

FAMÍLIAS DE GRAFOS NÃO HIPERENERGÉTICOS

Maria Aguietas A. de Freitas

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Av. Athos da Silveira Ramos 149, Centro de Tecnologia, Rio de Janeiro, RJ - Brasil
maguietas@im.ufrj.br

Andréa Soares Bonifácio

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
CCET - Avenida Pasteur, 458, Urca, Rio de Janeiro, Brasil
andreabonifacio@uniriotec.br

Cybele T. M. Vinagre

Universidade Federal Fluminense
Rua Mário Santos Braga s/n, Valonguinho, Niterói, Rio de Janeiro, Brasil
cybl@vm.uff.br

RESUMO

A *energia* de um grafo é a soma dos valores absolutos dos autovalores da sua matriz de adjacência. Grafos com energia superior à energia do grafo completo de mesma ordem são chamados *hiperenergéticos* e, em caso contrário, *não hiperenergéticos*. Muito recentemente, surgiram os conceitos de *grafo hipoenergético* e *fortemente hipoenergético*. Reunimos neste artigo os principais resultados da literatura sobre estes tópicos e apresentamos famílias de grafos não hiperenergéticos, hipoenergéticos e fortemente hipoenergéticos.

PALAVRAS CHAVE. Grafos não hiperenergéticos. Grafos hipoenergéticos. Grafos fortemente hipoenergéticos. Área de classificação principal: Teoria de Grafos.

ABSTRACT

The *energy* of a graph is the sum of the absolute values of the eigenvalues of its adjacency matrix. If the energy of a graph is greater than the energy of the complete graph of same order it is called *hyperenergetic graph*; otherwise, it is called *non-hyperenergetic graph*. Recently, the *hypoenergetic graphs* and the *strongly hypoenergetic graphs* were introduced in the literature. In this article, one can find the main results about all these kind of graphs. We also construct families of non-hyperenergetic graphs, of hypoenergetic graphs and of strongly hypoenergetic graphs.

KEYWORDS. Non-hyperenergetic graphs. Hypoenergetic graphs. Strongly hypoenergetic graphs. Main area: Graph Theory.

1. Introdução

Nesse trabalho vamos considerar $G = (V, E)$ um grafo simples de ordem $|G| = n$. A *matriz de adjacência* de G , $A(G) = [a_{ij}]$, é a matriz tal que $a_{ij} = 1$, se o vértice v_i é adjacente ao vértice v_j , e $a_{ij} = 0$ em caso contrário. O polinômio $P(G, \lambda) = \det(\lambda I - A)$ é chamado *polinômio característico* do grafo G e suas raízes são os autovalores de G , que formam o *espectro* de G . Um grafo G é *bipartido* quando seu conjunto de vértices V pode ser particionado em dois subconjuntos não vazios V_1 e V_2 , tais que toda aresta de G une um vértice de V_1 a outro de V_2 . O *complementar* \overline{G} de um grafo G é o grafo que tem $V(G)$ como seu conjunto de vértices, e no qual dois vértices são adjacentes se, e somente se, eles não são adjacentes em G .

A *energia* de um grafo G é definida como a soma dos valores absolutos dos autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de G , ou seja,

$$E(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$$

Este conceito foi introduzido por Gutman em 1978, e seu estudo tem despertado grande interesse, sobretudo entre matemáticos e químicos. Particularmente, em química teórica, o interesse surge do fato de que, para a maioria das moléculas de hidrocarbonetos conjugados, a energia total dos elétrons π , calculada pela Teoria de Hückel, coincide com o valor da energia do grafo que modela essas moléculas, veja Gutman (1978).

Um grafo com n vértices onde qualquer par de vértices distintos é adjacente é chamado *grafo completo* e denotado por K_n . Como o espectro de K_n é $[-1^{(n-1)}, n-1]$ (onde o expoente indica a multiplicidade algébrica), $E(K_n) = 2(n-1)$, para todo inteiro $n \geq 2$. Gutman (1978) conjecturou que, dentre todos os grafos com n vértices, o grafo completo K_n era aquele com energia máxima. Após esta conjectura ter sido invalidada por Gutman e Cvetković (1986), os seguintes conceitos foram introduzidos: um grafo G é dito *hiperenergético* quando $E(G) > 2(n-1)$, e *não hiperenergético* quando $E(G) \leq 2(n-1)$. Nikiforov (2007) mostrou que a maioria dos grafos são hiperenergéticos; por esse motivo, hoje em dia, a pesquisa sobre grafos hiperenergéticos não desperta interesse.

Gutman e Radenković (2007) chamaram de *hipoenergético* a um grafo conexo cuja energia é menor que o número de seus vértices. E muito recentemente So *et al.* (2010) chamaram de *grafo fortemente hipoenergético* a todo grafo G com n vértices tal que $E(G) < n-1$. Até agora, poucos resultados foram obtidos para grafos hipoenergéticos e fortemente hipoenergéticos, e em virtude do resultado de Nikiforov (2007), existem razões para se acreditar que não existam muitos de tais grafos.

Nosso objetivo principal é obter famílias de grafos não hiperenergéticos, hipoenergéticos e de grafos fortemente hipoenergéticos. Para isto, na Seção 2 apresentamos algumas operações em grafos que serão utilizadas para obter tais famílias. Na Seção 3, exibimos algumas famílias de grafos não hiperenergéticos e na Seção 4, apresentamos algumas famílias de grafos hipoenergéticos e fortemente hipoenergéticos.

2. Operações em grafos

Neste trabalho consideramos que G_1 e G_2 são grafos simples cujos conjuntos de vértices são V_1 e V_2 , respectivamente.

O *produto completo* (ou “*join*”) de G_1 e G_2 é o grafo denotado por $G_1 \vee G_2$ obtido unindo-se cada vértice de G_1 a cada vértice de G_2 . A Figura 1 mostra o *join* de C_4 , o ciclo com 4 vértices,

com K_2 .

Proposição 2.1 (Ramane e Walikar (2007)) *Para $i = 1, 2$, se G_i é um grafo com n_i vértices e regular de grau r_i então:*

$$E(G_1 \vee G_2) = E(G_1) + E(G_2) - (r_1 + r_2) + \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + 4(n_1 n_2 - r_1 r_2)}.$$

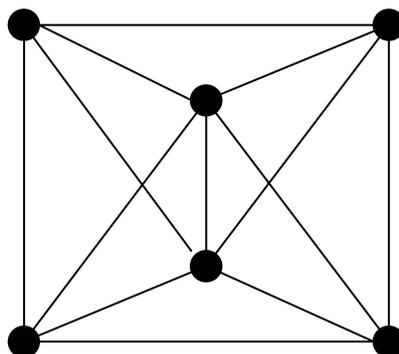


Figura 1. Grafo $C_4 \vee K_2$

Sejam G e H dois grafos com conjuntos de vértices disjuntos. Sejam $u \in V(G)$ e $v \in V(H)$. O grafo $G_u \circ H_v$, chamado de *coalescência de G e H com respeito a u e v* , é construído a partir de cópias de G e H , identificando os vértices u e v .

O *produto hierárquico* $G_2 \Delta G_1$ de dois grafos G_1 e G_2 , em que são escolhidos vértices-raiz rotulados como 0 , é definido como o grafo cujo conjunto de vértices é $V = V_2 \times V_1$ e onde dois vértices (u_2, u_1) e (v_2, v_1) são adjacentes se, e somente se, $u_2 = v_2$ e u_1 é adjacente a v_1 em G_1 , ou $u_1 = v_1 = 0$ e u_2 é adjacente a v_2 em G_2 . Notemos que esta definição depende da raiz especificada em G_1 . A Figura 2 mostra o produto hierárquico de C_4 com K_3 .

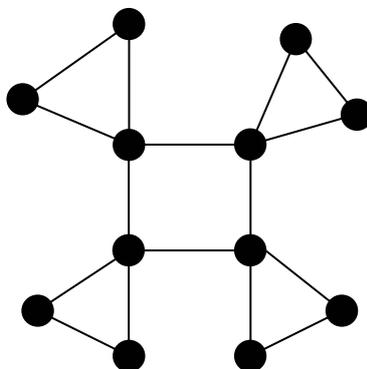


Figura 2. $C_4 \Delta K_3$.

Observação 1: *Se u é a raiz de H , o produto hierárquico $G \Delta H$ pode ser obtido através de uma*

sequência de coalescências. De fato, se $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ consideremos

$$G^0 = G, G^1 = G_{v_1} \circ H_u, G^2 = G_{v_2}^1 \circ H_u, \dots, G^n = G_{v_n}^{n-1} \circ H_u = G\Delta H.$$

A Figura 3 representa uma sequência de coalescências para se obter $C_4\Delta K_3$.

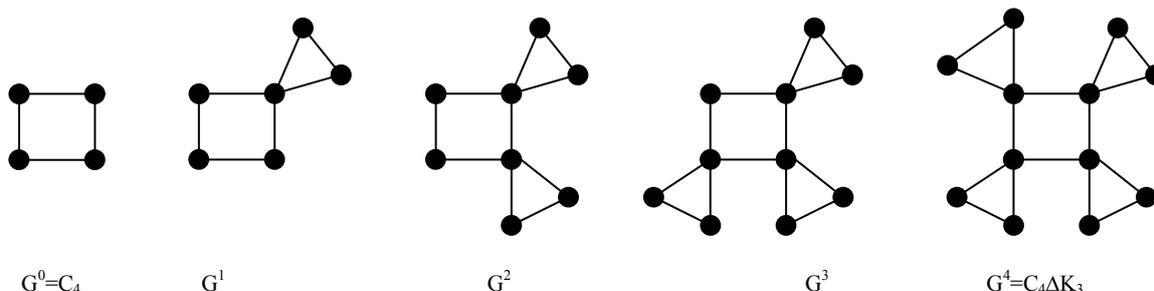


Figura 3.

3. Grafos não hiperenergéticos

Gutman e Pavlović (1999) estudaram a energia de certos grafos com muitas arestas. Eles definiram os seguintes tipos de grafos: os grafos $Ka_n(k)$, que são aqueles obtidos de K_n eliminando-se k arestas incidentes em um mesmo vértice; os grafos $Kb_n(k)$, que são aqueles obtidos de K_n por eliminação de k arestas independentes, isto é, arestas que, duas a duas, não incidem em um mesmo vértice; os do tipo $Kc_n(k)$, que são os grafos resultantes da retirada de todas as arestas de uma k -clique de K_n , onde $k < n$, e os grafos $Kd_n(k)$, que são obtidos pela eliminação das arestas de um k -ciclo em K_n . Eles mostraram que, na maioria dos casos, os grafos $Ka_n(k)$ são hiperenergéticos, os grafos $Kb_n(k)$ e $Kc_n(k)$ são não hiperenergéticos, e que grafos do tipo $Kd_n(k)$ tanto podem ser hiperenergéticos quanto não hiperenergéticos.

Um dos problemas que continua em aberto no estudo da energia de grafos é encontrar uma caracterização para os grafos não hiperenergéticos. O Teorema 3.1 estabelece uma condição sobre o número de arestas do grafo que é suficiente para que ele seja não hiperenergético.

Teorema 3.1. (Gutman *et al.*(2000)) *Se G é um grafo com n vértices e m arestas tal que $m < 2(n-1)$, então G é não hiperenergético.*

Nesta seção exibimos algumas famílias de grafos não hiperenergéticos, com muitas arestas e que não pertencem a nenhum dos tipos estudados por Gutman e Pavlović (1999). Estas famílias confirmam que a condição do Teorema 3.1 é apenas suficiente.

Sejam a, x e y números naturais e seja $p = ay$. Consideremos $G(a, y, x)$ o grafo com $a(y + x)$ vértices formado da seguinte maneira: particionemos os vértices de K_p em a conjuntos disjuntos V_1, \dots, V_a de mesma cardinalidade y . Agora consideremos a conjuntos de vértices T_1, \dots, T_a , dois a dois disjuntos e de mesma cardinalidade x . O grafo $G(a, y, x)$ é obtido a partir de $K_p \cup T_1 \cup \dots \cup T_a$ pela adição de todas as possíveis arestas entre V_i e T_i , para cada $i = 1, \dots, a$. Os grafos $G(a, y, x)$ são *split* birregulares. Eles foram estudados por Kirkland *et al.* (2010), que construíram, a partir deles, uma família de grafos *split* não *threshold* e laplacianos integrais. Abreu *et al.* (2010) determinaram o espectro dos grafos $G(a, y, x)$, como vemos na Proposição 3.2.

Proposição 3.2. Para todos os naturais a, x e y , o espectro do grafo $G(a, y, x)$ é dado por

$$\left[\frac{ay - 1 \pm \sqrt{(ay - 1)^2 + 4xy}}{2}, \left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4xy}}{2} \right)^{(a-1)}, -1^{(a(y-1))}, 0^{(a(x-1))} \right],$$

onde os expoentes denotam as multiplicidades.

Prova: A matriz de adjacência A do grafo $G(a, y, x)$ pode ser representada na forma

$$A = \begin{bmatrix} I_a \otimes J_{yy} - I_a \otimes J_{yy} & I_a \otimes J_{yx} \\ I_a \otimes J_{xy} & 0 \end{bmatrix}$$

onde I_a denota a matriz identidade de ordem a , $J_{r,s}$ denota a matriz $r \times s$ que possui todas as entradas iguais a 1 e \otimes é o produto de Kronecker de matrizes.

Se $v \in \mathbb{R}^y$ é ortogonal ao vetor $\mathbf{1}_y$ e e_i é o i -ésimo vetor canônico de \mathbb{R}^a então o vetor $w_i = \begin{bmatrix} e_i \otimes v \\ 0 \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^{a(y+x)}$ é autovetor de A associado ao autovalor -1 . Se $u \in \mathbb{R}^x$ é ortogonal ao vetor $\mathbf{1}_x$ e e_i é o i -ésimo vetor canônico de \mathbb{R}^a então o vetor $z_i = \begin{bmatrix} 0 \\ e_i \otimes u \end{bmatrix}$ de \mathbb{R}^{2ay} é autovetor de A associado ao autovalor 0 . Assim, -1 é autovalor de A com multiplicidade $\geq a(y - 1)$ e 0 é autovalor de A com multiplicidade $\geq a(x - 1)$.

Agora, se $u, v \in \mathbb{R}^a$ então o vetor $w = \begin{bmatrix} u \otimes \mathbf{1}_y \\ v \otimes \mathbf{1}_x \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^{a(y+x)}$ é autovetor de A associado a um autovalor λ se e somente se $w' = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ de \mathbb{R}^{2a} é autovetor da matriz $M = \begin{bmatrix} yI_a - I_a & xI_a \\ yI_a & 0 \end{bmatrix}$ associado a um autovalor λ . Uma vez que os autovalores de M são $\frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4xy}}{2}$, com multiplicidade $a - 1$ cada um, e $\frac{ay - 1 \pm \sqrt{(ay - 1)^2 + 4xy}}{2}$, o resultado segue.

Proposição 3.3 Se $x = y$ ou $x = y + 1$, os grafos $G(a, y, x)$ são não hiperenergéticos.

Prova: Pela Proposição 3.2 é fácil ver que

$$E(G(a, y, x)) = a(y - 1) + (a - 1)\sqrt{1 + 4xy} + \sqrt{(ay - 1)^2 + 4xy}$$

Suponha que $x = y$.

$$\begin{aligned} E(G(a, y, y)) &= a(y - 1) + (a - 1)\sqrt{1 + 4y^2} + \sqrt{(ay - 1)^2 + 4y^2} \\ &\leq a(y - 1) + (a - 1)\sqrt{1 + 4y^2} + y + \sqrt{(ay - 1)^2 + 4y^2 + 4y(ay - 1)} \\ &= a(y - 1) + (a - 1)(2y + 1) + ay - 1 + 2y \\ &= 2(2ay - 1). \end{aligned}$$

O que mostra que o grafo $G(a, y, y)$ é não hiperenergético.

Agora suponha que $x = y + 1$.

$$\begin{aligned} E(G(a, y, y + 1)) &= a(y - 1) + (a - 1)\sqrt{1 + 4y^2 + 4y} + \sqrt{(ay - 1)^2 + 4y^2 + 4y} \\ &\leq a(y - 1) + (a - 1)\sqrt{1 + 4y^2 + 4y} + y + \sqrt{(ay - 1)^2 + 4y^2 + 4y(ay - 1)} \\ &= a(y - 1) + (a - 1)(2y + 1) + ay - 1 + 2y \\ &= 2(2ay - 1). \end{aligned}$$

◇

Note que para $ay \geq 9$, o número de arestas do grafo $G(a, y, y)$ é maior do que $2(2ay - 1)$. E para $ay \geq 7$, a quantidade de arestas do grafo $G(a, y, y + 1)$ é maior do que $4ay$. Isto confirma que a condição do Teorema 3.1 é apenas de suficiência.

Apresentamos agora, uma outra família de grafos não hiperenergéticos com muitas arestas, diferentes daqueles estudados por Gutman e Pavlović (1999).

Proposição 3.4 *Sejam G um grafo com n vértices e $K_{p,p}$ o grafo bipartido completo com $2p$ vértices. Se G é não hiperenergético e regular de grau r , com $r \geq n - p$, então $G \vee K_{p,p}$ é um grafo não hiperenergético com $n + 2p$ vértices.*

Prova: Sabe-se que $K_{p,p}$ é um grafo com $2p$ vértices tal que $E(K_{p,p}) = 2p$ (Cvetković et al. (1980)). Como G e $K_{p,p}$ são regulares de grau r e p , respectivamente, pela Proposição 2.1 temos $E(G \vee K_{p,p}) = E(G) + E(K_{p,p}) - (r + p) + \sqrt{(r + p)^2 + 4(2np - rp)}$. Por hipótese, $E(G) \leq 2(n - 1)$. Logo, $E(G \vee K_{p,p}) \leq 2(n + 2p - 1) - (r + 3p) + \sqrt{(r + p)^2 + 4(2np - rp)}$. Para que $G \vee K_{p,p}$ seja não hiperenergético basta que $\sqrt{(r + p)^2 + 4(2np - rp)} \leq r + 3p$. Mas é fácil verificar que a desigualdade $\sqrt{(r + p)^2 + 4(2np - rp)} \leq r + 3p$ é equivalente a $r \geq n - p$, o que prova o resultado. \diamond

É fácil verificar que para quaisquer $n, p \geq 2$, os grafos $G \vee K_{p,p}$ têm uma quantidade de arestas maior do que $2(n + 2p - 1)$.

Na Proposição 3.5, exibimos grafos $(n - p)$ -regulares não hiperenergéticos.

Proposição 3.5. *Para todo $j, p \in \mathbb{N}^*$, o grafo $G = \overline{jk_p}$, complementar de j cópias de K_p , tem ordem $n = jp$, é $(n - p)$ -regular e não hiperenergético.*

Prova: É claro que $|G| = n = jp$ e G é $(n - p)$ -regular. Os autovalores de $G = \overline{jk_p}$ são $-p^{(j-1)}, 0^{j(p-1)}, p(j-1)$ (Cvetković et al. (1980)). Logo, $E(G) = 2p(j-1) \leq 2(jp - 1)$ e, portanto, G é não hiperenergético. \diamond

4. Grafos hipoenergéticos

Um grafo com n vértices, cuja energia é menor do que n é chamado *hipoenergético*. Se sua energia é menor do que $n - 1$, o grafo é dito *fortemente hipoenergético*. Estes conceitos foram introduzidos por Gutman e Radenković (2007), e até agora poucos resultados são conhecidos (veja Gutman et al. (2008), Li e Ma (2009), You e Liu (2009) e Liu e Liu (2010)). A maioria desses artigos tratam de árvores hipoenergéticas. O artigo de You e Liu (2009) mostra a existência de grafos unicyclicos e bicyclicos hipoenergéticos. Gutman et al. (2008) obtiveram o seguinte resultado para árvores hipoenergéticas.

Teorema 4.1 (i) *Existem árvores hipoenergéticas de ordem n com grau máximo $\Delta \leq 3$ apenas para $n = 1, 3, 4, 7$;*

(ii) *Se $\Delta = 4$, então existem árvores hipoenergéticas para todo $n \geq 5$, tal que $n \equiv k \pmod{4}$, $k = 0, 1, 3$;*

(iii) Se $\Delta \geq 5$, então existem árvores hipoenergéticas para todo $n \geq \Delta + 1$.

Na Figura 4 temos as 4 árvores hipoenergéticas do item (i) do Teorema 4.1.

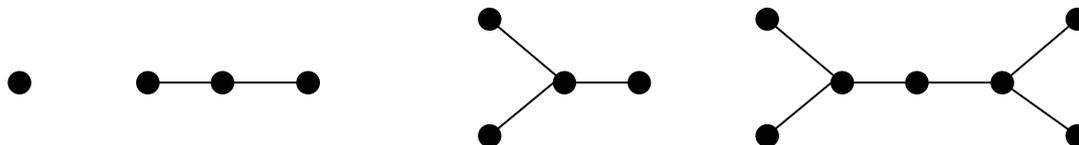


Figura 4. As únicas árvores hipoenergéticas com grau máximo menor ou igual a 3.

Existem razões para acreditar que existam poucos grafos hipoenergéticos, pois Nikiforov (2007) mostrou que a maioria dos grafos são hiperenergéticos. Nessa seção apresentamos famílias infinitas de grafos hipoenergéticos, que em geral não são árvores.

Antes de apresentarmos os nossos resultados, precisamos do seguinte resultado obtido por So *et al.* (2010):

Teorema 4.2. *Sejam G, H grafos e seja $G_u \circ H_v$ a coalescência dos grafos G e H com respeito aos vértices $u \in V(G)$ e $v \in V(H)$. Então*

$$E(G_u \circ H_v) \leq E(G) + E(H).$$

A igualdade é atingida se e somente se u é um vértice isolado de G ou v é um vértice isolado de H ou ambos.

Como consequência do Teorema 4.2 obtemos o seguinte resultado.

Proposição 4.3 *Sejam G e H dois grafos de ordens n e j , respectivamente. Para qualquer escolha de raiz em H ,*

$$E(G \Delta H) \leq E(G) + nE(H).$$

Prova: Em vista da Observação 1, existe uma sequência de coalescências $G^0 = G, G^1, \dots, G^n = G \Delta H$. Segue do Teorema 4.2, $E(G^i) \leq E(G) + iE(H)$, $1 \leq i \leq n$. Portanto, $E(G \Delta H) \leq E(G) + nE(H)$. \diamond

Corolário 4.4. *Sejam G e H dois grafos. Para qualquer escolha de raiz em H ,*

- (i) *Se G é hipoenergético e H fortemente hipoenergético então $G \Delta H$ é hipoenergético.*
- (ii) *Se G e H são fortemente hipoenergéticos então $G \Delta H$ também é fortemente hipoenergético.*

Prova: Suponha que $|G| = n$ e $|H| = j$.

- (i) Por hipótese, $E(G) < n$ e $E(H) < j - 1$. Segue da Proposição 4.3 que

$$\begin{aligned} E(G \Delta H) &\leq E(G) + nE(H) \\ &< n + n(j - 1) = nj = |G \Delta H|. \end{aligned}$$

- (ii) Por hipótese, $E(G) < n - 1$ e $E(H) < j - 1$. Segue da Proposição 4.3 que

$$\begin{aligned} E(G \Delta H) &\leq E(G) + nE(H) \\ &< n - 1 + n(j - 1) = nj - 1 = |G \Delta H| - 1. \quad \diamond \end{aligned}$$

Observação 2: (i) Para $n \geq 6$, a estrela com n vértices S_n é um grafo fortemente hipoenergético, pois $E(S_n) = 2\sqrt{n-1}$.

(ii) Para inteiros $n_1 \neq n_2$, o grafo bipartido completo K_{n_1, n_2} é hipoenergético. De fato, $E(K_{n_1, n_2}) = 2\sqrt{n_1 n_2}$. (Cvetković et al.(1980)). Mas, $2\sqrt{n_1 n_2} < n_1 + n_2$ se e somente se, $(n_1 - n_2)^2 > 0$.

Seja $G = (V_1 \cup V_2, E)$ um grafo bipartido tal que $|V_i| = n_i, i = 1, 2$. Rotulemos os vértices de G pondo $1, 2, \dots, n_1$ para os vértices em V_1 e $n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$ para os vértices em V_2 . Consideremos $G_1^{(r)}$ o grafo obtido de $r \geq 2$ cópias de G , identificando cada vértice em $V_1 = \{1, 2, \dots, n_1\}$ com cada uma de suas $r - 1$ cópias. Observe que $G_1^{(r)}$ é um grafo bipartido com $n_1 + r n_2$ vértices. Estes grafos foram estudados em Rojo e Medina (2008). Por convenção, $G_1^{(1)} = G$.

Teorema 4.5. (Rojo e Medina (2008)) *Seja G um grafo bipartido. Então $E(G_1^{(r)}) = \sqrt{r}E(G)$.*

Tendo em vista o resultado acima, obtemos:

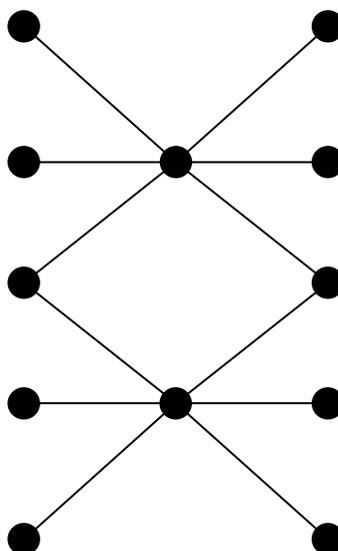
Proposição 4.6. *Seja $G = (V_1 \cup V_2, E)$ um grafo bipartido tal que $|V_i| = n_i, i = 1, 2$. Se G é hipoenergético e $n_1 \leq \sqrt{r}n_2$ então $G_1^{(r)}$ é hipoenergético.*

Prova: Se $r = 1$ então $G_1^{(r)} = G$, é hipoenergético. Se $r \geq 2$, observamos que $n_1 \leq \sqrt{r}n_2$ se e somente se, $\sqrt{r}(n_1 + n_2) \leq n_1 + r n_2$. Pelo Teorema 4.5, $E(G_1^{(r)}) = \sqrt{r}E(G)$. Como $E(G) < n_1 + n_2$, temos que $E(G_1^{(r)}) \leq \sqrt{r}(n_1 + n_2) \leq |G_1^{(r)}|$, se $n_1 \leq \sqrt{r}n_2$. ◊

Corolário 4.7. *Seja $G = (V_1 \cup V_2, E)$ um grafo bipartido tal que $|V_i| = n_i, i = 1, 2$. Se G é hipoenergético e $n_1 \leq n_2$, então $G_1^{(r)}$ é hipoenergético, para todo $r \in \mathbb{N}$.*

Prova: Segue imediatamente da Proposição 4.6. ◊

Exemplo: Seja W o quarto grafo da Figura 4. Notemos que W é bipartido, hipoenergético com $n_1 = 2$ e $n_2 = 5$. Logo, $\{W_1^{(r)} : r \in \mathbb{N}\}$ é uma família infinita de grafos hipoenergéticos. Se $r = 2$, o grafo $W_1^{(r)}$ é unicíclico. Se $r = 3$, $W_1^{(r)}$ é bicíclico, se $r = 4$, $W_1^{(r)}$ é tricíclico, e assim por diante. A Figura 5 mostra o grafo hipoenergético $W_1^{(2)}$.

Figura 5: $W_1^{(2)}$.

Agradecimento: A segunda autora agradece ao CNPq (Conselho Brasileiro para o Desenvolvimento Científico e Tecnológico) por todo o suporte recebido.

5. Referências.

- Abreu, N. M. M., Freitas, M. A. A., Del-Vecchio, R. R. e Vinagre, C.T.M.** (2010) Constructing infinite families on ALQ-integral graphs, submetido.
- Cvetković, D. M., Doob, D. e Sachs, H.**, Spectra of Graphs - Theory and Application, New York, Academic Press, 1980.
- Cvetković, D. M. e Gutman I.** (1986), The computer system Graph, A useful tool in chemical graph theory, *J. Serb. Chem.* 7 (5), 640-644.
- Gutman, I.** (1978), The energy of a graph, *Ber. Math. Statist. Sect. Forschungszentrum Graz.* 103, 1-22.
- Gutman, I., Hou, Y., Walikar, H., Ramane, H. e Hampiholi, P.** (2000) No Huckel graph is hyperenergetic, *J. Serb. Chem. Soc.*, 65(11), 799-801.
- Gutman, I., Li, X., Shi, Y. e Zhang, J.** (2009), Hypoenergetic trees, *Match Commun. Math. Comput. Chem.*, 60, 415-426.
- Gutman, I. e Pavlović, S.** (1999), The energy of some graphs with large number of edges, *Bull. Acad. Serbe Sci. Arts (cl. Math. Natur.)*, 118, 35-50.
- Gutman, I. e Radenković, S.** (2007), Hypoenergetic molecular graphs, *Indian J. Chem.*, 46A, 1733-1736.
- Kirkland, S., Freitas, M. A. A., Del-Vecchio, R. R. e Abreu, N. M. M.** (2010), Split non-threshold Laplacian integral graphs, *Linear and Multilinear Algebra*, 58, 221-233.
- Li, X e Ma, H** (2009), All hypoenergetic graphs with degree at most 3, *Linear Algebra and its Applications*, 431, 2127-2133.
- Liu, J e Liu, B** (2010), On a conjecture about the hypoenergetic trees, *Applied Mathematics Letters*, 23, 484-486.
- Nikiforov, V.** (2007), The energy of graphs and matrices, *J. Math. Appl.*, 326, 1472-1475.

- Ramane, H. S. e Walikar, H. B.** (2007), Construction of equienergetic graphs, *Match Commun. Math. Comput. Chem.*, 57, 203-210.
- Rojo, O. e Medina, L.** (2009), Constructing graphs with energy $\sqrt{r}E(G)$ where G is a bipartite graph, *Match Commun. Math. Comput. Chem.*, 62, 465-472.
- So, W., Robbiano, M., Abreu, N. M. M. e Gutman, I.** (2010), Applications of a theorem by Ky Fan in the theory of graph energy, *Linear Algebra and its Applications*, 432, 2163-2169.
- You, Z e Liu, B.** (2009), On hypoenergetic unicyclic and bicyclic graphs, *Match Commun. Math. Comput. Chem.*, 61, 479-486.
- You, Z, Liu, B e Gutman, I.** (2009), Note on hypoenergetic graphs, *Match Commun. Math. Comput. Chem.*, 62, 491-498.