REDES EIXO-RAIO APLICADA AO TRANSPORTE PÚBLICO

Elisangela Martins de Sá
elisangeladep@ufmg.br

Ricardo Saraiva de Camargo
rcamargo@dep.ufmg.br

Gilberto de Miranda Júnior
miranda@dep.ufmg.br

Departamento de Engenharia de Produção
Universidade Federal de Minas Gerais
Belo Horizonte – MG – Brasil

RESUMO

Um dos maiores problemas que os grandes centros urbanos enfrentam atualmente é o congestionamento no trânsito. Uma alternativa para solucionar esse problema seria uma maior utilização de meios de transporte público como trens, metrô, fura-fila e etc. No entanto, devido ao alto custo para instalar conexões diretas entre todos os pares de pontos origem-destino, modelamos a rede de transporte urbano como uma rede do tipo eixo-raio. Neste trabalho usamos um modelo baseado na formulação proposta por Contreras et al. (2009) e apresentamos dois algoritmos baseados no método de decomposição de Benders para resolver o problema. Os dois algoritmos se mostram bastante competitivos frente ao software comercial CPLEX.
PALAVRAS CHAVE. Redes eixo-raio. Decomposição de Benders. Otimização.

ABSTRACT

One of the largest problems that large cities face nowadays is traffic congestion. An alternative to solve this problem would be to increase use of public transport like trains, subways, stick-row and so on. However, due to the high cost to install direct connections between all pairs of origin-destination points, we have modeled the urban transport network as a hub-and-spoke network. In this paper we have used a model based on the formulation proposed by Contreras et al. (2009) and we present two algorithms based on Benders decomposition method to solve the problem. Both algorithms have proved to be very effective when compared to the optimization software CPLEX.
KEYWORDS. Hub-spoke network. Benders's decomposition. Otimization.

1. Introdução

Um dos maiores problemas que os grandes centros urbanos enfrentam atualmente é o congestionamento no trânsito provocado tanto por veículos de transporte público (ônibus e taxis) quanto por veículos de transporte privado (carros e motos). Uma alternativa para solucionar este problema seria uma maior utilização de meios de transporte público como trens, metrô, fura-fila e etc. No entanto, se torna inviável instalar conexões diretas entre todos os pares de pontos de origem e de destino devido ao alto custo de instalação dos terminais de acesso e dos corredores de deslocamento. Logo uma alternativa seria modelar a rede de transporte público como um rede do tipo eixo-raio, do inglês *hub-and-spoke network*.

Em redes do tipo eixo-raio a demanda entre os pares de origem e destino não é transportada diretamente. O fluxo de diferentes origens, mas endereçado ao mesmo destino, pode ser consolidado em pontos de transbordo, conhecidos como concentradores, antes de ser enviado, possivelmente através de outros concentradores, em direção aos seus destinos. Concentradores são então responsáveis pela agregação, roteamento e redistribuição do fluxo. A aglomeração do fluxo nos concentradores aumenta o tráfego nas conexões entre concentradores, permitindo assim o uso de meios de transporte de maior volume e mais eficientes, resultando em custos unitários de transporte menores (O'Kelly, 1998). Dessa forma economias de escala podem ser alcançadas. As redes do tipo eixo-raio reduzem então significativamente o custo de instalação e gerenciamento da rede, além de permitir o usofruto da economia de escala ao consolidar os fluxos nos concentradores (Kara e Tansel, 2003).

A figura 1 ilustra a diferença entre os dois tipos de rede: a figura (a) mostra uma rede em que todos os pares de pontos de origem e de destino estão conectados, enquanto figura (b) apresenta uma rede do tipo eixo-raio, onde os quadrados representam os concentradores e os circulos, os pontos de origem e de destino.

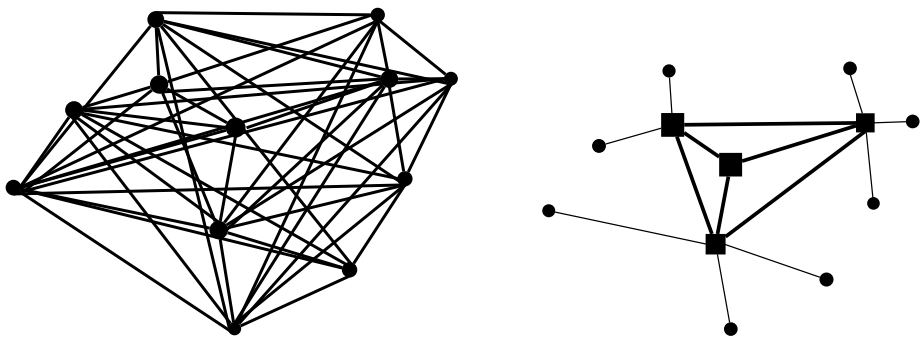

Figura 1: (a) Conexão entre pares origem/destino (b) Rede eixo-raio

Em uma rede de transporte público do tipo eixo-raio, meios de transporte de maior capacidade são usados nas conexões entre concentradores, enquanto linhas locais são usadas nas conexões entre os pontos de origem e concentradores e entre concentradores e pontos de destino.

Neste trabalho utilizamos duas variantes do método de decomposição de Benders para resolver o problema de localização de concentradores aplicada ao transporte público com alocação simples, ou seja cada ponto será alocado a um único concentrador, usando a formulação proposta por Contreras et al. (2009).

Este artigo é organizado da seguinte forma: na próxima seção será feita uma revisão de literatura. Já na seção 3 se encontra a notação usada e uma formulação para o problema. Na seção 4, dois algoritmos baseados no método de demposição de Benders são aplicados para resolver o problema. Na seção 5 está uma análise dos resultados computacionais com algumas considerações. Finalmente, na seção 6 é apresentada uma conclusão deste trabalho

2. Exame da literatura

Nickel et al. (2000) são os primeiros a endereçarem o problema de transporte público usando o paradigma dos sistemas eixo-raixo. Eles propõem duas formulações: *Public Transport* (PT) e *Generalized Public Transport* (GPT). Em ambos os modelos, há um custo fixo não apenas para instalar os concentradores como também para instalar as conexões entre os concentradores. Além disso, não é obrigatório que a rede formada pelos concentradores seja completamente conectada.

Em Gelareh (2008), várias formulações para o problema de localização de concentradores aplicada ao transporte público com alocação múltipla são apresentadas. Para tornar o modelo mais realístico, ele relaxa algumas suposições clássicas da literatura de sistemas eixo-raio, como por exemplo permitindo que haja conexões diretas entre os pontos de origem e de destino e aceitando que a rede formada pelas conexões entre concentradores não seja um grafo completo. Três algoritmos baseados no método de decomposição de Benders (Benders, 1962) e no procedimento heurístico guloso com busca em vizinhança são usados para resolver instâncias de médio porte (até 45 nós) com um esforço computacional aceitável.

Contreras et al. (2009, 2010) apresentam duas formulações uma com três e outra com quatro índices para o problema de *Tree of Hub Location* ou Localização de Concentradores em Árvore. Neste tipo de problema, muito comum em redes de telecomunicações e de transporte público, onde o custo de instalação das conexões é muito alto, sendo inviável uma estrutura de concetradores completamente conectada. Desta forma, a rede formada pelos concentradores é necessariamente uma árvore. A formulação com quatro índices apresenta uma relaxação linear bastante justa e um algoritmo baseado em relaxação Lagrangeana é usado para resolver instâncias de grande porte (até 100 nós) com um *gap* de otimalidade relativamente alto, $2,45\%$.

Neste trabalho, um modelo baseado na formulação de Contreras et al. (2009) é usado para modelar o problema de localização de concentradores aplicada ao transporte público. As diferenças entre o modelo que usaremos e o de Contreras et al. (2009) é o uso de custo fixo para instalação dos concentradores e a adição de algumas restrições que tornam o modelo ainda mais justo.

A principal motivação para o uso desse modelo para modelar uma rede de transporte público é o fato de que geralmente em redes de transporte público, o custo de instalação das conexões entre os concentradores é muito alto, sendo conveniente projetar uma rede com o menor número de conexões possíveis entre os concentradores, ou seja, uma árvore. Contreras et al. (2010) apresentam um exemplo concreto da aplicação de localização de concentradores em árvore no desenho da rede de trens de alta velocidade na espanha. Esta rede que deverá estar pronta por volta de 2020 tem o formato de árvore e foi projetada para que toda cidade com mais de 10.000 habitantes esteja a um raio de 50 km de uma estação(concentradores).

3. Definições e formulações

A formulação de Contreras et al. (2009) requer as seguintes definições: sejam o conjunto N de pontos de demanda e o conjunto K de candidatos a serem instalados os concentradores, onde $K \subseteq N$. Normalmente $K \equiv N$. Para cada ponto $k \in K$ está associado um custo f_k para se instalar um concentrado em k. Para quaisquer pares de pontos i, j (i, $j \in N : i \neq j$) temos w_{ij} unidades de fluxo a serem roteadas da origem i até o destino j. Para simplificar a notação definimos ainda $O_i = \sum_j w_{ij}$ e $D_i = \sum_j w_{ji}$ como a quantidade de tráfego que tem o ponto i como origem e destino, respectivamente.

O custo unitário de transporte para cada par origem-destino i e j é a soma (i) do custo unitário c_{ik} de se enviar uma unidade de fluxo de i para o primeiro concentrador k no caminho de i para j, caso i não seja um concentrador; (ii) dos custos αc_{km} para cada conexão entre concentradores no caminho de i para j, usufruindo de um fator de desconto α, tal que $0 \leq \alpha \leq 1$; e (iii) do custo

c_{mj} de se enviar uma unidade de fluxo do último concentrador m para o ponto de destino j, caso j não seja um concentrador.

A variável $x_{ijkm} \geq 0$ representa a fração de fluxo com origem em i e destino j passando pelos concentradores $k-m$. A variável $y_{km} \in \{0,1\}$ é igual a 1 se a conexão entre os concetradores k e m for instalada e 0, caso contrário. Já a variável $z_{ik} \in \{0,1\}$ é igual a 1 se o ponto i for alocado ao concentrador k e 0, caso contrário. No caso $i = k$, z_{kk} é igual a 1 se o concentrador k for instalado e 0, caso contrário.

Para simplificar a apresentação da formulação, os índices i e j, e k e m pertencem ao conjunto N e K respectivamene, sendo omitidos no restante do trabalho. O Problema de localização de concentradores com alocação simples aplicado ao transporte público pode ser formulado da seguinte forma:

$$\min \sum_k a_k z_{kk} + \sum_i \sum_{k \neq i} (O_i + D_i) c_{ik} z_{ik} + \sum_{i<j} \sum_{k \neq m} (c_{km} \alpha w_{ij} + c_{mk} \alpha w_{ji})\, x_{ijkm} \tag{1}$$

$$\text{s. a:} \quad z_{ik} \leq z_{kk} \qquad \forall\, i \neq k \tag{2}$$

$$\sum_k z_{ik} = 1 \qquad \forall\, i \tag{3}$$

$$y_{km} \leq z_{kk} \qquad \forall\, k < m \tag{4}$$

$$y_{km} \leq z_{mm} \qquad \forall\, k < m \tag{5}$$

$$\sum_{\substack{k \\ k<m}} x_{ijkm} + z_{im} = \sum_{\substack{r \\ r>m}} x_{ijmr} + z_{jm} \qquad \forall\, i < j, m \tag{6}$$

$$x_{ijkm} + x_{ijmk} \leq y_{km} \qquad \forall\, i < j, k < m \tag{7}$$

$$\sum_{\substack{m \\ m>k}} x_{ijkm} \leq z_{kk} \qquad \forall\, i < j, k \tag{8}$$

$$\sum_{\substack{m \\ m<k}} \sum_{l} x_{ijkm} \leq z_{kk} \qquad \forall\, i < j, k \tag{9}$$

$$\sum_k z_{kk} = p \tag{10}$$

$$x_{ijkm} \geq 0 \qquad \forall\, i < j, k \neq m \tag{11}$$

$$y_{km} \in \{0,1\} \qquad \forall\, k < m; \tag{12}$$

$$z_{ik} \in \{0,1\} \qquad \forall\, i, k \tag{13}$$

No modelo acima a função objetivo (1) minimiza o custo de instalação dos concentradores e o custo de transporte. As restrições (2) garantem que um ponto só poderá ser alocado a concentradores instalados. As restrições (3) asseguram que todo ponto i deve ser alocado a um único concentrador k. As restrições (4) e (5) garantem que só haverá instalação de uma conexão entre concentradores se os mesmo estiverem instalados. As restrições (6) representam a conservação do fluxo. As restrições (7) permitem que haja fluxo de i para j passando pelos concentradores k e m se a conexão $k - m$ estiver instalada. As restrições (8) e (9) asseguram que só haverá fluxo de i para j passando pelos concentradores k e m, se k e m estiverem instalados. Estas restrições são redundantes, mas fortalecem a relaxação linear da formulação. A restrição (10) garante que exatamente p concentradores serão instalados.

Devido ao fato de usarmos uma formulação linear inteira mista com uma estrutura decomponível, ou seja, fixadas as variáveis inteira o problema pode ser decomposto em vários subproblemas menores, então o método de decomposição de Benders parece adequado para resolver nosso problema. Na próxima seção é apresentada um breve introdução ao método de decomposição de Benders.

4. Método de Decomposição de Benders

O método de decomposição de Benders foi proposto por Benders (1962) para resolver problemas de programação linear inteira mista. A idéia básica do algoritmo é decompor o problema original em dois problemas mais simples: um problema inteiro misto, conhecido com problema mestre (PM), e um problema linear, conhecido como subproblema (SP).

O PM é uma versão relaxada do problema original com o conjunto de variáveis inteiras e suas restrições associadas, e a adição de uma variável contínua η; enquanto SP é o problema original com os valores das variáveis inteiras temporariamente fixado pela solução do PM. O algoritmo resolve cada um dos dois problemas mais simples iterativamente, um de cada vez. Em cada iteração, uma nova restrição, conhecida como corte de Benders, é adicionado ao PM. Esta nova restrição é originada pela solução do problema dual do SP. O algoritmo para quando o valor da variável η da solução ótima do PM é igual ao valor da função objetivo do SP.

O trabalho pioneiro de Geoffrion e Graves (1974) comprovou a eficiência computacional do método de decomposição de Benders na resolução de algumas classes de problemas. Vários autores, entre eles Camargo et al. (2008); Gelareh (2008); Camargo et al. (2009), utilizam com sucesso o método de decomposição de Benders para resolução de problemas de localização de concentradores.

Fixando as variáveis inteiras $z = z^h$ e $y = y^h$ que são soluções viáveis do modelo (1)-(13), tem-se o seguinte modelo linear:

$$\min \sum_{i<j} \sum_{k \neq m} \left(c_{km} \alpha w_{ij} + c_{mk} \alpha w_{ji}\right) x_{ijkm} + s^h \tag{14}$$

$$\text{s.a:} \sum_{\substack{k \\ k<m}} x_{ijkm} - \sum_{\substack{r \\ r>m}} x_{ijmr} = z^h_{jm} - z^h_{im} \qquad \forall\, m, i<j \tag{15}$$

$$x_{ijkm} + x_{ijmk} \leq y^h_{km} \qquad \forall\, i<j, k<m \tag{16}$$

$$\sum_{\substack{m \\ m>k}} x_{ijkm} \leq z^h_{kk} \qquad \forall\, k, i<j \tag{17}$$

$$\sum_{\substack{m \\ m<k}} \sum_{l} x_{ijmk} \leq z^h_{kk} \qquad \forall\, k, i<j \tag{18}$$

$$x_{ijkm} \geq 0 \qquad \forall\, i<j, k \neq m \tag{19}$$

Onde s^h é custo de instalação dos concentradores e de transporte entre os concentradores e os pontos que não são concentradores da solução referente a z^h e y^h.

Associando as variáveis u_{ijm}, e_{ijkm}, s_{ijk} e t_{ijk} às restrições (15), (16), (17) e (18) respectivamente, temos o seguinte problema dual para cada par de origem-destino $i - j$ $(i < j)$.

$$\max \sum_{m}(z^h_{jm} - z^h_{im})u_{ijm} - \sum_{k<m} y^h_{km} e_{ijkm} - \sum_{k} z^h_{kk}(s_{ijk} + t_{ijk}) \tag{20}$$

$$u_{ijm} - u_{ijk} - e_{ijkm} - s_{ijk} - t_{ijm} \leq (O_i + D_i)c_{km}\alpha \qquad \forall k < m \tag{21}$$

$$u_{ijm} - u_{ijk} - e_{ijmk} - s_{ijk} - t_{ijm} \leq (O_i + D_i)c_{km}\alpha \qquad \forall k > m \tag{22}$$

$$u_{ijm} \in \mathbf{R} \qquad \forall m \tag{23}$$

$$s_{ijm} \geq 0 \qquad \forall m \tag{24}$$

$$t_{ijm} \geq 0 \qquad \forall m \tag{25}$$

$$e_{ijkm} \geq 0 \qquad \forall k < m \tag{26}$$

Este problema é conhecido como subproblema de Benders. A partir da função objetivo (20) podemos montar dois tipos de restrições para o problema mestre, conhecidas como cortes de benders. Caso o problema dual (20)-(26) possua uma solução ótima limitada, com o auxílio da variável η_{ij} é gerada a seguinte restrição conhecida como corte de otimalidade:

$$\eta_{ij} \geq \sum_{m}(z_{jm} - z_{im})u^h_{ijm} - \sum_{k<m} y_{km} e^h_{ijkm} - \sum_{k} z_{kk}(s^h_{ijk} + t^h_{ijk}) \tag{27}$$

Onde u^h_{ijm}, e^h_{ijkm}, s^h_{ijk} e t^h_{ijk} são os valores ótimos das variáveis duais em uma dada iteração h e η_{ij} é uma variável contínua que subestima o custo de transporte.

Caso o problema dual (20)-(26) possua uma solução ilimitada é gerada a seguinte restrição conhecida como corte de viabilidade:

$$0 \geq \sum_{m}(z_{jm} - z_{im})u^h_{ijm} - \sum_{k<m} y_{km} e^h_{ijkm} - \sum_{k} z_{kk}(s^h_{ijk} + t^h_{ijk}) \tag{28}$$

Onde u^h_{ijm}, e^h_{ijkm}, s^h_{ijk} e t^h_{ijk} é o raio extremo de (21)-(26) em uma dada iteração h.

Logo temos o seguinte problema mestre:

$$\min \sum_{k} a_k z_{kk} + \sum_{i}\sum_{\substack{k \\ k \neq i}}(O_i + D_i)c_{ik} z_{ik} + \sum_{i<j} \eta_{ij} \tag{29}$$

s. a:

$$z_{ik} \leq z_{kk} \qquad \forall\, i \neq k \tag{30}$$

$$\sum_{k} z_{ik} = 1 \qquad \forall\, i \tag{31}$$

$$y_{km} \leq z_{kk} \qquad \forall\, k < m \tag{32}$$

$$y_{km} \leq z_{mm} \qquad \forall\, k < m \tag{33}$$

$$\eta_{ij} \geq \sum_{m}(z_{jm} - z_{im})u^h_{ijm} - \sum_{k<m} y_{km} e^h_{ijkm} - \sum_{k} z_{kk}(s^h_{ijk} + t^h_{ijk}) \qquad \forall\, i < j,\ \ h \in H \tag{34}$$

$$0 \geq \sum_{m}(z_{jm} - z_{im})u^h_{ijm} - \sum_{k<m} y_{km} e^h_{ijkm} - \sum_{k} z_{kk}(s^h_{ijk} + t^h_{ijk}) \qquad \forall\, i < j,\ \ h \in G \tag{35}$$

$$\sum_{k} z_{kk} = p \tag{36}$$

$$y_{km} \in \{0, 1\} \qquad \forall\, k < m \tag{37}$$

$$z_{ik} \in \{0, 1\} \qquad \forall\, i, k \tag{38}$$

$$\eta_{ij} \geq 0 \qquad \forall\, i < j \tag{39}$$

Onde H e G são os conjuntos de pontos extremos e de raios extremos de (21)-(26), respectivamente.

Utilizando o SP (20)-(26) e o problema mestre (29)-(39), temos o seguinte algoritmo de decomposição de Benders clássico:

Algoritmo de Benders Clássico	
PASSO 1	Faça $UB = \infty$, $LB = -\infty$.
PASSO 2	Se $UB = LB$, então **PARE**. Foi obtida a solução ótima do problema (1)-(13).
PASSO 3	Resolva o PM (29)-(39). Obtendo S^*_{PM} e o valor ótimo das variáveis z_{ik} e y_{km}.
PASSO 4	Faça $LB = S^*_{PM}$ e atualize z_{ik} e y_{km} no problema dual (20)-(26).
PASSO 5	Para cada par $i - j$: Resolva o problema dual (20)-(26).
PASSO 6	Se o problema dual for ilimitado adicione ao PM (29)-(39) um corte de otimalidade usando (27). Caso contrário, adicione ao PM o corte de viabilidade usando (28)
PASSO 7	Faça $UB =$min$\{UB\ , S^*_{PD} + \sum_k a_k z_{kk} + \sum_i \sum_{\substack{k \\ k \neq i}} (O_i + D_i) c_{ik} z_{ik}\}$. Volte ao PASSO 2.

Onde S^*_{PD} e S^*_{MP} são os valores ótimos das funções objetivo (20) e (29), respectivamente.

Apesar de alguns autores terem obtido sucesso na aplicação do método de decomposição de Benders, geralmente, o método clássico de decomposição de Benders possue uma convergência muito lenta na prática, por isso podemos encontrar na literatura várias técnicas propostas para melhorar a convergência do método. McDaniel e Devine (1977) sugerem usar a relaxaçao linear do problema mestre nas primeiras iterações do método de decomposição de Benders. Dessa forma são gerados vários cortes para o problema mestre, sem a necessidade de se resolver um problema de programação linear inteira mista. Esta modificação no método de decomposição de Benders é conhecida como *hot start*.

Uma outra técnica para melhorar o desempenho do método de decomposição de Benders foi proposta por Magnanti e Wong (1981). A idéia básica de *Magnanti e Wong* é adicionar ao problema mestre, a cada iteração, cortes pareto-ótimo. Segue abaixo uma definição de corte pareto-ótimo:

Definição 1 *Um corte é dito ser pareto-ótimo se ele domina todos os outros cortes. Seja* $U = \{(u, s, t, e)$: *satisfazendo as restrições* (21)-(26)$\}$, *o conjunto de valores viáveis para as variáveis duais. Então o corte de benders associado as variáveis* $(u^1, s^1, t^1, v^1) \in U$ *domina o corte associado a* $(u^2, s^2, t^2, v^2) \in U$, *se:*

$$\sum_m (z_{jm} - z_{im}) u^1_{ijm} - \sum_{k<m} y_{km} e^1_{ijkm} - \sum_k z_{kk}(s^1_{ijk} + t^1_{ijk}) \geq \sum_m (z_{jm} - z_{im}) u^2_{ijm} - \sum_{k<m} y_{km} e^2_{ijkm} - \sum_k z_{kk}(s^2_{ijk} + t^2_{ijk}) \tag{40}$$

Para construir o problema de geração de cortes pareto-ótimo utilizamos o conceito de *core point*. Segue abaixo uma definição de *core point*.

Definição 2 *Um ponto é um core point se ele pertence ao interior do conjunto convexo* (30)-(38).

O algoritmo original de Magnanti e Wong (1981) resolve dois subproblemas a cada iteração do método de decomposição de Benders: Um subproblema associado a solução corrente do problema mestre, SP (20)-(26) e outro subproblema associado a um dado *core-point* (z^0, y^0). Seja $f^{ij}(u, s, t, e)$, o valor da função objetivo do SP (20)-(26), associado à solução (z^h, y^h) do problema mestre. Segue abaixo o subproblema de *Magnanti e Wong*:

$$\max \sum_{m}(z^0_{jm} - z^0_{im})u_{ijm} - \sum_{k<m} y^0_{km}e_{ijkm} - \sum_{k} z^0_{kk}(s_{ijk} + t_{ijk}) \tag{41}$$

$$\text{s. a:} \quad \sum_{m}(z^h_{jm} - z^h_{im})u_{ijm} - \sum_{k<m} y^h_{km}e_{ijkm} - \sum_{k} z^h_{kk}(s_{ijk} + t_{ijk}) = f^{ij}(u, s, t, e) \tag{42}$$

$$\text{restrições (21)} - \text{(26)} \tag{43}$$

O problema acima gera cortes pareto-ótimo que aceleram a convergência do método de decomposição de Benders.

Papadakos (2008) propõe a utilização de um problema alternativo mais simples que o proposto por Magnanti e Wong (1981) para gerar cortes pareto-ótimo. Este problema, nomeado problema independente *Magnanti-Wong*, demanda menos esforço computacional para gerar os cortes. O subproblema independente de *Magnanti-Wong* é:

$$\max \sum_{m}(z^0_{jm} - z^0_{im})u_{ijm} - \sum_{k<m} y^0_{km}e_{ijkm} - \sum_{k} z^0_{kk}(s_{ijk} + t_{ijk}) \tag{44}$$

$$\text{s. a: restrições (21)} - \text{(26)} \tag{45}$$

Devido ao fato de que, geralmente, encontrar os *core points* é uma tarefa muito difícil, Papadakos (2008) apresenta uma forma mais fácil de atualizar os *core points* a cada iteração. Ele mostra que a combinação convexa entre um *core point* e o ponto inteiro referente a solução do problema mestre também é um *core point*. Ou seja o *core point* na iteração k pode ser atualizado da seguinte forma:

$$z^0_{k+1} = \lambda z^0_k + (1 - \lambda)z \tag{46}$$

Onde z é a solução ótima do problema mestre na iteração k.

Logo, dado um *core point* inicial as atualizações dos *core points* a cada iteração pode ser feita de uma forma bastante simples. Já para os casos em que encontrar o *core point* inicial ainda é uma tarefa difícil, Papadakos (2008) sugere a utilização da solução do problema mestre como *core point* inicial. Neste trabalho utilizamos o seguinte *core point* inicial

$$z^0_{kk} = 0.5, z^0_{ik} = \frac{0.5}{n-1} \; para \; i \neq k \; e \; y^0_{km} = 2\frac{(0.5n - 1)}{(n^2 - n)} \tag{47}$$

e $\lambda = 0.5$ para a atualização dos *core point* a cada iteração.

Utilizando o SP (20)-(26), o problema mestre (29)-(39) e o problema independente de Magnanti-Wong (44)-(45), temos o algoritmo de decomposição de Benders com cortes pareto-ótimo:

Algoritmo de Benders Acelerado	
PASSO 1	Faça $UB = \infty$, $LB = -\infty$.
PASSO 2	Se $UB = LB$, então **PARE**. Foi obtida a solução ótima do problema (1)-(13).
PASSO 3	Resolva o problema independente de Magnanti-Wong (44)-(45).
PASSO 4	Se o problema independente de Magnanti-Wong for ilimitado adicione ao PM (29)-(39) um corte de otimalidade usando (27). Caso contrário, adicione ao PM o corte de viabilidade usando (28)
PASSO 5	Resolva o PM (29)-(39). Obtendo S^*_{PM} e o valor ótimo das variáveis z_{ik} e y_{km}.
PASSO 6	Faça $LB = S^*_{PM}$ e atualize z_{ik} e y_{km} no problema dual (20)-(26).
PASSO 7	Para cada par $i - j$: Resolva o problema dual (20)-(26).
PASSO 8	Se o problema dual for ilimitado adicione ao PM (29)-(39) um corte de otimalidade usando (27). Caso contrário, adicione ao PM o corte de viabilidade usando (28)
PASSO 9	Faça $UB =$min$\{UB\ , S^*_{PD} + \sum_k a_k z_{kk} + \sum_i \sum_{\substack{k \\ k \neq i}} (O_i + D_i) c_{ik} z_{ik}\}$.
PASSO 10	Atualize os pontos de *Magnanti-Wong*: faça $z^0_{ik} = \lambda z^0_{ik} + (1-\lambda) z^h_{ik}$ e $y^0_{km} = \lambda y^0_{km} + (1-\lambda) y^h_{km}$, onde $0 \leq \lambda \leq 1$. Volte ao PASSO 2.

5. Resultados Computacionais

Os testes computacionais foram feitos usando o conjunto de dados AP do serviço postal australiano , introduzido por Ernst e Krishnamoorthy (1996). Cada instância é denotada por ap$n.\alpha$, onde n é o número dos nós e α é o desconto usado que pode assumir o valor 2 para 20%, 4 para 40%, 6 para 60% e 8 para 80% de desconto. Para cada instância ap$n.\alpha$ foram feitos testes para valores de $p = 3, 5$ e 8.

Todos os testes foram feitos usando um computador *Core 2 Duo* com 2.5 GHz e com 8 GB de memória usando o sistema operacional Linux. As duas variantes do método de decomposição de Benders foram implementadas em C++ usando o CPLEX 9.1 para resolver os problemas lineares e linear inteiro misto. Devido ao fato de usarmos uma formulação com uma relaxação linear bastante justa os dois métodos foram implementados usando *hot start*, ou seja as restrições de integralidade das variáveis inteiras são relaxadas nas primeiras iterações do método.

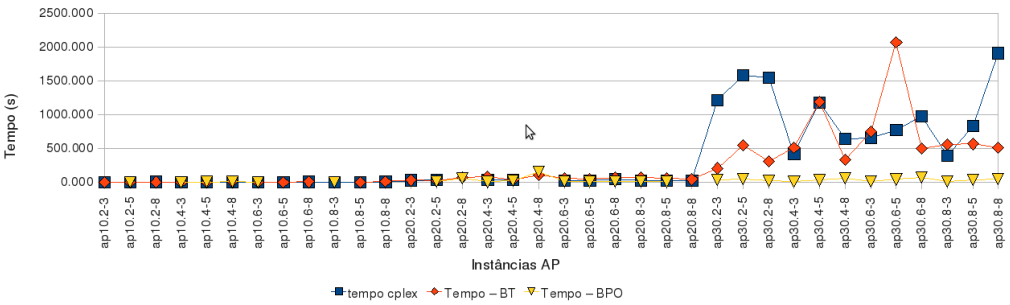

Figura 2: Esforço computacional

Os resultados dos testes computacionais estão na tabela 1. Onde *T(s)* é o tempo em segundos para encontrar a solução ótima, *# iter* é o número de iterações do método de decomposição sem

hot start e *# iter HS* é o número de iterações de método de decomposição com *hot start*. A figura 2 mostra uma comparação do tempo computacional de cada algoritmo para encontrar a solução ótimo. Pode-se observar que para instâncias pequenas ($n = 10$) os três métodos apresenta um resultado muito próximo. Mas para instâncias maiores a variante do método de decomposição de Benders com cortes pareto-ótimo se mostra muito mais eficiente, se comparada com os outros dois métodos. Já a variante de Benders clássico se mostra bastante competitiva com o CPLEX comprovando a aplicação do método de decomposição de Benders para resolver este problema.

Na figura 3 pode-se observar a vantagem da variante de Benders com cortes pareto-ótimo, em relação ao número de ciclos para encontrar a solução ótima comparando com a variante de Benders clássico. A variante do método de decomposição de Benders com cortes pareto-ótimo converge muito mais rápido para ótimo que a variante clássica. Comprovando a eficácia dos cortes pareto-ótimo para acelerar a convergência do método.

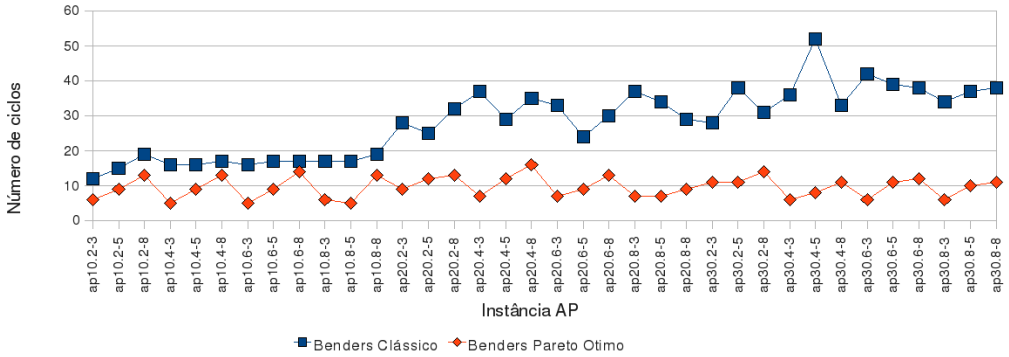

Figura 3: Quantidade de ciclos

Tabela 1: Desempenho Computacional dos algoritmos

Instância	p	Cplex	Benders Clássico			Benders Pareto-ótimo		
		T(s)	# iter. HS	#iter.	T(s)	# iter. HS	#iter.	T(s)
ap10.2	3	0.06	11	1	0.19	5	1	0.15
	5	0.25	14	1	0.37	8	1	0.32
	8	0.72	18	2	0.96	7	6	1.67
ap10.4	3	0.07	15	1	0.37	4	1	0.09
	5	0.28	15	1	0.39	6	3	0.76
	8	0.88	16	5	2.42	7	6	2.30
ap10.6	3	0.05	15	1	0.36	4	1	0.11
	5	0.06	16	1	0.39	8	1	0.23
	8	1.28	16	5	2.51	9	5	2.58
ap10.8	3	0.08	16	1	0.45	5	1	0.14
	5	0.06	16	1	0.36	7	1	0.20
	8	1.79	18	4	2.74	8	6	2.76
ap20.2	3	24.57	27	1	26.55	8	1	4.14
	5	30.03	24	1	23.73	11	1	8.06
	8	130.21	31	1	67.74	11	2	52.59
ap20.4	3	31.23	36	1	74.59	6	1	2.58
	5	29.13	28	1	34.21	10	2	18.42
	8	189.71	34	1	106.53	13	3	153.24
ap20.6	3	18.97	32	1	49.96	6	1	2.90
	5	16.30	29	1	39.41	8	1	4.43
	8	45.56	33	1	44.21	12	1	11.40
ap20.8	3	18.51	36	1	69.11	6	1	2.86
	5	18.79	33	1	53.92	6	1	2.63
	8	21.85	28	1	37.69	8	1	8.63
ap30.2	3	1212.22	27	1	204.03	10	1	29.32
	5	1579.30	37	1	544.35	10	1	42.29
	8	1546.09	30	1	307.65	13	1	147.76
ap30.4	3	409.06	35	1	507.63	5	1	11.21
	5	1173.98	51	1	1190.26	7	1	26.44
	8	636.14	32	1	334.10	10	1	51.11
ap30.6	3	652.29	41	1	744.43	5	1	10.24
	5	770.25	36	3	2069.51	10	1	37.99
	8	972.59	37	1	501.37	11	1	66.15
ap30.8	3	392.37	33	1	552.53	5	1	10.27
	5	832.21	36	1	562.51	9	1	32.98
	8	1909.74	37	1	509.54	10	1	44.87

6. Conclusões e considerações finais

Neste artigo apresentamos duas variantes do método de decomposição de Benders para resolver o problema *tree of hub location*. Uma variante baseada no método de decomposição de Benders clássico e a outra variante baseada no método de decomposição de Benders com cortes pareto-ótimo. A variante de Benders com cortes pareto-ótimo se mostrou mais eficiente quando comparada com a variante de Benders clássico e com o software comercial CPLEX. No entanto as duas implementações se mostraram bastante competitivas frente ao software CPLEX, confirmando a aplicabilidade do método de decomposição de Benders para resolver o problema *tree of hub location*.

Referências

Benders, J. F. (1962). Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerisch Mathematik*, 4:238–252.

Camargo, R. S.; Miranda Jr, G. e Luna, H. P. (2008). Benders decomposition for the uncapacitated multiple allocation hub location problem. *Computers and Operations Research*, 35:1047–1064.

Camargo, R. S.; Miranda Jr, G. e Luna, H. P. (2009). Benders decomposition for hub location problems with economies of scale. *Transportation Science*, 43:86–97.

Contreras, I.; Fernández, E. e Marín, A. (2009). Tight bounds from a path based formulation for the tree of hub location problem. *Computer and Operations Research*, 36:3117–3127.

Contreras, I.; Fernández, E. e Marín, A. (2010). The tree of hubs location problem. *European Journal of Operational Research*, 202:390–400.

Ernst, A. T. e Krishnamoorthy, M. (1996). Efficient algorithms for the uncapacitated single allocation p-hub median problem. *Location Science*, 4:139–154.

Gelareh, S. (2008). *Hub Location Models in Public Transport Planning*. PhD thesis, University of Saarlandes, Germany.

Geoffrion, A. M. e Graves, G. W. (1974). Multicomodity distribution system design by Benders decomposition. *Management Science*, 20:822–844.

Kara, B. Y. e Tansel, B. C. (2003). The latest arrival hub location problem. *Management Science*, 47:1408–1420.

Magnanti, T. L. e Wong, R. T. (1981). Accelerating benders decomposition: Algorithmic enhancement and model selection criteria. *Operations Research*, 29(3):464–483.

McDaniel, D. e Devine, M. (1977). A modified Benders partitioning algorithm for mixed integer programming. *Management Science*, 24(3):312–319.

Nickel, S.; Schobel, A. e Sonneborn, T. (2000). Hub location problems in urban traffic networks. In Niittymahi e Pursula, Editores, *Mathematical Methods and Optimisation in Transportation Systems*, pp. 1–12. Kluwer Academic Publisher.

O'Kelly, M. E. (1998). A geographer's analysis of hub-and-spoke networks. *Journal of Transport Geography*, 3(6):171–186.

Papadakos, N. (2008). Practical enhancements to the magnanti–wong method. *Operations Research Letters*, 36:444–449.