

## COMPARAÇÃO DE MODELOS EXATOS PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE ROTEIRIZAÇÃO DE VEÍCULOS COM JANELAS DE TEMPO

**Orivalde Soares da Silva Júnior**

Departamento de Engenharia de Produção – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro  
Rua Marquês de São Vicente, 225, Gávea - Rio de Janeiro, RJ - Brasil - 22451-900  
orivalde@yahoo.com.br

**Sílvia Hamacher**

Departamento de Engenharia de Produção – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro  
Rua Marquês de São Vicente, 225, Gávea - Rio de Janeiro, RJ - Brasil - 22451-900  
hamacher@puc-rio.br

### RESUMO

O problema de roteirização de veículos com janelas de tempo (*Vehicle Routing Problem with Time Windows - VRPTW*) tem sido amplamente estudado nas últimas décadas devido à sua aplicação prática como ferramenta de apoio à logística e transportes. Neste problema, os clientes são atendidos pelos veículos dentro dos intervalos de tempo permitidos, denominados janelas de tempo, e respeitando as restrições de capacidade dos veículos. Para solucionar este problema, foi proposto um modelo de programação linear inteira mista, o qual foi modelado e resolvido através dos softwares AIMMS e CPLEX e testado com problemas *benchmark* da literatura. Uma segunda abordagem para eliminação de sub-rotas foi analisada. Ela permitiu uma convergência para a solução ótima com um número menor de iterações. Porém, não apresentou eficiência quanto ao tempo computacional ao resolver problemas com janelas de tempo mais largas.

**Palavras-chave:** Roteirização de Veículos com Janelas de Tempo; Programação Matemática; VRPTW.

### ABSTRACT

The vehicle routing problem with time windows (VRPTW) has been widely studied in recent decades due to its practical application as a tool to support the transport and logistics. In this problem, customers are served by vehicles within the range of time allowed, called time windows, and respecting the constraint of vehicle capacity. To solve this problem, we propose a mixed integer linear programming model, which was modeled and solved through AIMMS and CPLEX software, using benchmark problems from literature. A new approach to eliminating sub-routes was analyzed. This approach allowed a convergence to the optimal solution with less iteration. However, it was not efficient regarding computational time to solve problems with wider time windows.

**Keywords:** Vehicle Routing Problem with Time Windows; Mathematical Programming; VRPTW.

## 1. Introdução

O problema de roteirização de veículos com janelas de tempo (*Vehicle Routing Problem with Time Windows - VRPTW*) tem sido amplamente estudado nas últimas décadas. Neste problema, cada cliente possui um intervalo de tempo durante o qual deve ser servido pelas rotas. Cada intervalo de tempo consiste em uma hora de início de atendimento e uma hora de fim. Outra restrição deste problema é a capacidade dos veículos, que não deve ser excedida. Diversos modelos para a representação do VRPTW, englobando formulações exatas, por meta-heurísticas e por heurísticas, podem ser encontradas na literatura. Desaulniers et al. (2002), Bräysy e Gendreau (2005a) e (2005b) propõem uma extensa revisão destes modelos.

No contexto das formulações exatas do VRPTW, diversas formulações para as restrições de eliminação de sub-rotas têm sido propostas. Duas destas formulações são analisadas neste trabalho. A primeira, proposta por Kohl et al. (1999) foi inspirada nas restrições propostas por Dantzig et al. (1954) para o Problema do Caixeiro Viajante (*Travelling Salesman Problem - TSP*). A segunda, proposta por Desrochers e Laporte (1991), foi baseada nas restrições propostas por Tucker em 1960 (Miller, et al., 1960) para o TSP.

O objetivo deste artigo é modelar o problema de roteirização de veículos com janelas de tempo (*Vehicle Routing Problem with Time Windows - VRPTW*) como um problema de programação linear inteira mista com uso do software de modelagem matemática AIMMS e analisar o desempenho da formulação das restrições de eliminação de sub-rotas de Kohl et al. (1999), comparando-o posteriormente com a formulação de Desrochers e Laporte (1991).

O trabalho está organizado como se segue. Na seção 2, apresenta-se a definição do problema. Na seção 3, propõe-se um modelo matemático proposto para o VRPTW, que é validado através da resolução de problemas conhecidos da literatura internacional, usados como benchmarking. Na seção 4, apresenta-se uma comparação de modelos exatos para solução do VRPTW, na qual são avaliadas as abordagens de eliminação de sub-rotas. Finalmente, na seção 5 são tecidas as principais conclusões do trabalho.

## 2. Definição do Problema

O VRPTW pode ser descrito por um grafo  $G(N,A)$ , onde  $N$  é um conjunto contendo todos os nós, e  $A$  é um conjunto contendo todas as arestas. Os nós representam os clientes e o depósito, os quais são acessados através dos índices  $i$  ou  $j$ . O depósito de onde partirão as rotas usualmente é representado pelo nó com índice 0. As arestas representam os caminhos que ligam estes nós e são acessadas através do par ordenado  $ij$ . Considera-se o grafo como sendo completo, o que não representa de forma alguma uma redução da dificuldade do problema. Cada aresta  $ij$  possui um custo  $c_{ij}$  associado. Este custo é, usualmente, o comprimento de cada arco. No caso do VRPTW, este custo será o tempo necessário para se percorrer cada aresta.

No depósito, existem  $M$  veículos à disposição, cada um com uma capacidade  $cap$ . Cada cliente  $i$  possui uma demanda  $d_i$  associada, bem como um tempo de serviço  $s_i$ . Além disso, cada cliente possui também sua janela de tempo, durante a qual deverá ser servido. Esta janela é dada por  $[b_i, e_i]$ , sendo que  $b_i$  representa o horário de início do atendimento e  $e_i$  a hora limite para que um carro chegue ao cliente para ser atendido. O depósito possui demanda zero e tempo de serviço zero, e sua janela de tempo se estende desde a hora zero até uma hora grande o suficiente para que um veículo retorne de qualquer cliente que esteja atendendo.

O objetivo do problema é encontrar rotas de tempo total mínimo que atendam todos os clientes, respeitando as restrições de capacidade dos veículos e das janelas de tempo. Além disso, deseja-se encontrar o número mínimo  $NV$  de veículos necessários para a realização da tarefa. Na literatura, é comum definir uma hierarquização de objetivos para este problema, na qual a minimização do número de veículos é mais importante que o custo variável das rotas. Para isto, devem ser associados custos aos veículos utilizados, assim como no trabalho de Cunha e Gualda (1999), que atribui para cada veículo, um custo unitário variável com a distância, um custo fixo diário total e um custo horário. No entanto, o modelo matemático a deste trabalho visa apenas a minimização do tempo total percorrido pelos veículos.

### 3. Modelo Matemático Proposto

O modelo matemático do VRPTW desenvolvido neste trabalho foi baseado nas restrições de eliminação de sub-rotas propostas por Kohl et al. (1999). Este modelo visa a minimização do tempo total de entrega de cargas, considerando as restrições de janelas de tempo e de capacidade dos veículos. As quantidades a serem transportadas são determinísticas e conhecidas a priori e todos os veículos possuem a mesma capacidade (frota homogênea).

Seja  $N$  o número de clientes a serem atendidos. Em cada cliente  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  deve ser realizada a entrega de produtos.

A cada cliente  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  estão associados:

- um tempo de atendimento  $s_i \geq 0$
- uma janela de tempo  $[a_i, b_i]$ ,  $a_i \leq b_i$ , que define, respectivamente, o horário mais cedo e o horário mais tarde em que pode ser iniciado o atendimento;
- uma quantidade  $q_i \geq 0$  de carga (ou de passageiros) a ser coletada ou entregue.

Os nós 0 e  $N+1$  representam, respectivamente, a base de saída e de chegada dos veículos (depósito). A cada um destes dois nós estão associados tempos de atendimento e demanda nulos e janelas de tempo que indicam os horários permitidos de saída e de chegada dos veículos às bases.

Para o atendimento dos  $N$  clientes dispõe-se de uma frota composta de  $NV$  veículos. Para cada veículo  $v$  da frota disponível,  $v = 1, 2, \dots, NV$  é definida uma capacidade máxima  $K$ .

A formulação matemática do VRPTW compreende as seguintes variáveis de decisão:

$$x_{ij}^v = \begin{cases} 1, & \text{se } j \text{ é atendido após } i \text{ pelo veículo } v \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1)$$

$T_i$  = horário de início de atendimento em  $i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$

O modelo matemático do VRPTW é apresentado a seguir:

$$(VRPTW) \min \sum_{v=1}^{NV} \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{N+1} c_{ij} x_{ij}^v \quad (2)$$

$$\sum_{v=1}^{NV} \sum_{j=1}^{N+1} x_{ij}^v = 1 \quad i = 0, 1, 2, \dots, N; i \neq j \quad (3)$$

$$\sum_{j=0}^{N+1} x_{0j}^v = 1 \quad v = 1, 2, \dots, NV \quad (4)$$

$$\sum_{i=0}^N x_{ij}^v - \sum_{i=1}^{N+1} x_{ji}^v = 0 \quad j = 1, N; v = 1, 2, \dots, NV \quad (5)$$

$$\sum_{i=0}^{N+1} x_{i,N+1}^v = 1 \quad v = 1, 2, \dots, NV \quad (6)$$

$$a_i \leq T_i \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

$$T_i + s_i + c_{ij} - T_j \leq (1 - x_{ij}^v) M_{ij} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, N; & j = 1, 2, \dots, N; \\ & j \neq i; & v = 1, 2, \dots, NV \end{matrix} \quad (8)$$

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^N q_j x_{ij}^v \leq K \quad v = 1, 2, \dots, NV \quad (9)$$

$$x_{ij}^v \in \{0, 1\} \quad i = 0, 1, 2, \dots, N; \quad j = 0, 1, 2, \dots, N + 1; \quad v = 1, 2, \dots, NV \quad (10)$$

A função objetivo (2) representa o tempo total a ser minimizado. As restrições (3) asseguram que cada cliente seja visitado uma única vez e por um único veículo; as restrições (4) asseguram que todo veículo inicie uma rota a partir do depósito; as restrições (5) impõem que todo veículo deve entrar e sair de um cliente; as restrições (6) impõem que todo veículo termine uma rota no depósito. Caso o veículo não seja utilizado, ele segue o caminho do arco direto ligando a base de partida (nó 0) à base de chegada (nó  $N+1$ ). As restrições (7) impõem que o horário de início de atendimento de cada nó ocorra dentro da sua respectiva janela de tempo. As restrições (8) estabelecem a relação entre o horário de partida do veículo a partir de um cliente e seu sucessor imediato, garantindo também a eliminação de sub-rotas. As restrições de capacidade de carga são dadas pela expressão (9). Por fim, as restrições (10) asseguram a integralidade da solução. As restrições (8) foram obtidas a partir da linearização das restrições originais não-lineares (11), a qual foi possível através da condição de integralidade pelas restrições (10). O valor da constante  $M_{ij}$  nas restrições pode ser substituído por  $\max(b_i + s_i + c_{ij} - a_i, 0)$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ .

$$x_{ij}^v (T_i + s_i + c_{ij} - T_j) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad j = 1, 2, \dots, N; \quad j \neq i; \quad v = 1, 2, \dots, NV \quad (11)$$

### 3.2. Validação do Modelo

A validação do modelo proposto foi realizada a partir da execução do modelo no AIMMS com os dados do problema exemplo chamado C101, que é um dos problemas propostos por Solomon (1987) para o VRPTW. Este problema possui 100 clientes e 20 veículos disponíveis, cada um com capacidade de carga de 200 unidades.

Para este problema o AIMMS gerou um modelo de programação linear e inteira mista (MIP) com 101101 variáveis, entre as quais 101000 são inteiras. O solver utilizado pelo AIMMS foi o CPLEX 11.2. A solução encontrada é a ótima, conforme pode ser observado em *Program Status*. O valor da função objetivo no ponto ótimo foi de 828,9, o qual foi confirmado também com o valor do problema obtido na literatura. O tempo de execução foi de 72,4 segundos. O computador utilizado possui um processador Intel Core 2 Quad 2.33GHz e 3GB de memória RAM, sob plataforma Windows XP.

Para validar a solução do problema, utilizou-se a ferramenta *Math Inspector* do AIMMS, a qual possibilita inspecionar os valores de todas as variáveis utilizadas no modelo. Através das variáveis  $X(i, j, v)$  com valor igual a um, ou seja, o cliente  $j$  é atendido após o cliente  $i$  pelo veículo  $v$ , pode ser identificada a rota que cada veículo deverá realizar. Uma representação visual das rotas obtidas para os 10 veículos é ilustrada pela figura 1. Esta representação em forma de rede também foi obtida através do AIMMS.

Ressalta-se que, apesar da abordagem de solução utilizada neste trabalho não ser competitiva com o "estado-da-arte" encontrado na literatura (Baldacci et al., 2010), é relevante por ser mais simples e por ser suficiente para realizar a comparação entre os modelos analisados.

### 3.3. Análise de Sensibilidade

Para efeitos de testes, realizou-se uma análise de sensibilidade com o objetivo de verificar o ganho, caso fosse alterado alguns parâmetros como a capacidade dos veículos, a janela de tempo dos clientes e o tempo de serviço. Esta análise fornece apoio à alteração dos parâmetros do problema ao demonstrar até quanto é cabível investir na alteração desejada.

3.3.1. Aumentando a capacidade dos veículos

Analisou-se o aumento da capacidade de todos os veículos do problema original, em 20%, 100% e 200%, e mesmo assim as soluções obtidas foram iguais à solução com a capacidade original. Isto ocorreu, pois foi necessário o mesmo número de veículos para não violar as restrições das janelas de tempo.

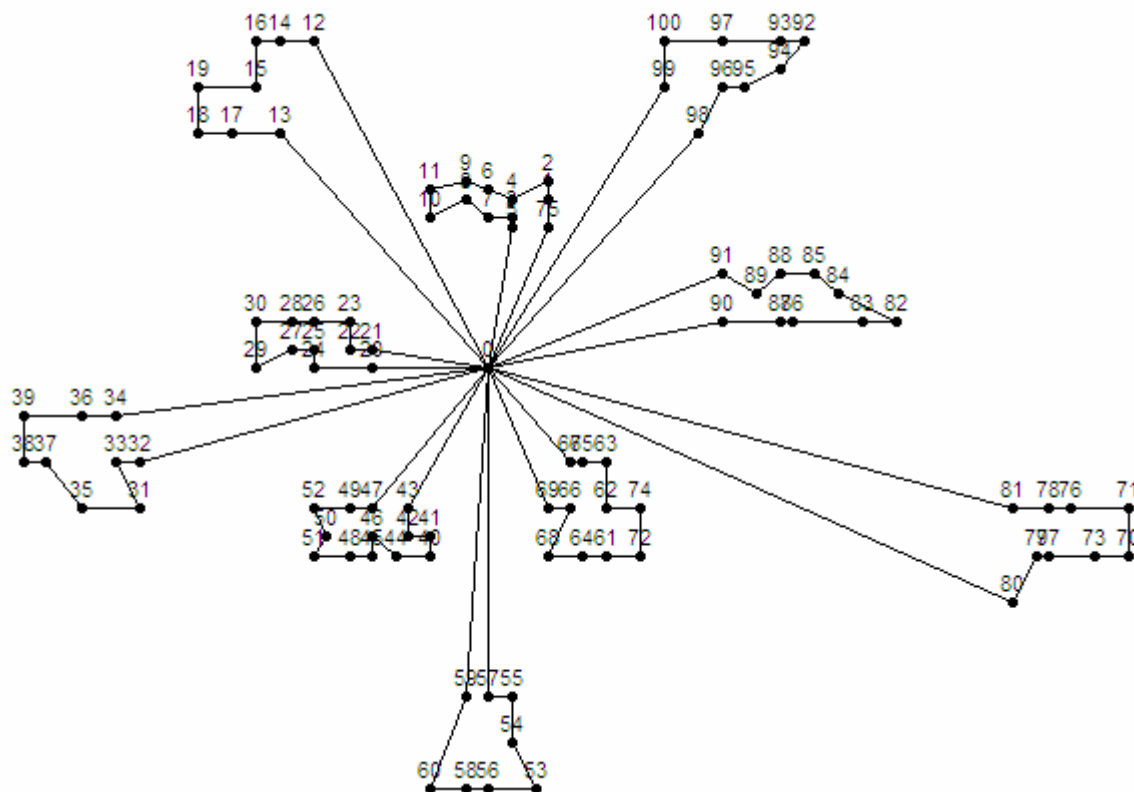


Figura 1: Rotas do problema exemplo C101 com 100 clientes

3.3.2. Aumentando a janela de tempo dos clientes

Analisou-se o aumento do tamanho das janelas de tempo dos clientes do problema original, em 20%, 100% e 200%. Verificou-se que a solução continua idêntica à solução original do problema com os aumentos de 20% e 100%, pois as janelas continuam estreitas e levam sempre à mesma solução. Já com o aumento de 200%, as janelas ficaram largas o suficiente para ser obtida uma solução com tempo total menor em 2% da solução original e utilizando o mesmo número de veículos.

3.3.3. Aumentando o tempo de serviço

O problema C101 apresentou grande sensibilidade com o aumento do tempo de serviço. Com um aumento a partir de 3% do tempo de serviço de todos os clientes, foi obtida uma solução com tempo total maior em 12% da solução original. Este comportamento mostra que no problema original, as janelas de tempo estão tão estreitas, que um pequeno aumento no tempo de serviço inviabiliza o atendimento pelo veículo que estava mais próximo ao cliente, conforme ilustram as figuras: 2 (a) com tempos de serviço originais e 2 (b) aumentando-os em 3%.

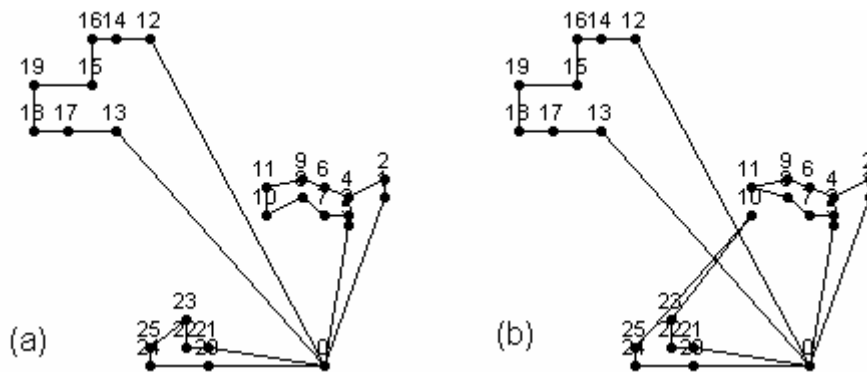


Figura 2: Rotas de 3 veículos do problema original (a) e do problema modificado (b)

**4. Avaliação das abordagens para eliminação de sub-rotas**

Dentre as duas abordagens propostas para as restrições de eliminação de sub-rotas citadas anteriormente, utilizou-se primeiramente as restrições (7), as quais foram obtidas através da linearização das restrições (11). Estas foram propostas por Kohl et al. (1999) e também são apresentadas nos trabalhos de Cunha e Gualda (1999) e Desaulniers et al. (2002).

A segunda abordagem, conforme a expressão (12), foi proposta por Desrochers e Laporte (1991). Outros autores como Araujo e Hamacher (2008) e Kallehauge (2008) utilizaram-se desta abordagem para solução do VRPTW.

$$T_i - T_j + (b_i + t_{ij} + s_i + a_i) \leq b_j - a_j \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad j = 1, 2, \dots, N; \quad j \neq i \quad (12)$$

Para efeitos de comparação, foram realizados testes computacionais no AIMMS utilizando primeiramente o modelo proposto, com as restrições (7) e em seguida, utilizando as restrições (12). Para isto, foram utilizados os problemas c101, c105 e c107 de Solomon com 100 clientes. Estes problemas possuem os mesmos dados das coordenadas, demanda e tempo de serviço dos clientes, variando apenas as janelas de tempo. Nos problemas c101 e c105, os tamanhos médios das janelas de tempo são, respectivamente, 60,76 e 121,61. Já no problema c107, todas as janelas de tempo possuem o mesmo tamanho, 180.

**4.1. Efeito sobre o número de iterações**

Conforme ilustra a figura 3, o número de iterações necessárias para obter a solução ótima dos três problemas utilizados foi relativamente maior utilizando as restrições (7) em comparação com o número de iterações utilizando as restrições (12). Este comportamento indica que as restrições (12) permitem uma convergência mais rápida do algoritmo para a solução ótima.

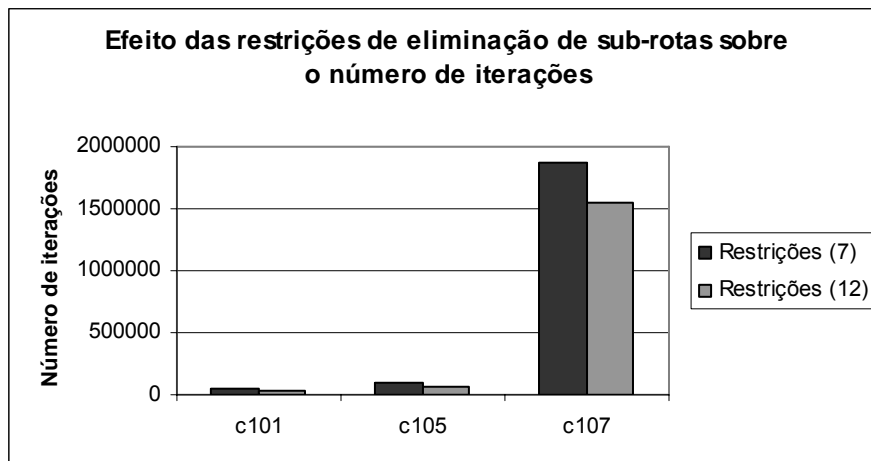


Figura 3: Efeito das restrições de eliminação de sub-rotas sobre o número de iterações

A figura 3 também ilustra a relação entre o tamanho das janelas de tempo e o número de iterações necessárias para obter a solução ótima. Para os problemas c101 e c105 que possuem janelas de tempo menores (mais estreitas), o número de iterações foi menor utilizando ambas as restrições (7) e (12). Já para o problema c107, com janelas de tempo maiores (mais abertas), o número de iterações foi maior.

#### 4.2. Efeito sobre o tempo computacional

Apesar das restrições (12) possibilitarem um número menor de iterações quando comparada com as restrições (7), foram necessários maiores tempos computacionais para obter a solução ótima para os problemas c101 e c107. Já para o problema c105, as restrições (12) permitiram uma redução tanto no número de iterações quanto no tempo computacional, conforme ilustra a figura 4.

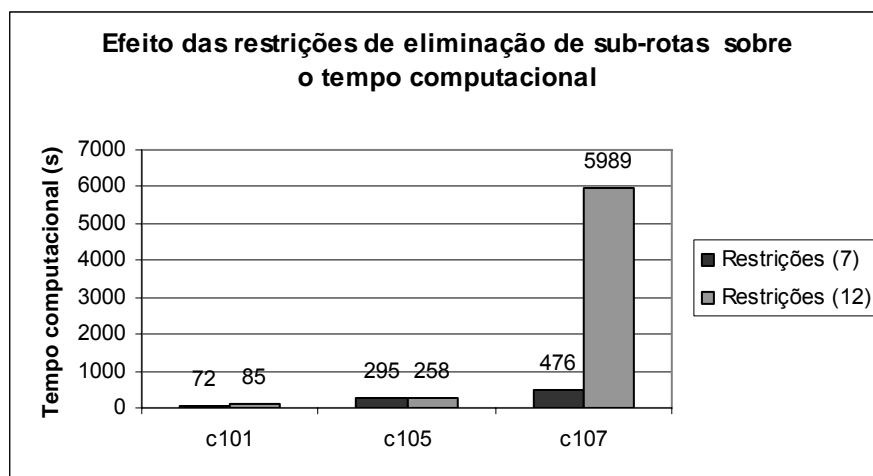


Figura 4: Efeito das restrições de eliminação de sub-rotas sobre o tempo computacional

Identificou-se também a relação entre o tamanho das janelas e o tempo computacional. Ao utilizar as restrições (7), o tempo computacional cresceu linearmente em função do tamanho das janelas de tempo. Utilizando as restrições (12), o tempo computacional cresceu polinomialmente em função do tamanho das janelas de tempo.

Sendo assim, as restrições (7) são mais indicadas para eliminação de sub-rotas no VRPTW, por possuírem um crescimento linear do tempo computacional em função do tamanho das janelas de tempo.

#### 5. Conclusões

Modelou-se com sucesso o problema de roteirização de veículos com janelas de tempo (VRPTW) como um problema de programação linear inteira mista utilizando o software de modelagem matemática AIMMS e otimizador CPLEX.

A modelagem no AIMMS mostrou-se ser bastante intuitiva devido à sua interface amigável. Uma das suas grandes vantagens é o desenvolvimento da modelagem simbólica, na qual é possível separar os dados do problema do modelo. Identificou-se também uma grande flexibilidade na modelagem, a qual pode ser realizada de diversas formas para um mesmo problema. Com o modelo em mãos, foi obtida inicialmente a solução ótima de uma instância do problema denominada C101, a qual possui 100 clientes. As soluções foram validadas através do *Math Inspector*, o qual permitiu verificar que as restrições de capacidade, janelas de tempo e de fluxo foram respeitadas.

Por fim, também foi avaliada uma nova abordagem para eliminação de sub-rotas do VRPTW. Podê-se observar que esta nova abordagem permite uma boa redução no número de iterações do otimizador. No entanto, esta abordagem não se comportou bem com janelas de tempo mais largas, pois foram necessários tempos computacionais bem maiores.

## 6. Referências

- AIMMS.** (2010) Disponível em < <http://www.aimms.com> > Acesso em: 10 abril 2010.
- Araujo, V.K.W.; Hamacher, S.** (2008) S. Avaliação de custos para a produção de biodiesel a partir de óleos residuais fritura. Rio de Janeiro. 97 p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- Baldacci, R., Bartolini, E.; Mingozzi, A; Roberti, R.** (2010). An exact solution framework for a broad class of vehicle routing problems. *Computational Management Science*, 7(3):229-268.
- Bräysy, O.; Gendreau, M.** (2005a). "Vehicle Routing Problem with Time Windows, Part I: Route Construction and Local Search Algorithms", *Transportation Science* 39, 104-118.
- Bräysy, O.; Gendreau, M.** (2005b). "Vehicle Routing Problem with Time Windows, Part II: Metaheuristics", *Transportation Science* 39, 119-139.
- Cunha, C. B; Gualda, N.D.F.** (1999). "Heurísticas baseadas em Relaxação Lagrangiana para o Problema de Roteirização de Veículos com Restrições Operacionais". In: Transporte em Transformação II – Trabalhos Vencedores do Prêmio CNT Produção Acadêmica 1997. Problemas e soluções dos transportes no Brasil. São Paulo: MAKRON Books. p.81-94.
- Dantzig, G.; Fulkerson, R.; Johnson, S.** (1954). Solution of a large-scale traveling-salesman problems. *Operations Research*;2:393-410.
- Desaulniers, G.; Desrosiers, J.; Solomon, M.M.; Soumis, F.; Cordeau, J.F.** (2002) "The VRP with Time Windows", *The Vehicle Routing Problem*, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, 9, P. Toth and D. Vigo (eds.), SIAM, Philadelphia, PA, 157-193.
- Desrochers, M.; Laporte, G.** (1991). Improvements and extensions to the Miller–Tucker–Zemlin subtour elimination constraints. *Operations Research Letters*;10:27-36.
- Kallehauge, B.** (2008). Formulations and exact algorithms for the vehicle routing problem with time windows, *Computers and Operations Research*, doi:10.1016/j.cor.2006.11.006.
- Kohl, N.; Desrosiers, J.; Madsen, O.B.G.; Solomon, M.M.; Soumis, F.** (1999). 2-path cuts for the vehicle routing problem with time windows. *Transportation Science*; 33:101-16.
- Miller, C.E.; Tucker, A.W.; Zemlin, R.A.** (1960). Integer programming formulation of traveling salesman problems. *Journal of the Association for Computing Machinery*;7:326-9.
- Solomon, M. M.** (1987). Algorithms for the Vehicle Routing and Scheduling Problems with Time Windows Constraints. *Operations Research*, 35, 2, 254-2.