrados em (Bector & Chandra 2005).

Exemplo 1 *Considere o seguinte problema quadrático nebuloso primal.*

$$\begin{aligned}\max\quad & f(x)=2x-\tfrac{1}{2}x^2\\ s.a\quad & 0\leq x\lesssim 1,\end{aligned}\tag{12}$$

onde a matriz simétrica $Q=-1$, o vetor $c=2$, a matriz $A=1$ e o vetor do termo independente $b=1$. Tomando a violação máxima, d, da restrição nebulosa igual a 2, o problema paramétrico equivalente pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}\max\quad & f(x)=2x-\tfrac{1}{2}x^2\\ s.a\quad & x\leq 1+2(1-\alpha)\\ & x\geq 0.\end{aligned}\tag{13}$$

Usando as condiçõs de otimalidade, a solução ótima paramétrica obtida para o problema quadrático paramétrico primal é $x^* = 3 - 2\alpha$, *onde* $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$. *Logo, o conjunto de soluções satisfatórias para os diferentes valores de* α*-corte está dentro do intervalo* $[1,2]$, *sendo que os valores da função objetivo estão dentro do intervalo* $\left[\frac{3}{2},2\right]$. *A solução ótima encontrada em (Bector & Chandra 2005) é o par ordenado* $(x^*,\alpha^*) = (1,1)$, *a qual está incluída no conjunto de soluções satisfatórias da abordagem paramétrica.*

Aplicando a abordagem dual descrita na seção anterior no Problema (13), temos

$$\begin{aligned} \min \quad & \phi(\lambda) = \tfrac{1}{2}(\lambda+2)^2 - \lambda(1+2(1-\alpha)) \\ s.a \quad & \lambda \leq 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Aplicando novamente as condições de otimalidade, a solução ótima paramétrica para o problema de programação quadrática paramétrica dual é $\lambda^* = 1 - 2\alpha$, *onde* $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$. *Logo, o conjunto de soluções satisfatórias para os diferentes valores de* α*-corte está definido no mesmo intervalo das soluções do problema primal, juntamente com os valores da função objetivo. Diante desses valores obtidos, mostramos que as soluções primal e dual de um problema convexo não apresenta gap de dualidade e atende ao Teorema 1. No entanto, usamos o valor da violação máxima igual a 3 na restrição, como descrito em (Bector & Chandra 2005), obtemos o mesmo intervalo para o conjunto de soluções satifatórias e os valores da funçao objetivo, mas o intervalo de* α *muda para* $\left[\frac{2}{3},1\right]$. *Essa solução ainda continua satisfazendo o Teorema 1, mas tem valores diferentes aos da abordagem descrita na Seção 2.*

Exemplo 2 *Considere o seguinte problema quadrático nebuloso primal, descrito em (Cruz et al. 2008), com imprecisão no conjunto de restrições como segue:*

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 + 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2 \\ s.a \quad & 4x_1 + 5x_2 \gtrsim 20 \\ & 5x_1 + 4x_2 \gtrsim 20 \\ & x_1 + x_2 \lesssim 30 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{15}$$

onde a tolerância máxima de cada restrição é dada pelo vetor $d = (2,1,3)^t$. *Então o Problema (15) pode ser reformulado como um problema de programação quadrática paramétrica da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 + 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2 \\ s.a \quad & 4x_1 + 5x_2 \geq 20 - 2(1-\alpha) \\ & 5x_1 + 4x_2 \geq 20 - (1-\alpha) \\ & x_1 + x_2 \leq 30 + (1-\alpha) \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \alpha \in (0,1] \end{aligned} \tag{16}$$

onde a matrix simétrica $Q = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, *o vetor de custos* $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, *a matriz de coeficientes* $A = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -4 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *e o vetor do termo independente* $b = \begin{pmatrix} -20 \\ -20 \\ 30 \end{pmatrix}$. *Aplicando a abordagem dual* *descrita na seção anterior no Problema (16), temos*

$$\begin{aligned} \max \quad & \phi(u) = -\frac{17}{8}\lambda^2 + \frac{85}{4}\lambda + \alpha\lambda + \frac{1}{4} \\ s.a \quad & \lambda \geq 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Resolvendo esses probelmas paramétricos primal e dual, as soluções ótimas, que atendem as condições de otimalidade clássicas, são $x = \left(\frac{16+\alpha}{17}, \frac{243+12\alpha}{68}\right)^t$ *do problema primal e* $\lambda = \frac{85+4\alpha}{17}$ *do problema dual, para qualquer valor de* $\alpha \in [0,1]$. *A tabela abaixo é formada por diferentes valores de* α *aplicados nas duas soluções ótimas obtidas.*

α	x_1	x_2	Solução Primal	λ	Solução Dual
0,0	0,9412	3,5735	47,9926	4,7647	47,9926
0,1	0,9471	3,5912	48,4703	4.7882	48,4703
0,2	0,9529	3,6088	48,9503	4.8118	48,9503
0,3	0,9588	3,6265	49,4326	4.8353	49,4326
0,4	0,9647	3,6441	49,9174	4.8588	49,9174
0,5	0,9706	3,6618	50,4044	4.8824	50,4044
0,6	0,9765	3,6794	50,8938	4.9059	50,8938
0,7	0,9824	3,6971	51,3856	4.9294	51,3856
0,8	0,9882	3,7147	51,8797	4.9529	51,8797
0,9	0,9941	3,7324	52,3762	4.9765	52,3762
1,0	1,0000	3,7500	52,8750	5.0000	52,8750

Os exemplos numéricos usados nesse trabalho são simples, mas são úteis para mostrar passo a passo o funcionamento da abordagem dual proposta nesse trabalho. Outro ponto importate está no fato que a solução nebulosa do problema de programação quadrática nebulosa dual obtem o mesmo valor que a solução nebulosa do problema primal. Elas também atendem ao Teorema 1, mas não pode-se comparar com a solução obtida em (Bector & Chandra 2005) porque usam enfoques muito diferentes. Uma vantagem está no fato dessa nova abordagem usar somente uma variável de decisão, enquanto a formulação, descrita na Seção 2, usa duas variáveis. Outro ponto interessante está no fato que a abordagem proposta neste trabalho fortalece a idéia que problemas convexos no ambiente nebuloso tem também a mesma solução tanto no caso primal quanto dual.

5 Conlusão

Visto que os problemas de programação quadrática são muito importantes tanto na área teórica como prática e as imprecisões presentes nos problemas do mundo real, este trabalho apresentou uma nova e functional abordagem dual para resolver problemas de programação quadrática em um ambiente nebuloso, onde a imprecisão está presente na relação de ordem do conjunto de restrições. Essa abordagem dual foi validada resolvendo dois exemplos teóricos e as soluções nebulosas duais obtidas são iguais as obtidas pelo enfoque primal. Essas soluções ajudam os autores primeiramente a seguirem nessa linha de pesquisa e tentar resolver problemas práticos da vida real e de maior escala. Em comparação à abordagem dual apresentada na Seção 2, a abordagem dual proposta satisfaz ao teorema de dualidade fraca e também utiliza um número menor de variáveis de decisão.

Um algoritmo tem um processo iterativo que produz uma seqüência de pontos de acordo com um conjunto predeterminado de instruções, juntamente com um critério de parada. Geralmente nós olhamos para uma sequência que converge para uma solução óptima, mas em muitos casos, no entanto, podem ser satisfeitas por soluções menos favoráveis. Como é evidente, imprecisões podem ser introduzidas em ambos os pontos, não assumí-las somente como inerente ao problema, mas como a ajuda para a obtenção, de forma mais eficaz, uma solução para satisfazer os desejos do decisor. Isto é significado de modo que o decisor pode estar mais confortável quando obtem uma solução expressa em termos de satisfação, em vez de otimização, como é o caso quando as regras nebulosas são aplicadas aos processos de controle.

Agradecimentos

Os autores querem agradecer ao suporte financeiro fornecido pelo CNPq referente ao número de processo 151355/2009-6.

Referências

Bector, C. R. & Chandra, S. (2005). *Fuzzy mathematical programming and fuzzy matrix games*, Vol. 169 of *Series in Fuzziness and Soft Computing*, Springer, Berlin, Germany.

Bellman, R. E. & Zadeh, L. A. (1970). Decision-marking in a fuzzy environment, *Management Science* **17**(4): B141–B164.

Cruz, C., Silva, R. C., Verdegay, J. L. & Yamakami, A. (2008c). A survey of fuzzy quadratic programming. Submetido ao periódico Recent Patent on Computer Science.

Delgado, M., Kacprzyk, J. L., Verdegay, J. L. & Vila, M. A. (eds) (1994). *Fuzzy optimization: recent advances*, Physica-Verlag, New York.

Dubois, D. & Prade, H. (1980). *Fuzzy sets and systems: Theory and Application*, Academic Press, San Diego.

Floudas, C. A., Pardalos, P., C, A., Esposito, W. R., Gümüs, Z. H., Harding, S. T., Klepeis, J. L., Meyer, C. A. &Shweiger, C. A. (1999). *Handbook of test problems in local and global optimization*, Vol. 33 of *Nonconvex Optimization and its Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Hock, W. & Schittkowski, K. (1981). *Test examples for nonlinear programming condes*, Vol. 187 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer-Verlag.

Inuiguchi, M. & Ramik, J. & Tanino, T. & Vlach, M. (2003). Satisficing solutions a duality in interval and fuzzy linear programming, *Fuzzy Sets and Systems* **135**: 151–177.

Izmailov, A. & Solodov, M. (2005). *Otimização: condições de otimalidade, elementos de análise convexa e de dualidade*, Vol. 1, IMPA, Rio de Janeiro, Brasil.

Lai, Y. J. & Hwang, C. L. (1992). *Fuzzy mathematical programming: methods and applications*, Vol. 394 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer-Verlag, Berling,Germany.

Negoita, C. V. & Ralescu, D. A. (1975). *Applications of fuzzy sets to systems analysis*, Birkauser Springer, Stuttgard,Germany.

Pedrycs, W. & Gomide, F. (1998). *An Introduction of Fuzzy Sets: Analisys and Design*, MIT Press, Cambrigde,UK.

Poole, D., Mackworth, A. & Goebel, R. (1998). *Computational intenlligence: A logical approach*, Oxford University Press, Oxford,UK.

Rödder, W. & Zimmermann, H. J. (1980). Duality in fuzzy linear programming, *in* A.V.Fiacco & K.O.Kortanek (eds), *Extremal Methods and Systems Analysis*, New York, pp. 415–429.

Russel, S. J. & Norvig, P. (2003). *Artificial intelligence: A modern approach*, second edn, Prentice Hall, Upper Saddle River, USA.

Schittkowski, K. (1987). *More test examples for nonlinear programming condes*, Vol. 282 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer-Verlag.

Silva, R. C. (2005). *Contribuições ao estudo de programação não-linear com incertezas*, Master's thesis, FEEC - UNICAMP, Campinas,BRA.

Silva, R. C., Verdegay, J. L. & Yamakami, A. (2007). Two-phase method to solve fuzzy quadratic programming problem, *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, London,UK, pp. 1–6.

Verdegay, J. L. (1984). A dual approach to solve the fuzzy linear programming problem, *Fuzzy Sets and Systems* **14**: 131–141.

Verdegay, J. L., Yager, R. R. & Bonissone, P. P. (2008). On heuristic as a fundamental constituent of soft computing, *Fuzzy Sets and Systems* **159**(7): 846–855.

Wu, H. C. (2003a). Duality theorems in fuzzy mathematical programming problems based on the concept of necessity, *Fuzzy Sets and Systems* **139**: 363–377.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets, *Information and Control* **8**: 338–353.

Zadeh, L. A. (1994). Soft computing and fuzzy logic, *IEEE Software* **11**(6): 48–56.

Zadeh, L. A. (2001). A new direction in AI: Toward a computational theory of perceptions, *AI Magazine* **22**(1): 73–84.

Zimmermann, H. J. (1996). *Fuzzy set theory-and its applications*, third edn, Kluwer Academic Publishers, Massachusetts.