SPREAD VERSUS NÚMERO CROMÁTICO DE UM GRAFO

Aroldo José de Oliveira
Universidade Federal de Mato Grosso - UFMT/Rondonópolis
Rodovia Rondonópolis-Guiratinga, KM 06 - Sagrada Família - MT
aroldojoliveira@gmail.com

Leonardo Silva de Lima
Centro Federal de Educação Tecnológica - CEFET
Av. Maracanã,229 - Maracanã - RJ
llima@cefet-rj.br

Nair Maria Maia de Abreu
Universidade Federal do Rio de Janeiro- COPPE- ufrj
Rua João Lira, 106/401- Leblon -RJ
nair@pep.ufrj.br

RESUMO

Seja G um grafo com n vértices. O spread de um grafo é o spread de sua matriz de adjacência $A(G)$ e consiste na diferença entre o seu maior e o menor autovalor. O número cromático de um grafo é dado pelo menor número de cores atribuídas aos vértices do grafo de modo que a vértices adjacentes sejam atribuídas cores distintas. Neste trabalho provamos que o número cromático é um limite inferior para o *spread* de um grafo, para grafos em determinadas classes e conjecturamos que o limite é válido no caso geral.

PALAVRAS CHAVE. *S*pread de um grafo. Número cromático. Matriz de adjacência. Área de Classificação (Teoria e Algoritmos em Grafos)

ABSTRACT

Let G be a graph on n vertices. The *spread* of a graph is the *spread* of the adjacency matrix $A(G)$ and its consists of the diference between the largest and smallest eigenvalues. The *chromatic number* of a graph is given by the minimum numbers of colors assigned to its vertices such that adjacent vertices have distinct colors. In this paper we prove that the *spread* is at lest the chromatic number of a graph, in certain classes of graphs and we conjecture that this bound holds in the general case.

KEYWORDS. *S*pread of a graph. Chromatic number. Adjacency matrix. Main Area (Theory and Algoritms in Graphs)

1. Introdução

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples (sem laços e sem arestas múltiplas), não-orientado, onde V representa o conjunto de seus vértices, $|V| = n$, e E, o conjunto de suas arestas, $|E| = m$. A *matriz de adjacência* de um grafo G, denotada por $A(G)$, é uma matriz de ordem n tal que $a_{ij} = 1$, se o vértice v_i é adjacente ao vértice v_j, e $a_{ij} = 0$, caso contrário. O *polinômio característico* de G, $p_G(\lambda)$, é o polinômio característico de sua matriz de adjacência, ou seja, é igual a $p_G(\lambda) = det(\lambda I - A(G))$. Como $A(G)$ é uma matriz simétrica, seus autovalores são números reais. Dizemos que λ é um *autovalor* de G se λ é raiz de $p_G(\lambda)$. Denominamos o conjunto das *n* raízes do $p_G(\lambda)$ de *espectro* de G. Supondo que $A(G)$ possui t autovalores distintos $\lambda_1 > \ldots > \lambda_t$, com multiplicidade algébrica respectivamente iguais a $m(\lambda_1), \ldots, m(\lambda_t)$, o *espectro de* G, é assim representado por

$$\text{spect}(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_t \\ m(\lambda_1) & \ldots & m(\lambda_t) \end{bmatrix}.$$

O maior autovalor de G é denominado *índice de* G e denotado por $ind(G)$. O *raio espectral* de um grafo G, denotado por $\rho(G)$, é o número real não negativo $\rho(G) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$, onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são os autovalores de G. Pelo Teorema de Perron-Frobenius, cuja a prova pode ser encontrada em Horn *et al* (1985), tem se que, se G é conexo, o raio espectral é o maior autovalor do grafo, coincide com o índice do grafo e tem multiplicidade igual a 1. Além disso, existe um autovetor associado ao raio espectral com todas as coordenadas não-negativas.

No caso geral da Teoria de Matrizes, dada uma matriz complexa A de ordem n, há interesse em se obter a máxima distância entre dois autovalores quaisquer da matriz A. Assim, se $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ são os autovalores de A, seu *spread*, denotado por $s(A)$, é definido por

$$s(A) = \underset{i,j}{max} |\lambda_i - \lambda_j|,$$

onde o máximo é tomado sobre todos os pares de autovalores de A. Assim, no caso particular da Teoria dos Grafos, o *spread* de G é tomado como o *spread* de sua matriz de adjacência $A(G)$, ou seja

$$s_A(G) = \lambda_1 - \lambda_n.$$

É conhecido por coloração de vértices de $G = (V, E)$ uma função $\varphi : V \to C$ definida do conjunto de vértices V para o conjunto C de cores. Uma coloração φ é *própria* se dois vértices adjacentes não recebem a mesma cor. Um grafo é $k-$*colorível*, se ele admite uma coloração própria de vértices que utiliza k cores. O *número cromático* de um grafo G, denotado por $\chi(G)$, é o menor inteiro não negativo k, tal que G é k-colorível. Assim, $\chi(G) = k$ se o grafo G é $k-$colorível, mas não é $(k-1)-$colorível.

O presente trabalho visa comparar o *spread* de um grafo com o número cromático do mesmo e foi motivado pelo artigo de Heuvel *et al* (2000), que abordaram o Problema de Atribuição de Frequência (PAF) via parâmetros espectrais de um grafo. Embora o artigo que nos motivou tenha tratado do PAF utilizando autovalores e autovetores da matriz laplaciana de um grafo, aqui pretendemos trabalhar com o espectro da matriz de adjacência.

No PAF o que se deseja é mimimizar ruidos ocasionados por interferência de frequências mal alocadas dentro de uma faixa específica, chamada *span* e denotado por $sp(G)$. Em verdade, o que se deseja é determinar o *span* mínimo de modo que as frequências das ondas de rádio sejam atribuídas sem causar ruídos. O PAF é considerado um problema NP-difícil, de grande importância e relevância teórica e prática, na área de rádio e telefonia, mas especificamente, em telefonia móvel. O PAF é visto como uma generalização do problema de coloração em grafos, onde os transmissores são representados pelos vértices do grafos e a inter-relação entre dois transmissores, pelas arestas. Em geral, são considerados grafos valorados. Quando o grafo é não valorado o *span* pode ser expresso em termos do número cromático pela seguinte relação

$$sp(G) = \chi(G) - 1. \tag{1}$$

Na tentativa de encontrar uma relação entre o spread $s_A(G)$ e o número cromático $\chi(G)$ de G, e, por conseguinte, uma relação com o span $sp(G)$ de G, uma vez que, para grafos não valorados, já se conhece a relação 1, geramos a seguinte conjectura com o auxílio do sistema Auto-Graphix (AGX) devido a Hansen *et al.* (2000):

Conjectura 1 *Se G é um grafo conexo, então*

$$s_A(G) \geq \chi(G). \tag{2}$$

Esta conjectura é reforçada e confirmada para grafos em diversas classes através dos resultados que obtivemos e estão aqui apresentados.

Para isso, este trabalho fica assim estruturado: Na Seção 2, reunimos resultados relacionados a grafos de determinadas classes em que são conhecidos os respectivos espectro e números cromáticos. Isto nos permitiu confimar a Conjectura 1 por cálculo direto entre os dois invariantes para os grafos das classes consideradas. Na Seção 3, decrevemos os principais resultados da literatura referentes ao *spread* de um grafo. Na Seção 4, exibimos várias classes de grafos onde provamos que a conjectura é satisfeita para os grafos das referidas famílias. Todos os casos considerados não só confirmam a conjectura como nos permitiram produzir resultados para grafos em que não são necessariamente conhecidos os respectivos espectros, como por exemplo, os grafos bipartidos.

2. Preliminares

Um grafo G é *determinado pelo seu espectro*, se para qualquer outro grafo H, tendo o mesmo espectro de G, H é necessariamente isormorfo a G. Grafos assim são referidos por (DE). Até o momento, existem poucas classes de grafos determinados pelo espectro. Para maiores detalhes sobre os grafos DE consulte o survey de Van Dam *et al* (2003). Na sequência, apresentamos alguns resultados bem conhecidos e úteis na determinação dos polinômios característicos de grafos pertencentes a determinadas classes. Para maiores detalhes, veja Cvetkovic *et al.* (1979) e Biggs (1993).

Proposição 1 *[Cvetkovic et al (1979)] Sejam G_1 e G_2 grafos dados. Se $G = G_1 + G_2$, então $p_G(\lambda) = p_{G_1}(\lambda).p_{G_2}(\lambda)$. No caso mais geral, se G_1,G_2,$\cdots$,G_k são as componentes conexas de um grafo G então*

$$p_G(\lambda) = p_{G_1}(\lambda).p_{G_2}(\lambda)\cdots p_{G_k}(\lambda).$$

Proposição 2 *[Cvetkovic et al (1979)] Se G é um grafo regular de grau k com n vértices então*

$$p_{\overline{G}}(\lambda) = (-1)^n \frac{\lambda - n + k + 1}{\lambda + k + 1} p_G(-\lambda - 1).$$

Proposição 3 *[Cvetkovic et al (1979)] Para $i \in \{1,2\}$, seja G_i um grafo regular de grau r_i com n_i vértices. Tem-se que o polinômio característico do join $G_1 \vee G_2$ é dado por*

$$p_{G_1 \vee G_2}(\lambda) = [(\lambda - r_1)(\lambda - r_2) - n_1 n_2] \frac{p_{G_1}(\lambda) p_{G_2}(\lambda)}{(\lambda - r_1)(\lambda - r_2)}.$$

Proposição 4 *[Biggs (1993)] Se* $(a_1 \;\; a_2 \;\; \dots \;\; a_n)$ *é a primeira linha da matriz de adjacência de um grafo circulante* G *então seus autovalores são* $\lambda_r = \Sigma_{j=1}^{n} a_j \cdot w^{(j-1)r}$ *, onde* $0 \leq r \leq n-1$ *e* $w = e^{\frac{2\pi i}{n}} = cos\frac{2\pi}{n} + i \cdot sen\frac{2\pi}{n}$.

Fazendo uso dos resultados anteriores, podemos exibir o espectro das seguintes classes de grafos:

1. O grafo nulo ou vazio G, é aquele com n vértices e sem nenhuma aresta, tem todos os *n* autovalores iguais a zero. Logo, seu polinômio característico é $p_G(\lambda) = \lambda^n$.

2. O grafo completo com *n* vértices K_n. Da Proposição 2, segue que seu polinômio característico é
$$p_{K_n}(\lambda) = (\lambda - n + 1)(\lambda + 1)^{n-1}. \tag{3}$$
Logo,
$$spect(K_n) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 \\ 1 & n-1 \end{bmatrix}.$$

3. Seja $G = sK_2$, o grafo formado pela união de s cópias de K_2. Então, G é $1-$ regular e possui $2s$ vértices. Usando o polinômio característico dado em (3) e a Proposição 1, obtemos $p_{sK_2}(\lambda) = \left(\lambda^2 - 1\right)^s$, ou seja,
$$spect(sK_2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ s & s \end{bmatrix}.$$

4. O complementar do grafo $G = sK_2$ é dado por $H_s = \overline{sK_2}$. Tal grafo é regular de grau $n-2$ e tem $n = 2s$ vértices. H_s é conhecido como cocktail-party graph. Da Proposição 2, seu polinômio característico é $p_{H_s}(\lambda) = (\lambda - 2s + 2).\lambda^s(\lambda + 2)^{s-1}$. Logo,
$$spect(H_s) = \begin{bmatrix} 2s-2 & 0 & -2 \\ 1 & s & s-1 \end{bmatrix}.$$

5. Seja $G = K_{n_1 n_2}$, o grafo bipartido completo. Este grafo resulta do *join* de dois grafos triviais G_1 e G_2 com n_1 e n_2 vértices respectivamente, ou seja, $K_{n_1 n_2} = G_1 \vee G_2$. Como $p_{G_1}(\lambda) = \lambda^{n_1}$ e $p_{G_2}(\lambda) = \lambda^{n_2}$, da Proposição 3, temos $p_{K_{n_1 n_2}}(\lambda) = (\lambda^2 - n_1 n_2).\lambda^{n_1 + n_2 - 2}$. Assim,
$$spect(K_{n_1 n_2}) = \begin{bmatrix} \sqrt{n_1 n_2} & 0 & -\sqrt{n_1 n_2} \\ 1 & n_1 + n_2 - 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Seja $G = C_n$, o ciclo de comprimento *n*. Da Proposição 4, os autovalores de C_n são da forma
$$\lambda_r = w^r + w^{(n-1)r} = w^r + w^{-r} = w^r + \overline{w^r} = 2Re(w^r) = 2cos\frac{2\pi r}{n},$$
onde w^r é a r-ésima raiz da unidade. Deste modo, temos:
$$spect(C_n) = \begin{cases} [2 \;\; (2cos\frac{2\pi}{n})^{(2)} \;\; \dots \;\; (2cos\frac{(n-2)\pi}{n})^{(2)} \;\; -2] & , n \text{ par} \\ [2 \;\; (2cos\frac{2\pi}{n})^{(2)} \;\; \dots \;\; (2cos\frac{(n-1)\pi}{n})^{(2)}] & , n \text{ ímpar.} \end{cases}$$

No caso geral, a determinação do número cromático de um grafo trata-se de um problema enquadrado entre aqueles da classe NP-difíceis, Garey *et al.* (1979). Apesar disso, há classes especiais em que os números cromáticos de seus grafos ou desigualdades que lhes dêem bons limites são conhecidos. No que segue, apresentamos resultados desta natureza e que podem ser encontrados em Cvetkovic *et al.* (1979), Gross *et al.* (2006) e Wilson (2002).

Proposição 5 *[Gross et al (2006)] Um grafo G tem $\chi(G) = 1$ se e somente se G é o grafo nulo, ou seja, n cópias de K_1.*

Proposição 6 *[Gross et al (2006)] Se G é o grafo completo K_n, então $\chi(K_n) = n$.*

Proposição 7 *[Gross et al (2006)] Se o grafo G é conexo, não completo e não é um ciclo ímpar, então*

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Proposição 8 *[Wilson (2002)] Para todo grafo G,*

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1,$$

onde $\omega(G)$ denota o número clique e $\Delta(G)$ o grau máximo de G.

Proposição 9 *[Gross et al (2006)] Seja H um subgrafo de um grafo G. Então $\chi(G) \geq \chi(H)$.*

Proposição 10 *[Gross et al (2006)] O join dos grafos G e H tem como número cromático a soma dos números cromáticos de cada grafo do join, ou seja,*

$$\chi(G \vee H) = \chi(G) + \chi(H)$$

Proposição 11 *[Gross et al (2006)] Se G é um grafo bipartido e $G \neq \overline{K_n}$ (grafo nulo), então $\chi(G) = 2$.*

Observação 1 *Segue da Proposição 11 que o caminho P_n, as árvores T_n, os ciclos de comprimento par C_{2n} e o grafo cubo Q_n, têm número cromático igual a 2. Ou seja, para $n \geq 2$,*

$$\chi(P_n) = \chi(T) = \chi(C_{2n}) = \chi(Q_n) = 2.$$

Proposição 12 *[Gross et al (2006)] Se G é um ciclo de comprimento ímpar então $\chi(C_{2n+1}) = 3$.*

E para finalizar esta seção, enunciaremos alguns resultados relativos ao maior λ_1 e ao menor λ_n autovalor de um grafo, que serão úteis no decorrer deste trabalho. Lembre-se que o maior autovalor é também conhecido como índice de G. Tais resultados podem ser encontrados em: Das *et al.* (2004), Gross *et al.* (2003) e Cvetković (1979).

1. **Proposição 13** *[Das et al (2004)] O índice de qualquer grafo conexo de ordem n é limitado inferiormente pelo índice do caminho P_n.*

$$\lambda_1(G) \geq \lambda_1(P_n) = 2cos(\frac{\pi}{n+1}).$$

2. **Proposição 14** *[Das et al (2004)] Se G é um grafo conexo unicíclico, então*

$$\lambda_1(G) \geq \lambda_1(C_n) = 2.$$

3. **Proposição 15** *[Gross et al (2003)] Para todo grafo G, tem-se que $\lambda_n \leq -1$. O valor -1 é atingido somente para o grafo K_n, $n \geq 2$.*

   Prova: A prova decorre dos Fatos 35 e 36 dados em Gross *et al* (2003).

4. **Proposição 16** *[Hoffman (1970)] Sejam λ_1 e λ_n o maior e o menor autovalor de um grafo G, então seu número cromático $\chi(G)$ satisfaz a desigualdade a seguir*

$$\chi(G) \geq \frac{\lambda_1}{-\lambda_n} + 1.$$

3. Resultados de Spread de um Grafo

Um dos primeiros pesquisadores a trabalhar com *spread* relativo à matriz adjacência de um grafo foi Petrović (1983). Neste artigo, ele apresenta os grafos cujo *spread* não excede 4, conforme resultado enunciado a seguir:

Proposição 17 *[Petrović (1983)] Seja G um grafo conexo. O* spread *de G é no máximo 4, ou seja, $s_A(G) \leq 4$ se, e somente se, G tem como subgrafo induzido um dos grafos da Figura 1.*

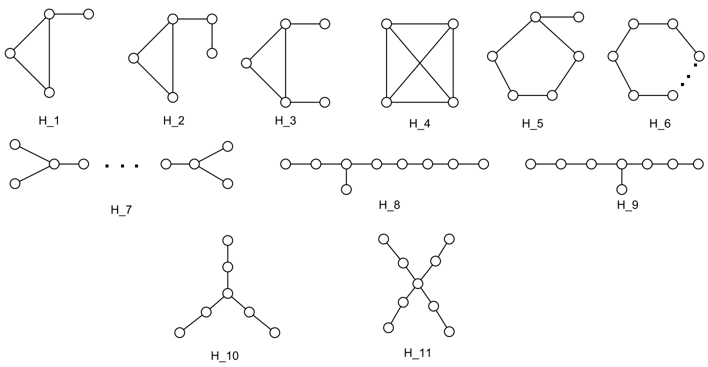

Figura 1: Grafos para os quais os subgrafos induzidos tem o $s_A(G) \leq 4$.

Gregory *et al*. (2001) apresentaram um limite superior para o spread do grafo G, envolvendo seu índice e seu número de arestas.

Proposição 18 *[Gregory et al (2001)] Para um grafo G com n vértices e m arestas,*

$$s_A(G) \leq \lambda_1 + \sqrt{2m - \lambda_1^2} \leq 2\sqrt{m}.$$

Se G não tem vértices isolados, então as igualdades são atigindas se, e somente se, $G = K_{a,b}$ para valores de a e b tais que $m = ab$ e $a + b \leq n$.

O problema de determinar quais são os grafos com o *spread* máximo dentre aqueles de mesma ordem é um problema difícil, Fan *et al*. (2008). No entanto, este problema continua ainda sendo interessante se restringirmos esta discussão para algumas classes especiais de grafos. Neste sentido, Gregory *et al*. (2001) apresentaram resultados relativos ao spread máximo e ao spread mínimo. Inicialmente, vamos rever aqui o caso de spread máximo para uma classe particular de grafos. Os autores apresentaram uma classe de grafos para os quais $s_A(G) > n$. Tal classe é formada pelos grafos $G(n, k) = K_k \vee \overline{K}_{n-k}$, com $1 \leq k \leq n - 1$. A Figura 2 ilustra os grafos para $n = 4$ e $k = 1, 2$ e 3 e a Figura 3 ilustra os grafos para $n = 5$ e $k = 1, 2, 3$ e 4.

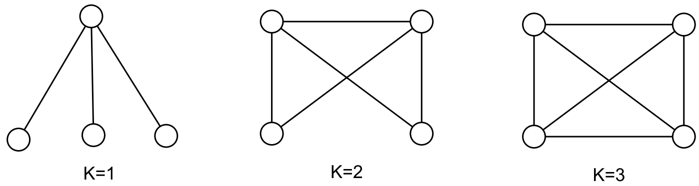

Figura 2: Todos os grafos $G(n, k)$ com *n*=4.

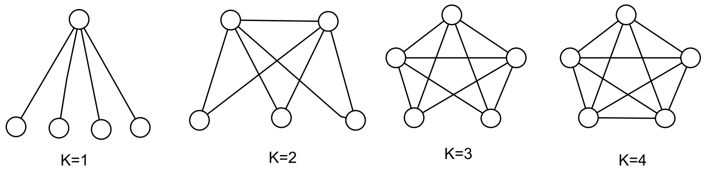

Figura 3: Todos os grafos $G(n, k)$ com *n*=5.

Usando a Proposição 3, podemos expressar o polinômio característico de $G(n, k)$ por

$$p_{G(n,k)}(\lambda) = \lambda^{n-k-1}(\lambda + 1)^{k-1}[\lambda^2 - (k-1)\lambda - k(n-k)].$$

Isto implica que

$$s_A(G(n, k)) = \sqrt{(k-1)^2 + 4k(n-k)}.$$

É fácil ver que $s_A(G(n, k)) > n$, quando $\frac{n+1}{3} < k < n - 1$. Além disso, prova-se que $s_A(G(n, k))$ atinge o máximo quando $k = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$. Baseando-se neste resultado Gregory *et al.* (2001) propuseram a seguinte conjectura:

Conjectura 2 *[Gregory et al (2001)] O* spread *máximo dentre todos os grafos conexos com* n *vértices é atingido para o grafo $G(n, \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor)$, ou seja, para o grafo*

$$K_{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor} \vee \overline{K}_{n - \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor}$$

De acordo com a Conjectura 2 o grafo da Figura 4 mostra o grafo que possivelmente dentre todos os grafos conexos de 6 vértices, tenha o maior *spread* possível.

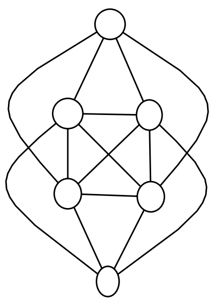

Figura 4: Grafo de spread máximo com $n = 6$: $K_4 \vee \overline{K}_2$.

No entanto, para o spread mínimo, o resultado obtido foi geral. Tal resultado é consequência da Proposição 13 devido a Collatz *et al*. (1957). Para o caminho P_n o *spread* é dado por

$$s_A(P_n) = 2\lambda_1(P_n) = 4cos(\frac{\pi}{n+1}).$$

A Proposição 19 mostra que este valor é o menor valor possível para o spread dos grafos conexos com n vértices.

Proposição 19 *[Gregory et al (2001)] Se G é um grafo conexo com n vértices, então $s_A(G) \geq s_A(P_n)$. A igualdade vale se, e somente se, $G = P_n$.*

A prova do resultado anterior está fortemente relacionado com o resultado a seguir.

Proposição 20 *[Gregory et al (2001)] Se H é um subgrafo bipartido de um grafo G então $s_A(G) \geq s_A(H)$.*

Liu *et al* (2009), obtiveram novos limites superiores e inferiores para $s_A(G)$. Dentre os resultados apresentados por eles, destacamos a proposição que se segue. Para isso, é necessário definir o seguinte parâmetro $M_1 = \frac{1}{2}tr(A^4) + m - 4f$, onde f representa o número de ciclos de comprimento 4 em um grafo.

Proposição 21 *[Liu et al (2009)] Para um grafo G com n vértices e m arestas com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$,*

$$s_A(G) \leq \lambda_1 + \sqrt[4]{2M_1 - 2m + 8f - \lambda_1^4} \leq \sqrt[4]{M_1 - m + 4f}.$$

Se G não tem vértices isolados, então as igualdades são atigindas se, e somente se, $G = K_{a,b}$ para valores de a e b tais que $m = ab$ e $a + b \leq n$.

Vale ressaltar que se G é livre de K_4, a desigualdade da Proposição 21 é melhor do que a apresentada na Proposição 18.

4. Nossos Resultados

Nesse capítulo, apresentamos os primeiros resultados que obtivemos envolvendo o *spread* de um grafo e seu número cromático. Tais resultados reforçam a nossa conjectura de que o *spread* é no mínimo igual ao valor do número cromático. Tal conjectura foi proposta com o auxílio do sistema AutoGraphix (AGX), software de grafos introduzido por Hansen *et al*. (2000). O AGX é um sistema cuja idéia básica é transformar o problema de encontrar grafos extremais para dados invariantes, em um problema de otimização combinatória. A principal diferença do AGX em relação aos demais programas já existentes com esta finalidade, como por exemplo o Graffiti, DelaVina (2005), é o uso de uma metaheurística.

A seguir, listamos uma série de classes conhecidas de grafos onde a conjectura que propomos é verdadedeita. São elas:

1. A classe dos grafos completos. Se $G = K_n$, o grafo completo com n vértices, temos:

   $\chi(K_n) = n$ e $spect(K_n) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 \\ 1 & n-1 \end{bmatrix}.$

   Logo, $s_A(K_n) = \lambda_1 - \lambda_n = (n-1) - (-1) = n$. Portanto, $s_A(K_n) = \chi(K_n)$.

2. A família de s cópias de K_2. Se $G = sK_2$, o grafo formado pela união de s cópias de $K_2, temos:$

   $\chi(sK_2) = 2$ e $spect(sK_2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ s & s \end{bmatrix}.$

   Logo, $s_A(sK_2) = \lambda_1 - \lambda_n = 1 - (-1) = 2$. Portanto, $s(sK_2) = \chi(sK_2)$.

3. A classe dos grafos bipartidos completos. Se $G = K_{n_1,n_2}$, é o grafo bipartido completo, temos:

   $\chi(K_{n_1,n_2}) = 2$ e $spect(K_{n_1,n_2}) = \begin{bmatrix} \sqrt{n_1 n_2} & 0 & -\sqrt{n_1 n_2} \\ 1 & n_1 + n_2 - 2 & 1 \end{bmatrix}.$

   Logo, $s_A(K_{n_1,n_2}) = \lambda_1 - \lambda_n = \sqrt{n_1 n_2} - (-\sqrt{n_1 n_2}) = 2\sqrt{n_1 n_2} \geq 2$, pois n_1 e n_2 são ambos maiores ou iguais a 1. Portanto, $s_A(K_{n_1,n_2}) \geq \chi(G)$, e a igualdade ocorre quando $G = K_{1,1} = K_2$.

4. A classe dos ciclos. Se $G = C_n$ o ciclo de comprimento *n*, temos, $\chi(C_n) = 2$, se *n* é par, e $\chi(C_n) = 3$, se *n* é ímpar. Como

   $spect(C_n) = \begin{cases} [2 \;\; (2cos\frac{2\pi}{n})^{(2)} \;\; \ldots \;\; (2cos\frac{(n-2)\pi}{n})^{(2)} \;\; -2] & , n \text{ par;} \\ [2 \;\; (2cos\frac{2\pi}{n})^{(2)} \;\; \ldots \;\; (2cos\frac{(n-1)\pi}{n})^{(2)}] & , n \text{ ímpar.} \end{cases}$

   Logo, para *n* par, $s_A(C_n) = \lambda_1 - \lambda_n = 2 - (-2) = 4 > \chi(C_n) = 2$.

   Para *n* ímpar, $s_A(C_n) = \lambda_1 - \lambda_n = 2 - 2\cos[\frac{(n-1)\pi}{n}]$. Como temos,

   $$\cos[\frac{(n-1)\pi}{n}] = \cos(\pi - \frac{\pi}{n}) = -\cos(\frac{\pi}{n}),$$

   e sabemos que, para $n \geq 3$, $-1 < -\cos(\frac{\pi}{n}) \leq \frac{-1}{2}$, segue-se que $3 \leq s_A(C_n) < 4$.

   Para *n* ímpar, $\chi(C_n) = 3$. Logo, $s_A(C_n) \geq \chi(C_n)$.

5. A classe dos grafos de Gregory *et al.* (2001). Seja $G(n,k) = K_k \vee \overline{K}_{n-k}$, $1 \leq k \leq n-1$. Queremos provar que

   $$s_A(G(n,k)) - \chi(G(n,k)) \geq 0.$$

   De fato, pela Proposição 10, segue que $\chi(G(n,k)) = k+1$. De acordo com Gregory *et al.* (2001), podemos expressar o $s_A(G(n,k))$ da seguinte forma:

   $$s_A(G(n,k)) = \sqrt{(k-1)^2 + 4k(n-k)}.$$

   $s_A(G(n,k)) - \chi(G(n,k)) = \sqrt{(k-1)^2 + 4k(n-k)} - (k+1) \geq 0$ para $0 \leq k \leq n-1$. No entanto, da definição dos grafos $G(n,k)$, segue que $k \geq 1$. Logo, $s_A(G(n,k)) \geq \chi(G(n,k))$.

A seguir apresentamos um resultado que é mais geral que os apresentados anteriormente. É lógico que todos eles nos ajudam a reforçar a validade da nossa conjectura.

Proposição 22 *Se G é um grafo conexo bipartido de ordem n, então $s_A(G) \geq \chi(G)$.*

Prova: Como G é um grafo conexo bipartido, segue da Proposição 11 que $\chi(G) = 2$. Além disso, o espectro de G é simétrico em relação a origem do sistema real, ou seja, $s_A(G) = 2\lambda_1(G)$ Biggs (1993). Assim, segue da Proposição 13 que

$$s_A(G) = 2\lambda_1(G) \geq 2\lambda_1(P_n) = 4cos(\frac{\pi}{n+1}).$$

No entanto, $\frac{1}{2} \leq cos(\frac{\pi}{n+1}) < 1, \;\; para \;\; n \geq 2$. Portanto, $s_A(G) \geq 2 = \chi(G)$. ■

Observe que na Proposição 22 a igualdade é atendida se $G = K_2$.

A partir da Proposição 16, Gregory *et al.* (2001) observaram a relação que expressa um limite superior para o $s_A(G)$ em termos do $\chi(G)$ e $\lambda_n(G)$, que reescreveremos a seguir:

$$s_A(G) \leq \chi(G)|\lambda_n|. \tag{4}$$

Segue da Proposição 15 que $|\lambda_n| \geq 1$. Se a nossa conjectura for verdadeira, obteremos um limite inferior para $s_A(G)$, e usando a desigualdade (4) poderemos escrever a seguinte relação:

$$\chi(G) \leq s_A(G) \leq \chi(G)|\lambda_n|. \tag{5}$$

Além disso, como $sp(G) = \chi(G) - 1$ para grafos não valorados, segue da primeira parte da desigualdade (5) que

$$sp(G) \leq s_A(G) - 1.$$

Este último resultado é bastante interessante, pois se a Conjectura 1 for verdadeira, conseguiremos provar uma importante desigualdade que relaciona o *span* e o *spread* de um grafo.

5. Conclusão

Com o auxílio do sistema AGX propomos a conjectura que o *spread* de todo grafo conexo é um limite superior para o seu número cromático. Provamos que a conjectura é verdadeira para todos os grafos pertencentes a diversas famílias conhecidas, dentre elas para todos os grafos bipartidos. Todos os resultados provados neste artigo e a busca computacional realizada pelo AGX em uma vasta base de grafos sem encontrar nenhum caso que refutasse nossa conjectura reforçam o fato de que ela seja verdadeira, o que nos permite aqui lançar mais um problema em aberto envolvendo invariantes clássicos de grafos, sobretudo aquele que relaciona o *spread* de G com o seu *span*.

Referências

Biggs, N. (1993). Algebraic Graph Theory.Cambridge University Press.

Collatz, L., Sinogowitz, U. (1957). Spektren endlicher Grafen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. $21 : 63 - 77$.

Cvetković, D., Doob. M.,Sachs, H. (1979). Spectra of Graphs. Academic Press.

Das, K.Ch., Kumar, P. (2004). Some new bounds on the spectral radius of graphs. Discrete Mathematics. $281 : 149 - 161$.

DeLaVina, E. (2005) Some history of the development of Graffiti, Graphs and Discovery DIMACS. Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. $69 : 81 - 118$.

Fan, Y.Z., Wang, Y., Gao Y.B. (2008). Minimizing the least eigenvalues of unicyclic graphs with application to spectral spread. Linear Algebra and Its Applications. $429 : 577 - 588$.

Garey, M.R., Johnson, D.S (1979). Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness.

Gregory, D.A., Hershkowitz, D., Kirkland, S. (2001).The spread of the spectrum of a graph. Linear Algebra and its Applications. $23 - 35$.

Gross, J., Yellen, J. (2003). Handbook of Graph Theory. CRC Press.

Gross, J., Yellen, J. (2006). Graph Theory and Its Applications. CRC Press.

Hansen, P., Caporossi, G. (2000). AutoGraphiX: An Automated System for Finding Conjectures in Graph Theory. Electronic Notes in Discrete Mathematics. $5:23-35$.

Heuvel, J.V.D., Peji$\acute{c}$**, S.** (2000). Using Laplacian Eigenvalues and Eigenvectors in the Analysis of Frequency Assignment Problems. CDAM Research Report Series LSE-CDAM-2000-20.

Hoffman, A. J. (1970). On eigenvalues and colorings of graphs. Academic Press. $79-91$.

Horn, R.A., Johson, C. (1985). Matrix Analysis. Cambridge University Press. Cambridge.

Liu, B., Mu-huo, L. (2009). On the spread of the spectrum of a graph. Discrete Mathematics. $9:2727-2732$.

Petrovi$\acute{c}$**, M.** (1983). On Graphs Whose Spectral Spread Does Not Exceed 4. Publ. Inst. Math. (Beograd). $34:169-174$.

Van Dam, E.R., Haemers, W.H. (2003). Which graphs are determined by their spectrum. Linear Algebra and its Applications. $373:241-272$.

Wilson, R.A. (2002). Graphs, Colourings and the Four-colour Theorem. Oxford Science Publications.