Partição dos grafos P_4-tidy em conjuntos independentes e cliques

Raquel Bravo
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ
Rio de Janeiro - RJ
raquelbr@cos.ufrj.br

Sulamita Klein
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ
Rio de Janeiro - RJ
sula@cos.ufrj.br

Loana Nogueira
Universidade Federal Fluminense - UFF
Niterói - RJ
loana@ic.uff.br

Fábio Protti
Universidade Federal Fluminense - UFF
Niterói - RJ
fabio@ic.uff.br

RESUMO

Um grafo G é P_4-tidy se, para qualquer P_4 induzido H de G, existe no máximo um vértice fora de H que juntamente com três vértices de H induzem um P_4. Neste trabalho, consideramos o problema de partição-(k, ℓ) de um grafo P_4-tidy, isto é, o problema de determinar se o conjunto de vértices de um grafo P_4-tidy pode ser particionado em k conjuntos independentes e ℓ cliques. Apresentamos um algoritmo linear de reconhecimento dos grafos P_4-tidy-(k, ℓ), para $k, \ell \geq 2$.

PALAVRAS CHAVE: cliques, conjuntos independentes, grafos P_4-tidy, grafos-(k, ℓ).

Área principal: Teoria dos Grafos

ABSTRACT

A graph G is a P_4-tidy graph if, for any induced subgraph H of G isomorphic to a P_4, A, there exists at most one vertex outside H forming an induced P_4 along with three vertices of H. This work considers (k, ℓ)-partitions of P_4-tidy graphs, that is, the problem of determining if the set of vertices of a P_4-tidy graph can be partitioned into k independent sets and ℓ cliques. We present a linear time algorithm to recognize if a graph is a P_4-tidy-(k, ℓ) graph, for $k, \ell \geq 2$.

KEYWORDS: cliques, independent set, P_4-tidy graphs, (k, ℓ)-graphs.

Main area: Graph Theory

1. Introdução

Muitos problemas em grafos, tais como o problema de coloração e o problema de cobertura, podem ser vistos como problemas de partição. Em geral, os problemas de partição de grafos objetivam particionar o conjunto dos vértices de um grafo em subconjuntos $V_1, V_2, \ldots, V_k$, onde $V_1 \cup V_2 \cup \ldots V_k = V$ e $V_i \cap V_j = \emptyset$, $i \neq j$, $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq k$, exigindo-se, porém, algumas propriedades sobre estes subconjuntos de vértices. Estas propriedades podem ser *internas*, como por exemplo exigir que os vértices de cada subconjunto V_i sejam completamente adjacentes (isto é, uma clique) ou completamente não-adjacentes (isto é, um conjunto independente), ou *externas*, onde as exigências são feitas sobre os pares (V_i, V_j), como por exemplo exigir que V_i e V_j sejam completamente adjacentes ou não-adjacentes entre si. Um dos problemas mais famosos que se insere neste contexto é o problema da k-coloração, onde particiona-se o conjunto de vértices de um grafo em k conjuntos independentes $V_1, \ldots, V_k$ (sem restrições externas). Sabe-se que esse problema é polinomial para $k \leq 2$ e NP-Completo para $k \geq 3$.

Outro problema bastante conhecido de particionamento de grafos é verificar se um dado grafo G é split, ou, equivalentemente, verificar se o conjunto dos vértices de G pode ser particionado em dois subconjuntos, onde um deles é independente e o outro é uma clique.

Golumbic (1980) provou que o reconhecimento de grafos split pode ser realizado em tempo linear. Recentemente, uma generalização de grafos split foi proposta por Brandstädt, que definiu uma nova classe de grafos, a classe dos *grafos*-(k, ℓ), a qual também chamamos de grafos split generalizados, como sendo aquela formada pelos grafos cujos conjuntos de vértices podem ser particionado em k conjuntos independentes e ℓ cliques. Brandstädt (1996, 1998) considerou em particular as classes de grafos-$(2, 1)$, grafos-$(1, 2)$ e grafos-$(2, 2)$, apresentando algoritmos polinomiais para reconhecê-las. Feder *et al.* (1999) também apresentaram algoritmos polinomiais para o reconhecimento destas classes que surgiram como sub-produto de algoritmos de partição em subgrafos densos e esparsos. Por outro lado, sabe-se que reconhecer grafos-(k, ℓ) para $k \geq 3$ ou $\ell \geq 3$ é NP-Completo, como mostrado por Brandstädt (1996).

Desde então, tem-se estudado classes especiais de grafos-(k, ℓ), tais como grafos cordais-(k, ℓ) e cografos-(k, ℓ), cujo reconhecimento é polinomial. Hell *et al.* (2004) apresentaram uma caracterização para os grafos cordais-(k, ℓ) e um algoritmo de reconhecimento em tempo polinomial para essa família. Bravo *et al.* (2005) caracterizaram os cografos-(k, ℓ), e Demange *et al.* (2005) apresentaram um algoritmo de reconhecimento para esta classe. Bravo *et al.* (2009) também caracterizaram e reconheceram em tempo linear a classe dos grafos P_4-esparsos-(k, ℓ). Os grafos perfeitos que são grafos-(k, ℓ) foram estudados por Feder *et al.* (2005).

Neste trabalho consideramos a classe dos grafos P_4-tidy, classe esta conhecida por conter poucos P_4's. Mais precisamente, um grafo G é P_4-tidy se, para qualquer P_4 induzido H de G, existe no máximo um vértice fora de H que juntamente com três vértices de H induzem um P_4. Essa classe contém estritamente a classe dos grafos P_4-esparsos e, por conseguinte, a dos cografos. Além disso, essa classe não está contida na classe dos grafos perfeitos, o que a torna uma classe interessante para estudo. Os grafos P_4-tidy que podem ser particionados em k conjuntos indepedendentes e ℓ cliques são denominados grafos P_4-tidy-(k, ℓ).

1.1. Preliminares

Os grafos considerados neste trabalho são simples, isto é, sem laços e sem arestas paralelas. A seguir, apresentamos as definições necessárias para o entendimento do nosso trabalho.

Denotamos por $\overline{G}$ o complemento de G, isto é, o grafo que possui o mesmo conjunto de vértices de G e tal que dois vértices são adjacentes em $\overline{G}$ se e somente se não são adjacentes em G. Para $V' \subseteq V$, $G[V']$ denota o subgrafo de G induzido por V'. Uma *clique* (*conjunto independente*) é um subconjunto de vértices induzindo um subgrafo completo (sem arestas), não necessariamente maximal. G é um *grafo*-(k, ℓ) se V pode ser partiticionado em k conjuntos independentes e ℓ cliques. Para um grafo-(k, ℓ) G escrevemos $V = S_1 \cup \ldots \cup S_k \cup C_1 \cup \ldots \cup C_l$, onde cada S_j é um conjunto independente e cada C_i é uma clique. Vale a pena mencionar que alguns conjuntos podem ser vazios. Tal partição é chamada de *partição*-(k, ℓ) de G. O grafo completo (respectivamente, sem arestas) com r vértices é denotado por K_r (respectivamente, I_r). Dados dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$, o grafo $G_1 \cup G_2$ (chamado de *união* de G_1 e G_2) é um grafo com conjunto de vértices $V_1 \cup V_2$ e conjunto de arestas $E_1 \cup E_2$, e o grafo $G_1 + G_2$ (chamado de *"join"* de G_1 e G_2) é o grafo com conjunto de vértices $V_1 \cup V_2$ e conjunto de arestas $E_1 \cup E_2 \cup \{xy \mid x \in V_1,\ y \in V_2\}$.
Denotamos por P_k um caminho sem cordas com k vértices e $k-1$ arestas. O comprimento de um caminho P_k é $k-1$. Denotamos por C_k um ciclo sem cordas com k vértices e k arestas. O grafo P_4 com vértices u, v, w, x e arestas uv, vw, wx é denotado por $uvwx$. Os vértices v e w são os *pontos interiores* e os vértices u e x são os *pontos extremos*.
A classe dos cografos pode ser definida como a classe de grafos que não contêm P_4 como subgrafo induzido.
Lerchs (1971) mostrou como associar um cografo G a uma única árvore de decomposição $T(G)$ chamada de *co-árvore* de G, definida como segue:
- Se G é um grafo não trivial então todo nó interno de $T(G)$ possui pelo menos dois filhos.
- Nós internos são rotulados por 0 (nós tipo-0) ou 1 (nós tipo-1) de tal forma que nós tipo-0 e nós tipo-1 alternam em todo caminho em $T(G)$ começando pela raiz.
- Folhas de $T(G)$ são precisamente os vértices de G, tais que vértices x e y são adjacentes em G se e somente se o menor ancestral comum de x e y em $T(G)$ é um nó tipo-1.

Um grafo G é P_4-tidy se, para qualquer P_4 induzido H de G, existe no máximo um vértice fora de H que juntamente com três vértices de H induzem um P_4.
Assim como os cografos, os grafos P_4-tidy também podem ser representados através de uma árvore de decomposição, chamada *árvore primeval*. Antes de apresentarmos tal árvore, introduzimos os grafos p-conexos e p-conexos separáveis.
Dizemos que um grafo G é *p-conexo* se para toda partição de V em dois conjuntos disjuntos não-vazios V_1 e V_2, existe um P_4 induzido *cruzando* os conjuntos V_1 e V_2, isto é, um P_4 induzido contendo vértices tanto de V_1 quanto de V_2. Os *componentes p-conexos* de um grafo são os subgrafos induzidos maximais que são p-conexos. Observe que um componente p-conexo consiste de um único vértice ou de pelo menos quatro vértices.
Um grafo p-conexo é dito *separável* se o conjunto de vértices V pode ser particionado em dois conjuntos disjuntos não-vazios V_1 e V_2 de tal forma que todo P_4 cruzando V_1 e V_2, possui seus pontos interiores em V_1 e seus pontos extremos em V_2. Neste caso, dizemos que (V_1, V_2) é uma *separação* de G.

Teorema 1. *[Teorema estrutural - Jamison e Olariu (1995)] Para um grafo arbitrário G, exatamente uma das seguintes condições é satisfeita:*

1. *G é desconexo;*
2. *$\overline{G}$ é desconexo;*
3. *Existe um único componente p-conexo separável H de G com uma partição (H_1, H_2) tal que todo vértice fora de H é adjacente a todos os vértices de H_1 e a nenhum vértice*

de H_2;

4. *G é p-conexo.*

Como observado por Jamison *et al.* (1995), esse teorema implica, de forma natural, em um esquema de decomposição para grafos, chamado de *decomposição primeval*. Para sermos mais específicos, vamos definir algumas operações.
Sejam $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ grafos disjuntos. A *união* e o *"join"* de G_1 e G_2 são grafos que resultam, respectivamente, das operações:

- $G_1 ⓪ \ G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$
- $G_1 ① \ G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{xy | x \in V_1, y \in V_2\})$.

Claramente, as operações ⓪ e ① estão relacionadas aos dois primeiros casos do Teorema 1. Podemos observar que as operações ⓪ e ① também equivalem, respectivamente, aos nós tipo-0 e tipo-1 da co-árvore.
Sejam $G_1 = (V_1, E_1)$ um grafo p-conexo separável com separação (V_1^1, V_1^2) e $G_2 = (V_2, E_2)$ um grafo arbitrário disjunto de G_1. O terceiro caso do teorema estrutural é capturado pela seguinte operação:

- $G_1 ② \ G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{xy | x \in V_1^1, y \in V_2\})$

Como mostrado por Jamison *et al.* (1995), todo grafo G ou é um grafo p-conexo ou pode ser obtido unicamente de seus componentes p-conexos (*p-componente*) e de seus vértices fracos (i.e, aqueles que não estão em nenhuma p-componente de G) através de uma sequência finita de operações ⓪ , ① e ② . Além disso, o Teorema 1 nos sugere uma árvore única (a menos de isomorfismo) de representação, T_G, para grafos arbitrários, chamada de *árvore primeval* de G. Os nós internos de T_G são rotulados por inteiros $i \in \{0, 1, 2\}$, onde um nó i indica que o grafo associado à sub-árvore enraizada neste nó é obtido pelos grafos correspondentes aos seus filhos por uma operação i. As folhas da árvore são componentes p-conexos de G. A Figura 1 ilustra um grafo G e sua árvore primeval T_G.

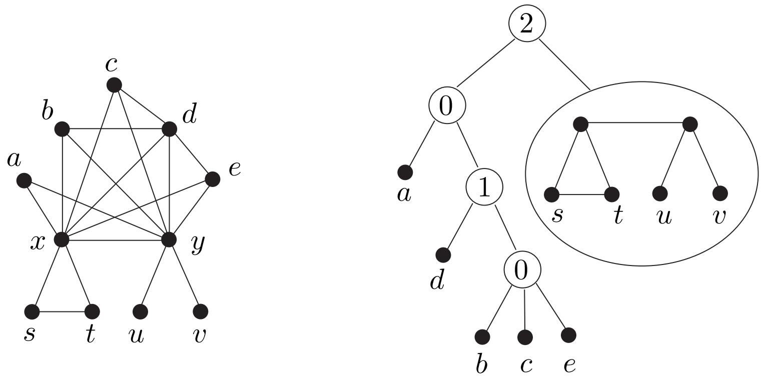

Figura 1: Um grafo G e sua árvore primeval T_G.

Um grafo $G = (V, E)$ é uma *aranha* se V pode ser particionado em três conjuntos $\mathcal{S}$, $\mathcal{K}$ e $\mathcal{R}$, onde $\mathcal{S}$ é um conjunto independente, $\mathcal{K}$ é uma clique, $|\mathcal{S}| = |\mathcal{K}| \geq 2$ e existe uma bijeção $f : \mathcal{S} \to \mathcal{K}$ tal que ou $N_G(v) = \{f(v)\}$, para $v \in \mathcal{S}$ (*aranha magra*) ou $N_G(v) = \mathcal{K} \backslash \{f(v)\}$, para $v \in \mathcal{S}$ (*aranha gorda*). Além disso, todo vértice de $\mathcal{R}$ é adjacente a todos os vértices de

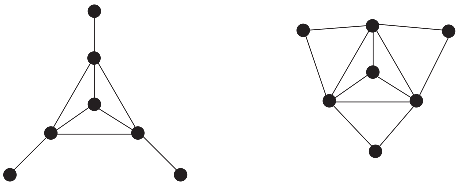

Figura 2: G é uma aranha magra e $\overline{G}$ é uma aranha gorda.

$\mathcal{K}$ e não-adjacente a todos os vértices de $\mathcal{S}$. $\mathcal{R}$ é dito *cabeça* da aranha. A Figura 2 ilustra uma aranha magra e uma aranha gorda.

Uma *quase-aranha* é um grafo isomorfo a uma aranha $\mathscr{S} = (\mathcal{S}, \mathcal{K}, \mathcal{R})$ com apenas um vértice $v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{K}$ substituído por um K_2 ou por um I_2, onde os vértices deste K_2 ou I_2 têm a mesma vizinhança de $v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{K}$. Uma quase-aranha é dita *magra* se o vértice substituído pertence ao conjunto de vértices de uma aranha magra. Caso contrário, a quase-aranha é dita *gorda*. A Figura 3 nos mostra dois exemplos de quase-aranha: uma quase-aranha magra com um vértice do conjunto $\mathcal{S}$ substituído por um K_2 e uma quase-aranha gorda com um vértice do conjunto $\mathcal{K}$ substituído por um I_2.

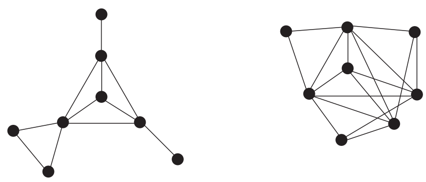

Figura 3: G é uma quase-aranha magra e $\overline{G}$ é uma quase-aranha gorda.

O seguinte teorema descreve os componentes p-conexos dos grafos P_4-tidy.

Teorema 2 (Giakoumakis *et al.* (1997))**.** *Um componente p-conexo de um grafo P_4-tidy é isomorfo ou uma aranha sem cabeça ($\mathcal{R}$) ou a uma quase-aranha sem cabeça ($\mathcal{R}$), ou a um dos grafos C_5, P_5, $\overline{P_5}$.*

As seguintes observações são de fácil verificação.

Observação 1. *Um grafo G é P_4-tidy-(k, ℓ) se e somente se $\overline{G}$ é um grafo P_4-tidy-(ℓ, k).*

Observação 2. *Sejam G um grafo, S um conjunto independente e K uma clique. Se G é (k, ℓ) então $G \cup S$ é $(k+1, \ell)$ e $G \cup K$ é $(k, \ell+1)$.*

2. Resultado Principal

Nesta seção apresentamos um algoritmo de reconhecimento dos grafos P_4-tidy-(k, ℓ). Nossa estratégia consiste na construção de um cografo auxiliar G^* de tal forma que um grafo P_4-tidy G é (k, ℓ) se e somente se G^* é (k, ℓ).

2.1. Construção do cografo auxiliar G^*

Regra 1: Para cada P_5 de G, substitua-o pelo grafo G_1 abaixo:

G_1

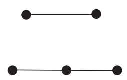

Figura 4: O grafo G_1 é denotado por $P_2 \cup P_3$.

Regra 2: Para cada $\overline{P_5}$ de G, substitua-o pelo grafo G_2 abaixo:

G_2

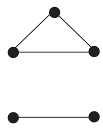

Figura 5: O grafo G_2 é denotado por $C_3 \cup P_2$.

Regra 3: Para cada C_5 de G, substitua-o pelo grafo G_3 abaixo:

G_3

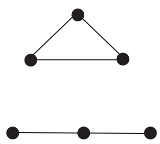

Figura 6: O grafo G_3 é denotado por $C_3 \cup P_3$.

Regra 4: Para cada aranha $\mathscr{S} = (\mathcal{S}, \mathcal{K}, \mathcal{R})$ de G:

(1.a) se $\mathscr{S}$ é uma aranha magra então remova todas as arestas existentes entre os conjuntos $\mathcal{S}$ e $\mathcal{K}$;

(1.b) se $\mathscr{S}$ é uma aranha gorda então adicione todas as arestas que faltam entre os conjuntos $\mathcal{S}$ e $\mathcal{K}$.

Regra 5: Para cada quase-aranha $\mathscr{S} = (\mathcal{S}, \mathcal{K}, \mathcal{R})$ de G:

(2.a) se $\mathscr{S}$ é uma quase-aranha magra então remova todas as arestas existentes entre os conjuntos $\mathcal{S}$ e $\mathcal{K}$;

(2.b) se $\mathscr{S}$ é uma quase-aranha gorda então adicione todas as arestas que faltam entre os conjuntos $\mathcal{S}$ e $\mathcal{K}$.

Podemos observar que a construção acima está bem-definida, já que para quaisquer duas aranhas $\mathscr{S}^1 = (\mathcal{S}^1, \mathcal{K}^1, \mathcal{R}^1)$ e $\mathscr{S}^2 = (\mathcal{S}^2, \mathcal{K}^2, \mathcal{R}^2)$ de um grafo P_4-tidy G, $(\mathcal{S}^1 \cup \mathcal{R}^1) \cap (\mathcal{S}^2 \cup \mathcal{K}^2) = \emptyset$. As mesmas observações valem para as quase-aranhas, os P_5's, os $\overline{P_5}$'s e os C_5's.

Lema 1. *O grafo auxiliar G^* é um cografo.*

Prova: O resultado segue do seguinte fato: todo P_4 induzido em G está em uma aranha, em uma quase-aranha, em um C_5, em um P_5 ou em um $\overline{P_5}$.
É fácil ver que as Regras 1, 2 e 3 substituem os grafos que contém P_4's por cografos.

Resta mostrar que ao aplicarmos as Regras 4 e 5 destruimos os demais P_4's, o que decorre do fato de que os P_4's não podem estar inteiramente contidos em $\mathcal{S}$ ou em $\mathcal{K}$.

$\square$

O reconhecimento dos grafos P_4-tidy-(k, ℓ), para $k = 0$ (respectivamente, $\ell = 0$) corresponde ao problema da ℓ-coloração em $\overline{G}$ (respectivamente, o problema da k-coloração em G), que pode ser resolvido em tempo linear, de acordo com Giakoumakis *et al.* (1997). Bransdstädt (1996) apresentou um algoritmo de tempo linear para reconhecer os grafos-$(1, 1)$, e de tempo polinomial para reconhecer tanto os grafos-$(1, 2)$ quanto os grafos-$(2, 1)$. Neste trabalho, consideramos que $k, \ell \geq 2$.
Vamos precisar dos seguintes lemas.

Lema 2. **[Bravo et al. (2009)]** *Sejam $G = (\mathcal{S}, \mathcal{K}, \mathcal{R})$ uma aranha e $k, \ell \geq 2$ inteiros. Então G é um grafo-(k, ℓ) se e somente se $G[\mathcal{R}]$ é um grafo-(k, ℓ).*

Prova: ($\Rightarrow$) A necessidade segue imediatamente do fato de $G[\mathcal{R}]$ ser um subgrafo induzido de G.
($\Leftarrow$) Suponhamos que $G[\mathcal{R}]$ é um grafo-(k, ℓ). Então $\mathcal{R} = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k \cup C_1 \cup \ldots \cup C_\ell$. Como $\mathcal{S}$ é um conjunto independente e todo vértice de $\mathcal{S}$ é não-adjacente a todo vértice de $\mathcal{R}$, $S_1 \cup S$ é um conjunto independente. Analogamente, como $\mathcal{K}$ é uma clique e todo vértice de $\mathcal{K}$ é adjacente a todo vértice de $\mathcal{R}$, $\mathcal{K} \cup C_1$ é uma clique. Portanto, G é um grafo-(k, ℓ).
$\square$

Lema 3. **[Bravo et al. (2009)]** *Sejam $G = (\mathcal{S}, \mathcal{K}, \mathcal{R})$ uma aranha e $k, \ell \geq 2$ inteiros. Então G^* é um grafo-(k, ℓ) se e somente se $G^*[\mathcal{R}]$ é um grafo-(k, ℓ).*

Prova: A prova é análoga à do Lema 2.

$\square$

Lema 4. *Sejam $G' = (\mathcal{S}', \mathcal{K}', \mathcal{R})$ uma quase-aranha e $k, \ell \geq 2$ inteiros. Então G é um grafo-(k, ℓ) se e somente se $G[\mathcal{R}]$ é um grafo-(k, ℓ).*

Prova: Sejam $G = (\mathcal{S}, \mathcal{K}, \mathcal{R})$ uma aranha e $G' = (\mathcal{S}', \mathcal{K}', \mathcal{R})$ uma quase-aranha, onde $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$ e $\mathcal{K}' = (\mathcal{K} \backslash \{v\}) \cup \{v_1, v_2\}$, com $G[v_1, v_2]$ sendo isomorfo a um I_2 ou K_2, ou $\mathcal{S}' = (\mathcal{S} \backslash \{s\}) \cup \{s_1, s_2\}$ e $\mathcal{K}' = \mathcal{K}$, com $G[s_1, s_2]$ sendo isomorfo a um I_2 ou K_2.
($\Rightarrow$) Suponhamos que G' é um grafo-(k, ℓ). Como $G[\mathcal{R}]$ é um subgrafo induzido de G, consequentemente $G[\mathcal{R}]$ é um grafo-(k, ℓ).
($\Leftarrow$) Seja $G[\mathcal{R}]$ um grafo-(k, ℓ), logo $\mathcal{R} = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k \cup C_1 \cup \ldots \cup C_l$.
Como $G' = (\mathcal{S}', \mathcal{K}', \mathcal{R})$ é uma quase-aranha, analisaremos os quatro casos abaixo:

(i) substituição de um vértice $s \in \mathcal{S}$ por dois vértices s_1, s_2 que induzem um I_2.

Observe que a substituição feita ainda permite que o conjunto $\mathcal{S}' \cup I_2$ seja um conjunto independente. Logo, a análise é análoga à do Lema 2.

(ii) substituição de um vértice $s \in \mathcal{S}$ por dois vértices s_1, s_2 que induzem um K_2.

Como $\ell \geq 2$, temos então no mínimo dois conjuntos independentes. Podemos então colocar o conjunto $\mathcal{S}' \backslash \{s_2\}$ em um conjunto independente, S_1, já que $\mathcal{S}' \backslash \{s_2\}$ é completamente não-adjacente a $\mathcal{R}$, e o vértice s_2 em outro conjunto independente, S_2, de $\mathcal{R}$.

(iii) substituição de um vértice $v \in \mathcal{K}$ por dois vértices v_1, v_2 que induzem um I_2.

Como $k \geq 2$, temos no mínimo duas cliques. Podemos, então colocar o conjunto $\mathcal{K}' \backslash \{v_2\}$ em uma clique, C_1, já que $\mathcal{K}' \backslash \{v_2\}$ é completamente adjacente a $\mathcal{R}$, e o vértice v_2 em outra clique, C_2, de $\mathcal{R}$.

(iv) substituição de um vértice $v \in \mathcal{K}$ por dois vértices v_1, v_2 que induzem um K_2.

Como $\mathcal{K}'$ é uma clique e é completamente adjacente ao conjunto $\mathcal{R}$, podemos então analisar este caso de forma análoga à do Lema 2.

Podemos concluir que G é um grafo-(k, ℓ).

□

Lema 5. *Sejam $G = (\mathcal{S}, \mathcal{K}, \mathcal{R})$ uma quase-aranha e $k, \ell \geq 2$ inteiros. Então G^* é um grafo-(k, ℓ) se e somente se $G^*[\mathcal{R}]$ é um grafo-(k, ℓ).*

Prova: A prova é análoga à do Lema 4.

□

Lema 6. *Seja G isomorfo a P_5, e suponha $k + \ell = 3$. Então G é um grafo-(k, ℓ) se e somente se G^* é um grafo-(k, ℓ).*

Prova:
($\Rightarrow$) Suponhamos que G é um grafo-(k, ℓ).

Temos que G^* é isomorfo a $P_2 \cup P_3$, como mostra a Figura 7.

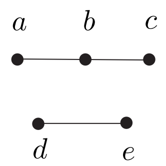

Figura 7: G^* é isomorfo a $P_2 \cup P_3$.

Como $k + \ell = 3$, temos que analisar quatro casos:

(i) Para $k = 0$ e $\ell = 3$, temos G^* com uma partição $C_1 = \{a, b\}, C_2 = \{c\}, C_3 = \{d, e\}$.

(ii) Para $k = 1$ e $\ell = 2$, temos G^* com uma partição $C_1 = \{a, b\}, C_2 = \{d, e\}, S_1 = \{c\}$.

(iii) Para $k = 2$ e $\ell = 1$, temos G^* com uma partição $C_1 = \{a, b\}, S_1 = \{c, d\}, S_2 = \{e\}$.

(iv) Para $k = 3$ e $\ell = 0$, temos G^* com uma partição $S_1 = \{a, c\}, S_2 = \{b, d\}, S_3 = \{e\}$.

Logo, G^* é uma grafo-(k, ℓ).

($\Leftarrow$) Suponha G como mostra a Figura 8.

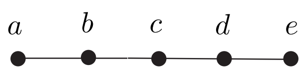

Figura 8: G é isomorfo a P_5.

Novamente, como $k + \ell = 3$, analisaremos quatro casos:

(i) Para $k = 0$ e $\ell = 3$, temos G com uma partição $C_1 = \{a, b\}, C_2 = \{c, d\}, C_3 = \{e\}$.

(ii) Para $k = 1$ e $\ell = 2$, temos G com uma partição $S_1 = \{a, c, e\}, C_1 = \{b\}, C_2 = \{d\}$.

(iii) Para $k = 2$ e $\ell = 1$, temos G com uma partição $S_1 = \{a, c, e\}, S_2 = \{b, d\}, C_1 = \emptyset$.

(iv) Para $k = 3$ e $\ell = 0$, temos G com uma partição $S_1 = \{a, c, e\}, S_2 = \{b, d\}, S_3 = \emptyset$.

Portanto, G é um grafo-(k, ℓ).

$\square$

Lema 7. *Seja G isomorfo a $\overline{P_5}$, e suponha $k + \ell = 3$. Então G é um grafo-(k, ℓ) se e somente se G^* é um grafo-(k, ℓ).*

Prova: A prova é análoga à do Lema 6.

$\square$

Lema 8. *Seja G isomorfo a C_5, e suponha $k + \ell = 3$. Então G é um grafo-(k, ℓ) se e somente se G^* é um grafo-(k, ℓ).*

Prova: A prova é análoga à do Lema 6.

$\square$

Teorema 3. *Sejam G um grafo P_4-tidy e $k, \ell \geq 2$ inteiros. Então G é um grafo-(k, ℓ) se e somente se G^* é um grafo-(k, ℓ).*

Prova:
($\Rightarrow$) Suponhamos que G é um grafo-(k, ℓ).
A prova será dada por indução em n, número de vértices de G.
Para grafos com $n = 1$, a prova segue trivialmente.

Agora, seja G um grafo-(k, ℓ), com $n > 1$ vértices. Vamos analisar cinco casos:

(1) G é um grafo desconexo com p componentes conexos, isto é, $G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_p$. Observe que $|V(G_i)| < n$, para $i = 1, 2, \ldots, p$. Como G é um grafo-(k, ℓ), G_i é um grafo-(k, ℓ_i), $i = 1, \ldots, p$, com $\sum_{i=1}^{p} \ell_i = \ell$. Pela hipótese indutiva, $(G_i)^*$ é um grafo-(k, ℓ_i). Portanto, G^* é um grafo-(k, ℓ).

(2) $\overline{G}$ é um grafo desconexo. A análise é análoga ao item (1).

(3) G é isomorfo a uma aranha $\mathscr{S} = (\mathcal{S}, \mathcal{K}, \mathcal{R})$. Pelo Lema 2, $G[\mathcal{R}]$ é um grafo-(k, ℓ). Como $|V(G[\mathcal{R}])| < n$, temos pela hipótese indutiva que $(G[\mathcal{R}])^* = G^*[\mathcal{R}]$ é um grafo-(k, ℓ). E, pelo Lema 3, G^* é um grafo-(k, ℓ).

(4) G é isomorfo a uma quase-aranha $\mathscr{S} = (\mathcal{S}, \mathcal{K}, \mathcal{R})$. Pelo Lema 4, $G[\mathcal{R}]$ é um grafo-(k, ℓ), já que $k, \ell \geq 2$. Temos adicionalmente que $|V(G[\mathcal{R}])| < n$. Logo, pela hipótese indutiva, $(G[\mathcal{R}])^* = G^*[\mathcal{R}]$ é um grafo-(k, ℓ). Pelo Lema 5, temos que G^* é um grafo-(k, ℓ).

(5) G é isomorfo a P_5 ou $\overline{P_5}$ ou C_5. Pelos Lemas 6, 7 e 8, respectivamente, temos que G^* é um grafo-(k, ℓ).

($\Leftarrow$) Suponha que G^* é um grafo-(k, ℓ).
A prova também será dada por indução em n.
Se $n = 1$ então segue trivialmente que G é um grafo-(k, ℓ).

Suponha agora que G seja um grafo P_4-tidy com $n > 1$ vértices. Novamente, analisaremos cinco casos:

(1) G é um grafo desconexo, isto é, $G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_p$ e $|V(G_i)| < n$, $i = 1, 2 \ldots, p$. Observe que cada G_i satisfaz a propriedade de que $\overline{G_i}$ é desconexo ou é isomorfo a uma aranha, ou quase-aranha, ou P_5, ou $\overline{P_5}$, ou C_5.

- Se $\overline{G_i}$ é desconexo então $(\overline{G_i})^*$ também é desconexo, e como G^* é um grafo-(k, ℓ), $(G_i)^*$ é um grafo-(k, ℓ_i). Pela hipótese indutiva, G_i é um grafo-(k, ℓ_i).
- Se G_i é isomorfo a uma aranha $\mathscr{S} = (\mathcal{S}, \mathcal{K}, \mathcal{R})$, consideremos 2 subcasos:
  (a) Se G_i é uma aranha magra, $(G_i)^*$ é um grafo desconexo e $(G_i)^* = \mathcal{S} \cup (\mathcal{K} + \mathcal{R})$. Como G^* é um grafo-(k, ℓ), $\mathcal{K} + \mathcal{R}$ é um grafo-(k, ℓ_i), e portanto $(G_i)^* = \mathcal{S} \cup (\mathcal{K} + \mathcal{R})$ é também um grafo-(k, ℓ_i). Pela hipótese indutiva, G_i é um grafo-(k, ℓ_i).
  (b) Se G_i é uma aranha gorda, $(\overline{G_i})^*$ é um grafo conexo e $(G_i)^* = \mathcal{S} + (\mathcal{K} \cup \mathcal{R})$. Novamente, temos que $(G_i)^*$ é um grafo-(k, ℓ_i), e pela hipótese indutiva G_i é um grafo-(k, ℓ_i)

  Em ambos os casos, G_i é um grafo-(k, ℓ_i), para $i = 1, 2, \ldots, p$.
- Se G_i é isomorfo a uma quase-aranha $\mathscr{S} = (\mathcal{S}, \mathcal{K}, \mathcal{R})$, a análise é análoga à anterior.
- Se G_i é isomorfo a P_5, temos que $(G_i)^*$ é um grafo-(k, ℓ_i). Pelo Lema 6, G_i é um grafo-(k, ℓ_i).
- Se G_i é isomorfo a $\overline{P_5}$, a análise é análoga à anterior. Pelo Lema 7, G_i é um grafo-(k, ℓ_i).
- Se G_i é isomorfo a C_5, novamente fazemos a mesma análise acima. Pelo Lema 8, G_i é um grafo-(k, ℓ_i).

Como G_i é um grafo-(k, ℓ_i), para $i = 1, 2, \ldots, p$, temos que G é um grafo-(k, ℓ).

(2) $\overline{G}$ é desconexo. A análise é análoga ao item (1).

(3) G é isomorfo a uma aranha. Como G^* é um grafo-(k, ℓ), pelo Lema 3, $(G[\mathcal{R}])^*$ é um grafo-(k, ℓ). Como $|G[\mathcal{R}]| < n$, podemos concluir, pela hipótese indutiva, que $G[\mathcal{R}]$ é um grafo-(k, ℓ). E, pelo Lema 2, G é um grafo-(k, ℓ).

(4) G é isomorfo a uma quase-aranha. Temos que G^* é um grafo-(k, ℓ), pelo Lema 5, $(G[\mathcal{R}])^*$ é um grafo-(k, ℓ). Já que $|G[\mathcal{R}]| < n$, temos, pela hipótese indutiva, que $G[\mathcal{R}]$ é um grafo-(k, ℓ). Pelo Lema 4, podemos concluir que G é um grafo-(k, ℓ).

(5) G é isomorfo a P_5 ou $\overline{P_5}$ ou C_5. Então, pelos Lemas 6, 7 e 8, respectivamente, podemos concluir que G é um grafo-(k, ℓ).

Após analisarmos os cinco casos, podemos concluir que G é um grafo-(k, ℓ).

□

3. Reconhecimento dos grafos P_4-tidy-(k, ℓ)

O cografo auxiliar G^* é uma ferramenta fundamental para o algoritmo linear de reconhecimento dos grafos P_4-tidy-(k, ℓ).
Considere k e ℓ inteiros fixos, $k, \ell \geq 2$. O algoritmo está descrito abaixo.
Seja G um grafo P_4-tidy.
Algoritmo de reconhecimento de grafos P_4-tidy-(k, ℓ)
Entrada: Grafo P_4-tidy $G = (V, E)$

```
Transforme G em G*;
G_1 := G*;
para i = 1 até k faça
    Encontre S_i;
    G*_{i+1} := G*_i \ S_i;
    |V'| := |V| − |S_i|;
para j = k + 1 até k + ℓ faça
    Encontre C_j;
    G*_{j+1} := G*_j \ C_j;
    |V'| := |V| − |C_j|;
se |V'| = 0 então
    G* é um grafo-(k, ℓ) e G é um grafo-(k, ℓ);
senão G* não é um grafo-(k, ℓ) e G não é um grafo-(k, ℓ);
```

Teorema 4. *Sejam G um grafo P_4-tidy e $k, \ell \geq 2$ inteiros. Então podemos decidir se G é um grafo-(k, ℓ) em tempo linear.*

Prova: Para transformar o grafo G no cografo G^*, utilizamos a árvore primeval de G, que pode ser obtida em tempo linear, conforme Jamison *et al.* (1995). Examinamos cada componente p-conexo, e substituímos em tempo linear pelos seus respectivos grafos dados pelas Regras de 1 a 5. Verificar se um cografo é um grafo-(k, ℓ) também pode ser feito em tempo linear, como apresentado por Bravo *et al.* (2005) e Demange *et al.* (2005).

$\square$

4. Conclusão

Neste trabalho, usamos fortemente a estrutura dos grafos P_4-tidy e a árvore de decomposição primeval para desenvolver um algoritmo de reconhecimento de grafos P_4-tidy-(k, ℓ).

Referências

[1] **Bransdstädt, A.** Partitions of graphs into one or two independent sets and cliques. *Discrete Mathematics* 152 (1996) 47–54.

[2] **Bransdstädt, A.** The complexity of some problems related to graph 3-colorability. *Discrete Applied Mathematics* 89 (1998) 59–73.

[3] **Bravo, R. S. F., Klein, S., and Nogueira, L. T.** Characterizing (k, l)-partitionable cographs. In: *7th International Colloquium on Graph Theory*, 2005, Hyeres, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 22 (2005) 277–280.

[4] **Bravo, R. S. F., Klein, S., Nogueira, L. T., and Protti, F.** Characterization and recognition of P_4-sparse graphs partitionable into k independent sets and ℓ cliques. Submetido (2009).

[5] **Corneil, D. G., Lerchs, H., and Burlingham, L. S.** Complement reducible graphs. *Discrete Applied Mathematics* 3 (1981) 163–174.

[6] **Damaschke, P.** Induced subgraphs and well-quasi-ordering. *Journal of Graph Theory* 14 (1990) 427–435.

[7] **Demange, M., Ekim, T., and de Werra, D.** Partitioning cographs into cliques and stable sets. *Discrete Optimization* 2 (2005) 145–153.

[8] **Ekim, T.** *Generalized Vertex Coloring Problems Using Split Graphs.* PhD Thesis, EPFL, number 3629 (2006).

[9] **Feder, T., and Hell, P.** Matrix partitions of perfect graphs. Special Issue of *Discete Mathematics*, in Memory of Claude Berge (2005).

[10] **Feder, T., Hell, P., and Hochstättler, W.** Generalized colourings (matrix partitions) of cographs. Manuscript, 2005.

[11] **Feder, T., Hell, P., Klein, S., and Motwani, R.** Complexity of graph partition problems. *31st Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 464–472. Plenum Press, New York, 1999.

[12] **Feder, T., Hell, P., Klein, S., and Motwani, R.** List partitions. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 16 (2003) 449-478.

[13] **Feder, T., Hell, P., Klein, S., Hochstättler W.** Generalized Colouring (Matrix Partitions) of Cographs. *Trends in Mathematics* 2006 149–167

[14] **Garey, M. R., Johnson, D. S., and Stockmeyer, L.** Some simplified NP-complete graph problems. *Theoretical Computer Science* 1 (1976) 237–267.

[15] **Giakoumakis, V, Roussel, H, Thuillier, H.** On P_4-tidy graphs. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* 1 (1997) 17–41.

[16] **Gimbel, J.** *The Chromatic and Cochromatic Number of a Graph.* PhD thesis, Estern Michigan University, 1984.

[17] **Golumbic, M. C.** *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs.* Academic Press, New York, 1980.

[18] **Hell P., Klein, S., Nogueira, L. T., and Protti, F.** On generalized split graphs. *GRACO 2001 – Brazilian Symposium on Graphs, Algorithms, and Optimization. Eletronic Notes in Discrete Mathematics* 7 (2001), Elsevier.

[19] **Hell, P., Klein, S., Nogueira, L. T., and Protti, F.** Partitioning chordal graphs into independent sets and cliques. *Discrete Applied Mathematics* 141 (2004) 185–194.

[20] **Jamison, B., Olariu, S.** p-components and the homogeneous decomposition of graphs *SIAM Journal Discrete Mathematics* 8 (1995) 448–463.

[21] **Lerchs, H.** On cliques and kernels. Technical Report, Department of Computer Science, University of Toronto, March 1971.

[22] **McConnell, R. M., and Spinrad, J. P.** Modular decomposition and transitive orientation. *Discrete Mathematics* 201 (1999) 189–241.