

CARTA DE CONTROLE BASEADA EM MODELOS BETA POR COMPONENTES PRINCIPAIS PARA MONITORAMENTO DE PROCESSOS

Ângelo Márcio Oliveira Sant'Anna¹

Carla Schwengber ten Caten²

Danilo Marcondes Filho³

¹ Depto. de Engenharia de Produção e Mecatrônica, CCET / PUCPR

² Depto. de Engenharia de Produção, Escola de Engenharia / UFRGS

³ Depto. de Estatística, Instituto de Matemática / UFRGS

Angelo.santanna@pucpr.br.; tencaten@producao.ufrgs.br.; marcondes.filho@ufrgs.br.

RESUMO

As cartas de controle baseada em modelos são ferramentas úteis para monitorar processos quando as características de qualidade (CQ) variam em função de freqüentes ajustes em uma ou mais variáveis de controle (VC) do processo. No entanto, quando há multicolinearidade entre as VC do processo, os modelos de regressão podem apresentar erro no teste de significância dos coeficientes do modelo. Este artigo propõe uma carta de controle baseada em modelos Beta por componentes principais (CCMBCP) para monitorar CQ do tipo fração em função das VC multicolineares e uma análise de diagnóstico das alterações identificadas pela CCMBCP. A CCMBCP foi validada em um estudo de caso simulado. O resultado da análise de sensibilidade, via simulação de Monte Carlo, indicaram que a CCMBCP apresenta desempenho satisfatório para monitorar variáveis do tipo fração em função de VC multicolineares.

PALAVRAS CHAVE: Controle estatístico de qualidade, Carta de controle baseada em modelos, Carta de controle por componentes principais.
Aplicação à Indústria.

ABSTRACT

Model-based control charts are useful tools for monitoring processes when the quality characteristics (QC) frequently vary with adjustments in one or more control variables (CV) of the process. However, when there is high multicollinearity among the VC processes, regression models may have shown error to significance test of the coefficients model. This paper proposes a Beta model-based control charts by principal components (BMCCPC) to monitor the type fraction quality characteristics in function of multicolineares CV and a diagnostic analysis of the changes identified by CCMBCP. The CCMBCP was validated in a simulated case study. The sensitivity analysis by Monte Carlo simulation indicates that the CCMBCP presents satisfactory performance for monitoring of the type fraction quality characteristics in function of multicolineares CV.

KEYWORDS: Statistical quality control, model-based control charts, principal components control charts.
Industrial Application.

1. Introdução

O controle estatístico do processo (CEP) vem sendo utilizado para monitorar a qualidade dos produtos em diversos processos industriais, devido principalmente a sua capacidade em distinguir entre causas comuns e causas especiais de variação. Tradicionalmente utilizam-se cartas de controle (CC) para monitorar as características de qualidade (CQ) do processo.

As CC propostas inicialmente por Shewhart requerem que os dados monitorados sejam independentes e identicamente distribuídos em torno de um modelo de referência com média constante. Entretanto, é freqüente observar processos onde as CQ variam em função de alterações do ajuste das variáveis de controle (VC) do processo, gerando assim um modelo de referência distinto para cada novo ajuste.

Uma alternativa proposta na literatura são as cartas de controle baseadas em modelos, onde inicialmente é realizada a previsão do valor da CQ por um modelo de regressão em função do seu relacionamento com as VC do processo. Ao invés de monitorar a média das CQ, as cartas de controle baseadas em modelos monitoram os resíduos entre as CQ observadas e as CQ previstas pelo modelo.

Trabalhos propondo aplicações de CC para monitorar CQ mensuradas em fração do tipo percentual ou proporção utilizando modelos de regressão são escassos na literatura. Uma abordagem recente desenvolvida propõe uma CC baseada em modelos Beta (CCMB). A CCMB é uma CC para os resíduos deviance do modelo de regressão Beta que modela CQ do tipo fração em função das VC do processo.

No entanto, a adequação dos modelos de regressão da CQ em função das VC está restrita a um cenário onde a correlação linear entre as VC não é significativa. Quando há multicolinearidade (i.e. correlação linear acentuada entre as VC), os modelos de regressão podem apresentar efeitos errôneos nas estimativas da variância e covariância de seus coeficientes e prejudicar o teste de significância das VC e a conseqüente adequação do modelo (NETER et al., 2005).

Uma alternativa usual consiste em utilizar regressão por componentes principais (RCP). A análise de componentes principais (ACP) é uma técnica de análise multivariada que visa transformar um grupo de variáveis correlacionadas em variáveis latentes, denominadas componentes principais (CPs). Os CPs representam variáveis ortogonais e são obtidos através da combinação linear das VC. Geralmente, poucos CPs são suficientes para representar as principais estruturas de correlação nos dados. A RCP é uma regressão da CQ em função dos CPs ortogonais ao invés das VC originais. Aplicações de RCP também são escassas na literatura e estão restritos aos modelos de regressão com CQ contínua.

Este artigo propõe uma CC baseada em modelos Beta por componentes principais (CCMBCP) para monitorar CQ do tipo fração em função das VC multicolineares. Adicionalmente, este trabalho propõe uma abordagem posterior para diagnóstico de alterações apontadas pela CCMBCP, que consiste em utilizar CC Shewhart para monitorar os escores dos CPs (CCCP) que são resultantes de alterações em uma ou mais VC.

2. Revisão de Literatura

2.1. Modelos de regressão Beta

A fração de itens não-conformes às especificações em um determinado conjunto de observações, ou lotes de itens produzidos, é uma importante informação a respeito do comportamento do processo de produção de uma empresa, pois a produção de itens não-conformes em um processo acarreta à empresa, custos diretos e indiretos. Em virtude da variabilidade inerente ao processo, a modelagem das informações permite conhecer a relação existente entre as características de qualidade e as variáveis de controle do processo, e o comportamento do processo devido a possíveis alterações.

A ocorrência da fração de itens não-conformes às especificações tem sido comumente modelada como distribuição Binomial, com parâmetros n e p . Se n e p forem satisfatoriamente grandes a aproximação da distribuição Binomial pela Normal é satisfatória. Entretanto, há

processos em que a fração de itens não-conformes é muito pequena ou a distribuição dos dados é assimétrica, tornando inapropriada a aproximação. Kieschnick & McCullough (2003) mostra que a aproximação da distribuição Binomial pela Beta é mais apropriada, devido à variedade de forma (simétrica ou assimétrica) que a densidade de probabilidade Beta pode assumir.

O modelo de regressão Beta (MRB) apresenta uma estrutura de regressão baseada em três componentes: (i) Componente aleatória – supõe-se que a característica de qualidade (y_j) segue a distribuição de probabilidade Beta; (ii) Componente sistemática – que especifica uma soma linear dos coeficientes desconhecidos das variáveis de controle, conhecido como preditor linear (η); (iii) Função de ligação – que permite modelar a média da característica de qualidade em relação às demais variáveis de controle através de uma função conhecida como $g(\cdot)$.

Ferrari & Cribari-Neto (2004) se baseiam na suposição de que as proporções seguem uma distribuição de probabilidade Beta, para realizar uma parametrização da esperança matemática $E(y) = p / (p+q)$ e da variância $V(y) = pq / [(p+q)^2 + (p+q+1)]$ da variável y , utilizando os parâmetros (p e q) da distribuição de probabilidade Beta.

A componente aleatória especifica uma variável aleatória y_j cuja distribuição dos valores seguem a distribuição de probabilidade Beta, de parâmetros p e q . E sua função densidade possa ser escrita na forma,

$$f(y; p, q) = \left\{ \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} y^{p-1}(1-y)^{q-1}, \quad 0 < y < 1, \quad p > 0, \quad q > 0, \right\} \quad (1)$$

onde $\Gamma(p)$ uma função gama avaliada no ponto p , ou seja, com $\Gamma(p) = \int_0^\infty y^{p-1} e^{-y} dy, p > 0$.

A segunda e terceira componentes expressam a estrutura do modelo de regressão Beta conforme a forma,

$$g(\mu_i) = \eta_i = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k. \quad (2)$$

onde η é o preditor linear, β 's coeficientes desconhecidos, k números de variáveis de controle, $g(\cdot)$ a função de ligação e μ a média da característica de qualidade. Para apresentar o modelo de forma mais compacta, a equação (1) pode ser reescrita em notação matricial:

$$y_i = g(\mu_i) + \varepsilon_i \quad (3)$$

os erros aleatórios ε são os resíduos do modelo de regressão, definidos pela diferença entre os valores observados (y_i) e os valores estimados (\hat{y}_i).

A estimação dos coeficientes desconhecidos (β) para os MRB é obtida a partir da maximização do logaritmo da função de verossimilhança, utilizando o algoritmo de otimização não-linear de *quasi-Newton* (BFGS). Neste trabalho utiliza-se o coeficiente de determinação R^2 e o critério de informação de Akaike (AIC), para decidir o melhor modelo ajustado, com um número reduzido de parâmetros.

2.2. Carta de Controle baseada em Modelos Beta

A carta de controle baseada em modelos Beta (CCMB) proposta neste trabalho tem por finalidade monitorar processos com características de qualidade mensuradas em razão ou fração de itens não-conformes, as quais são habitualmente não-normais e de forma assimétrica. Esta carta de controle utiliza o MRB para estimar a característica de qualidade do tipo fração de itens não-conformes em função das variáveis de controle. Os resíduos *deviance* gerados pelo método de estimação por máxima verossimilhança são plotados na carta de controle a fim de monitorar o quanto o valor dos resíduos está distante do valor estimado pelo MRB e detectar mudanças devido a causas especiais.

A CCMB apresenta algumas vantagens: (i) fácil interpretação do controle estatístico; (ii) os resíduos *deviance* monitorados são não-correlacionados; e (iii) o modelo de regressão admite relação não-linear entre as variáveis de interesse.

A adequação de um modelo de regressão pode ser avaliada pelo comportamento dos resíduos e adequabilidade dos dados utilizados na construção do modelo. Modelos com bom desempenho estatístico apresentam pequena discrepância entre os dados reais e seus respectivos valores estimados. Hawkins (1991) salienta que, conforme o modelo de regressão é ajustado, o

desempenho das cartas de controle é aperfeiçoado Segundo Jearkpaporn *et al.* (2005), o ajuste inadequado do modelo de regressão pode afetar o desempenho das cartas de controle no monitoramento do processo.

Suponha um conjunto de s características de qualidade y_1, y_2, \dots, y_s em função de um conjunto de k variáveis de controle x_1, x_2, \dots, x_k com k coeficientes desconhecidos $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$, e i amostras de tamanho n . Assumindo que uma função de ligação *logit* relaciona tais variáveis, tem-se que,

$$y_j \sim \text{logit}(\mu_j) = \beta_j x_t + \varepsilon_i \quad \text{com } j = 1, \dots, s ; t = 0, \dots, k \text{ e } i = 1, \dots, n \quad (4)$$

As relações entre as t variáveis de controle (x_t) e cada j características de qualidade (y_j) são determinadas pela construção de j modelos de regressão Beta. Estes j modelos são utilizados para prever os valores estimados e, por conseguinte, gerar os resíduos *deviance* (rd_j).

Os resíduos *deviance* são plotados em j cartas de controle, com limites de controle estatísticos calculados a partir da média amostral \bar{r}_{d_j} e variância amostral $s^2(\bar{r}_{d_j})$ dos resíduos.

Desta forma, os limites de controle e linha central da carta de controle baseada em modelos Beta são dados por:

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{r}_{d_j} + w\sqrt{s^2(\bar{r}_{d_j})} \\ LC &= \bar{r}_{d_j} \\ LIC &= \bar{r}_{d_j} - w\sqrt{s^2(\bar{r}_{d_j})} \end{aligned} \quad (5)$$

onde w é uma constante que define a largura dos limites de controle correspondente ao nível desejado do número médio de amostras (NMA) e $j = 1, \dots, s$. O NMA determina o número de amostras até a ocorrência de um alarme falso quando o processo está sob controle. Uma vez determinado os limites de controle, as CCMB com resíduos *deviance* podem ser utilizados para monitorar as características de qualidade mensuradas em frações de itens não-conformes.

2.3. Carta de Controle via Componentes Principais

Esta seção apresenta a base teórica para construção das CC para os CPs. As cartas de controle por componentes principais (CCCP) propostas constituem-se numa adaptação da tradicional CC de Shewhart para monitoramento dos escores dos CPs ao invés das VC originais (JACKSON, 1991).

Considere a VC X_t de interesse a ser monitorada em um determinado processo e n observações preliminares independentes (x_{1t}, \dots, x_{nt}) retiradas do processo sob controle estatístico. Suponha também que X_t siga uma distribuição Normal, com média $\mu_t = \mu_{0t}$ e desvio-padrão $\sigma_t = \sigma_{0t}$. Na prática os valores de μ_{0t} e σ_{0t} são estimados a partir da amostra preliminar através da média \bar{x}_t e do desvio padrão s_t amostrais.

Considerando que as observações da VC X_t estejam centradas (i.e., $\mu_{0t} = 0$), os limites de controle da CC de Shewhart são dados por $LC = \pm w \cdot \sqrt{s_t^2}$, onde w é o número de desvios, determinado a partir da probabilidade desejada de alarme falso para a CC. Como o desvio padrão do processo é estimado, w é obtido através da distribuição t com $n-1$ graus de liberdade. O monitoramento da observação da tésima VCs X_t é então realizado incluindo cada nova observação na CCt de Shewhart, para $t=1, \dots, k$.

As CCCPs são derivadas da ACP descrita na seção anterior e aplicadas no monitoramento simultâneo de k VC correlacionadas. Considere agora uma matriz X , de dados padronizados, contendo em suas linhas n amostras preliminares k -variadas das VC X_t , num processo em controle estatístico, para $t=1, \dots, k$. É construída uma CCCP para monitorar os escores médios de cada CP. Obtém-se $z_t = Xu_t$ e considerando que as n observações (x_{1t}, \dots, x_{nt}) da VC X_t estejam padronizadas (i.e., $\mu_{0t(n \times t)} = 0$ e $\sigma_{0t(t \times 1)} = 1$), os limites de controle da CCCP são dados por,

$$LC = \pm w\sqrt{\lambda_t} \quad (6)$$

onde λ_t representa a variância do tésimo CP e w o número de desvios, determinado a

partir da probabilidade desejada de alarme falso para a CC. Como λ_t é estimado a partir da amostra preliminar, w é obtido através da distribuição t com $n-1$ graus de liberdade.

O monitoramento dos escores do tésimo CP para cada nova amostra das VCs é realizado a partir da CCCPt, colocando na CC o escore $z_t (z_{1t}, \dots, z_{nt})$ devido ao tésimo CP, para $i=1, \dots, n$ e $t=1, \dots, l$, calculado através da equação (7),

$$z = U'x \tag{7}$$

onde $z = [z_1, z_2, \dots, z_l]$ é o vetor contendo os l escores referentes a nova observação; a matriz $U = [u_1|u_2|\dots|u_l]$ contém nas suas colunas os l autovetores associados, e U' representa a sua transposta.

3. Carta de Controle baseada em Modelos Beta por Componentes Principais

A carta de controle baseada em modelos Beta por componentes principais (CCMBCP) proposta neste trabalho tem por finalidade monitorar processos que mensuram CQ do tipo fração em função de VC multicolineares. Inicialmente aplica-se a ACP para estimar os CPs das VCs multicolineares. Esta carta de controle utiliza o MRB para estimar a CQ do tipo fração em função dos CPs ortogonais. Os resíduos deviance gerados pelo método de estimação por máxima verossimilhança são plotados na carta de controle a fim de monitorar o comportamento do processo e detectar alterações devido a causas especiais. Adicionalmente, utilizam-se as cartas de controle baseada em componentes principais (CCCP) para diagnosticar quais VC influenciaram na alteração do processo.

4. Aplicação da CCMBCP

A aplicação da carta de controle proposta contemplou um estudo de caso simulado representa um processo de manufatura com a CQ fração de produtos não conformes definida por Y e as VC definidas por X_1, X_2, X_3 e X_4 . A simulação consistiu na geração de 200 observações das quatro VC com distribuição Normal 4-variada e da CQ com distribuição Beta.

A Tabela 1 apresenta a matriz de correlação entre a CQ Y e as VC do estudo simulado. Nota-se que todas as VC são correlacionadas com a CQ, evidenciando que há relação de causa e efeito entre as VC e a CQ. As variáveis de controle X_1 e X_2 e as variáveis X_3 e X_4 são significativamente correlacionadas entre si, evidenciando multicolinearidade entre as VCs.

Na modelagem inicial das CQ em função das VC, apresentada na Tabela 3, o modelo de regressão Beta apresenta as VC (X_1, X_2, X_3 e X_4) como não significativas para explicar a CQ fração não conforme (Y), baseado no teste de *Wald* com 5% significância. Conforme a Tabela 2, o fator de inflação da variância (FIV) confirma a presença de multicolinearidade existente entre as VC ($FIV > 5$), evidenciando a interferência na modelagem dos dados do processo.

Tabela 1: Matriz de correlação entre a CQ e as VC do estudo simulado

	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
Y	1	0,818 (0,000)	0,812 (0,000)	0,641 (0,000)	0,452 (0,000)
X_1	0,818 (0,000)	1	0,916 (0,000)	0,096 (0,240)	0,160 (0,236)
X_2	0,812 (0,000)	0,916 (0,000)	1	0,035 (0,110)	0,027 (0,182)
X_3	0,641 (0,000)	0,096 (0,240)	0,035 (0,110)	1	0,884 (0,000)
X_4	0,452 (0,000)	0,160 (0,236)	0,027 (0,182)	0,884 (0,000)	1

Significante quando $p < 0,05$.

Fonte: Tabela elaborada pelo autor (2009)

Tabela 2: Estimativas dos coeficientes, erros padrões e valores de FIV para as VC do MRB

Variável	Estimativa	Erro padrão	Wald-test	Pr (> w)	FIV
<i>Intercepto</i>	-2,2573	0,01288	-175,19	< 0,0001	---
X_1	0,3277	0,30405	1,078	0,281	26,3
X_2	-0,1140	0,30587	-0,373	0,709	26,3
X_3	-0,1510	0,32668	-0,462	0,644	26,3
X_4	0,2471	0,32745	0,755	0,450	26,3
R_p^2	0,300				
AIC	-207,87				

Fonte: Tabela elaborada pelo autor (2009)

A aplicação da técnica de ACP objetiva eliminar a multicolinearidade existente e capturar a direção da variabilidade das VC do processo. A técnica permite obter l componentes principais (CPs) ortogonais, sendo cada CP formado por uma combinação linear distinta das 4 VC originais. Aplicando ACP nas VC correlacionadas do estudo, obtêm-se as estimativas de variabilidade, os percentuais de variação individual e acumulada, e os autovetores dos CPs, conforme a Tabela 3. Os autovetores dos CPs representam a carga e a direção da variabilidade das VC em cada CP.

Tabela 3: Estimativas da variabilidade e dos autovetores dos CPs

Parâmetro	CP ₁	CP ₂	CP ₃	CP ₄
Desvio-padrão	1,401	1,328	0,295	0,052
Percentual de Variação	0,526	0,392	0,058	0,024
Percentual acumulado	0,526	0,918	0,976	1,000
Variáveis				
X_1	0,70752	-0,00739	-0,03548	-0,05387
X_2	0,70660	-0,00561	-0,01021	-0,17002
X_3	0,00691	0,76507	-0,08980	0,06045
X_4	0,00810	0,77553	0,14964	-0,28583

Fonte: Tabela elaborada pelo autor (2009)

Na modelagem das CQ em função dos CPs, o modelo de regressão Beta apresenta os dois primeiros CPs (CP1 e CP2) como significativos para explicar a CQ fração (Y), baseado no teste de *Wald* com 5% de significância, conforme a Tabela 4.

Tabela 4: Estimativas dos coeficientes, erros padrões para os CP do MRB

Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	Wald-test	Pr (> w)	FIV
<i>Intercepto</i>	-2,2574	0,01290	-174,973	< 0,0001	---
CP ₁	0,1526	0,00928	16,440	< 0,0001	1,0
CP ₂	0,0658	0,00942	6,988	< 0,0001	1,0
CP ₃	0,2787	0,70911	0,5119	0,6091	1,0
CP ₄	0,4564	1,78326	0,8173	0,4148	1,0
R_p^2	0,7204				
AIC	-509,25				

Fonte Tabela elaborada pelo autor (2009)

A partir do modelo de regressão Beta ajustado por CPs obtêm-se os resíduos deviance (rd) do modelo, e as respectivas estimativas de média e variância amostral dos resíduos. Estas estimativas são utilizadas para calcular os limites de controle e linha central da CCMBCP, conforme equação (5). Ademais, são utilizadas também as estimativas de média e variância os escores dos CPs (CP1 e CP2) para calcular os limites de controle e linha central da CCCP a partir da equação (6).

Para ilustrar o monitoramento de novas observações em um processo sob controle, foram geradas 100 novas observações das quatro VC com distribuição Normal 4-variada multicolineares e da CQ com distribuição Beta. A partir das novas observações foram obtidos os escores dos dois CPs significativos e os valores preditos pelo MRB por CP estabelecido na Fase I.

Na Fase II, são estimados os novos resíduos deviance referentes às novas observações. Estes resíduos deviance são plotados na CCMBCP a fim de monitorar o comportamento do processo e detectar possíveis alterações devido a causas especiais. Na Fase III, os escores dos CPs são plotados nas respectivas CCCPs a fim de diagnosticar quais VC influenciaram na possível alteração do processo.

A Figura 1 ilustra o comportamento dos resíduos deviance do MRB por CP e dos escores dos CP1 e CP2 para as 100 novas observações. Nota-se que a CCMBCP para os resíduos deviance e as CCCPs para os escores dos CP1 e CP2 apresentam comportamento aleatório, dentro dos limites de controle, caracterizando um processo sob controle.

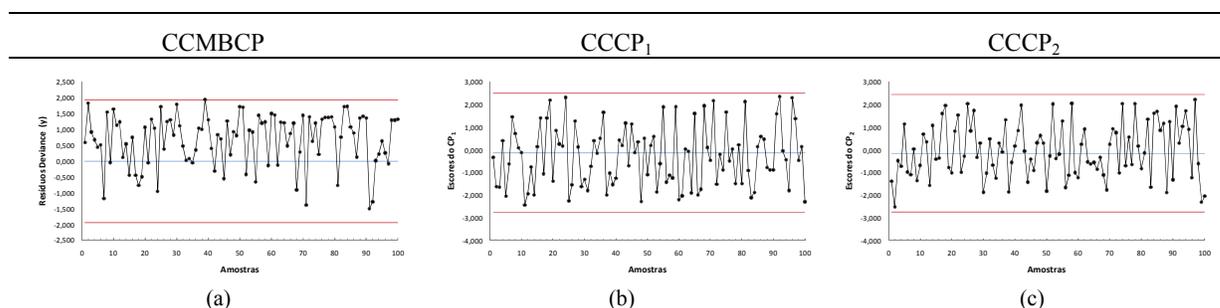


Figura 1: Carta de controle CCMBCP (a) para os resíduos e carta CCCP para os CP1 (b) e CP2 (c)

Fonte: Elaborado pelo autor (2009)

Para o processo fora de controle foram induzidas alterações aditivas nas VC em estudo, sendo, $X_t = X_t + \varphi$, $t = 1, \dots, l$;

$$\begin{aligned}
 \mathbf{z} &= \mathbf{U}'\mathbf{x} \\
 z_1 &= a_1(X_1 + \varphi) + a_2X_2 + \dots + a_kX_k \\
 z_2 &= b_1(X_1 + \varphi) + b_2X_2 + \dots + b_kX_k \\
 &\vdots = \vdots + \vdots + \dots + \vdots \\
 z_l &= l_1(X_1 + \varphi) + l_2X_2 + \dots + l_kX_k
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

A alteração aditiva considerou dois tamanhos: um sigma (1σ) e três sigmas (3σ). Por exemplo, uma alteração aditiva com tamanho 1σ indica que a média de X_t é modificada de μ_{x_t} para $\mu_{x_t} + 1\sigma_{x_t}$, onde σ_{x_t} é o desvio-padrão amostral da tésima VC, isto implica que, a média dos escores dos l CPs serão também alteradas.

As Figuras 2 e 3 ilustram o comportamento dos resíduos deviance do MRB por CP e dos escores dos CP1 e CP2 para as 100 novas observações com as alterações propostas. As alterações induzidas consistiram em: (i) alteração em X_1 ; (ii) alteração em X_4 ; e (iii) alteração em ambos X_1 e X_4 . As alterações nas VC X_1 e X_4 objetivaram avaliar a estrutura de correlação proposta e as altas cargas em CP1 e CP2, respectivamente.

Nas Figuras 2 e 3(a), (b) e (c), observa-se que as cartas CCMBPC para os resíduos deviance detectam pontos fora dos limites de controle, sinalizando causas especiais. As cartas CCCP1 mostram as alterações induzidas na VC X_1 , evidenciando o deslocamento da média do processo. As cartas CCCP2 apresentam o comportamento dos escores dentro dos limites de controle, embora, com uma leve alteração na variabilidade.

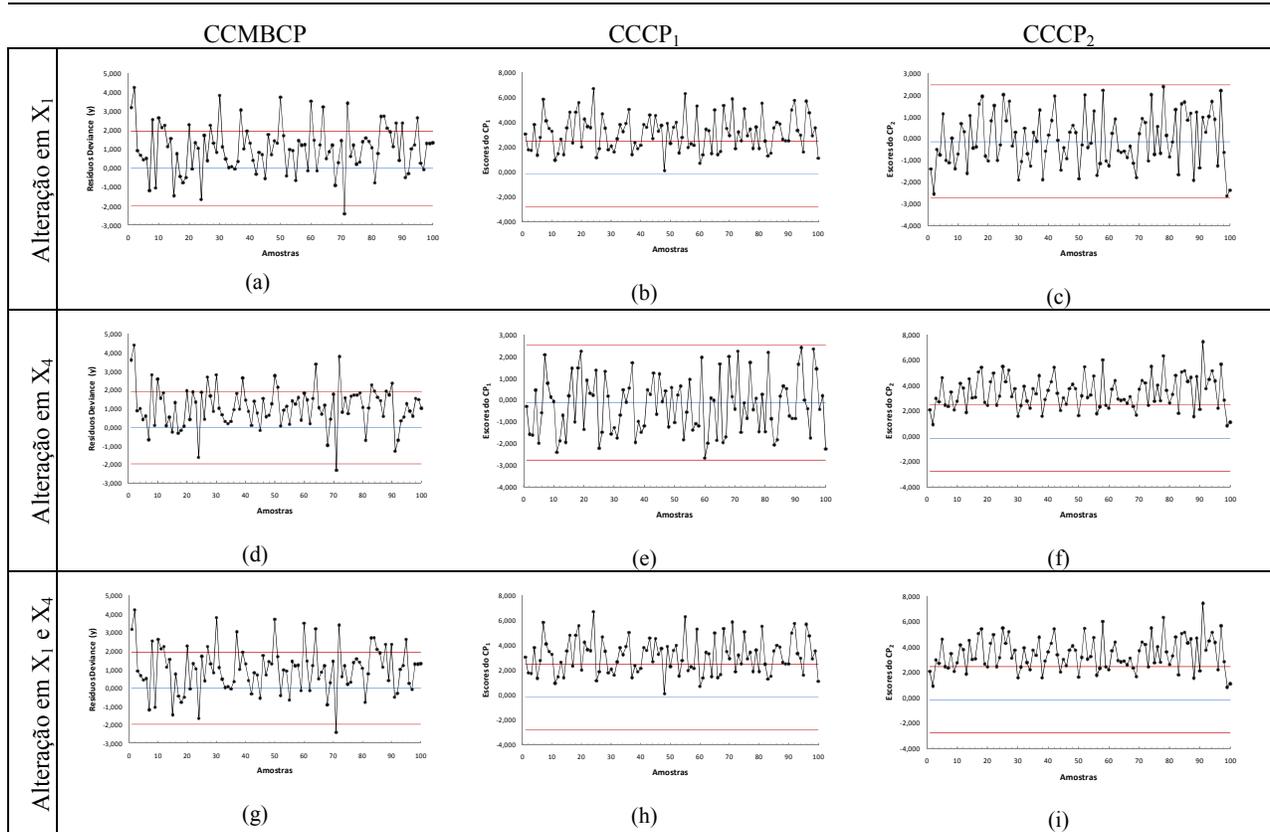


Figura 2: Carta de controle CCMBCP para os resíduos e carta CCCP para os CP1 e CP2 segundo alteração 1σ
Fonte: Elaborado pelo autor (2009)

As Figuras 2 e 3(d), (e) e (f) mostram que as cartas CCMBPC detectam os resíduos deviance fora dos limites de controle, sinalizando causas especiais, as cartas CCCP1 apresenta o comportamento dos escores dentro dos limites de controle, embora, com uma leve alteração na variabilidade e as cartas CCCP2 mostram as alterações induzidas na VC X_4 , evidenciando o deslocamento da média do processo.

Nota-se que as cartas CCMBPC detectam os resíduos deviance fora dos limites de controle, sinalizando causas especiais e as cartas CCCP1 e CCCP2 mostram as alterações induzidas nas VC X_1 e X_4 , evidenciando o deslocamento da média do processo, sem alteração na variabilidade (ver Figuras 2 e 3(g), (h) e (i)).

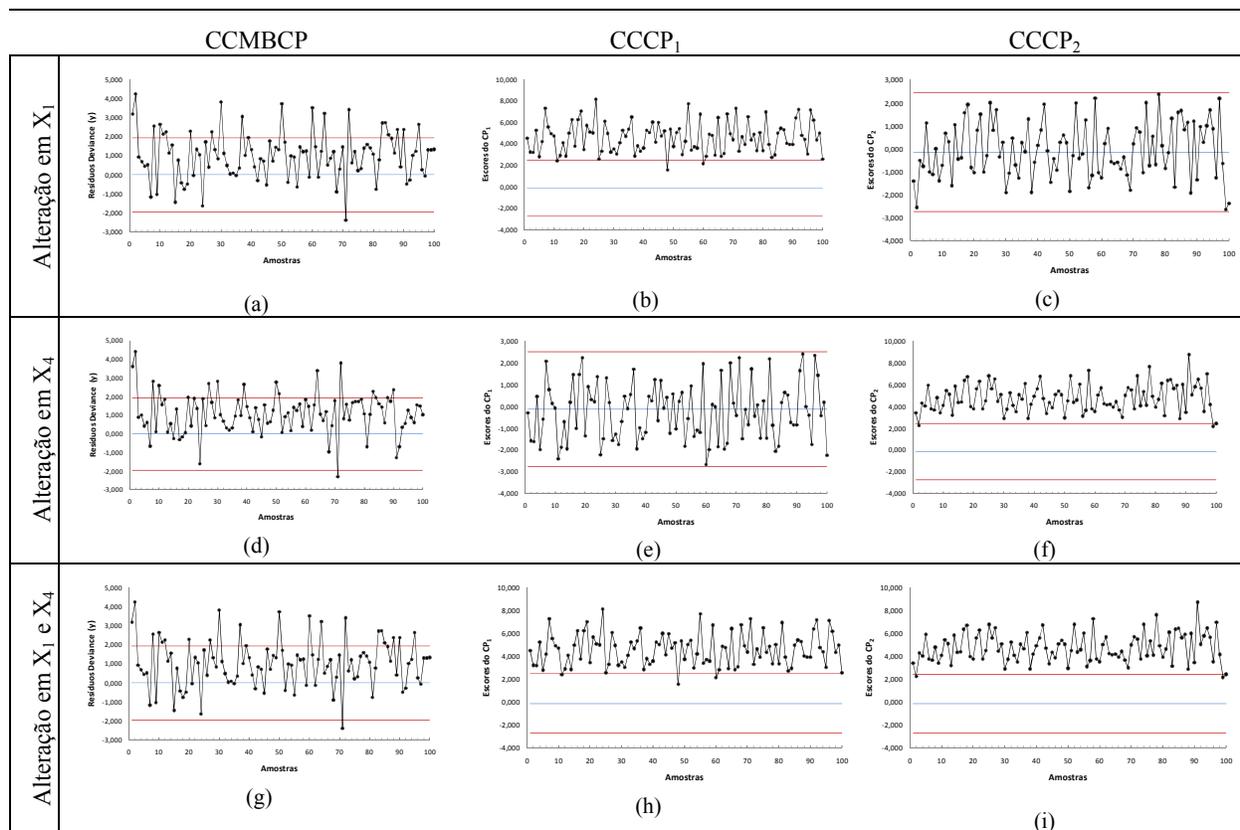


Figura 3: Carta de controle CCMBCP para os resíduos e carta CCCP para os CP1 e CP2 segundo alteração 3σ
Fonte: Elaborado pelo autor (2009)

4.1. Análise de Sensibilidade da CCMBCP

Foi realizado um estudo de simulação de Monte Carlo, utilizando o *software* livre R[®] v.2.9.0, para analisar a sensibilidade da carta CCMBCP em um processo sob controle e outro fora de controle. Para o processo sob controle foi calculado o número médio de amostras até a presença de uma falsa causa especial (NMA₀). O maior valor de NMA₀ indica uma menor probabilidade de alarmes falsos no processo. O NMA₀ pode ser escrito em função da probabilidade de erro tipo I (α), que é a probabilidade da carta de controle detectar uma alteração no modelo de referência monitorado quando o processo está sob controle estatístico.

Para o processo fora de controle foi calculado o número médio de amostras até a detecção de causas especiais (NMA₁). O menor valor de NMA₁ representa um menor número médio de amostras coletadas até a detecção da alteração induzida. O NMA₁ pode ser escrito em função da probabilidade de erro tipo II (γ), que é a probabilidade da carta de controle não detectar uma alteração no modelo de referência monitorado quando o processo está fora de controle estatístico (MONTGOMERY, 2005).

O cálculo dos valores de NMA₀ e NMA₁ consistiu na geração de 10.000 observações das quatro VC com distribuição Normal 4-variada multicolineares e da CQ com distribuição Beta e na estimação dos escores dos CPs, dos valores preditos e dos resíduos deviance pelo MRB por CP. A simulação do processo sob controle foi realizada 5.000 vezes, sendo computada a média e o erro-padrão dos percentuais de pontos fora dos limites de controle estatístico ($p_f(\%)$). O número médio de amostras até o falso alarme (NMA₀) para a carta CCMBCP foi calculado conforme:

$$NMA_0 = \frac{1}{\alpha} \quad (8)$$

em que α é a probabilidade de alarmes falsos definido por $\bar{p}_f(\%)$.

A simulação de um processo fora de controle foi realizada 5000 vezes induzindo alterações aditivas nas VC propostas, sendo calculada a média e erro-padrão do percentual de pontos entre os limites de controle até a detecção da causa especial ($p_s(\%)$). O número médio de amostras até a detecção da causa especial (NMA_1) para a carta CCMBCP, pode ser expresso por:

$$NMA_1 = \frac{1}{(1-\beta)_0} \quad (9)$$

em que β é a probabilidade de alarmes verdadeiros definido por $\bar{p}_f(\%)$.

A simulação foi desenvolvida com o valor de $w = 3$ para o cálculo dos limites de controle, obtendo para um processo sob controle um $NMA_0 \cong 357 (1,782)$ e para um processo fora de controle com mudança em X_1 um $NMA_1 \cong 3,218(0,024)$, com mudança em X_4 um $NMA_1 \cong 3,038(0,039)$ e com mudança em X_1 e X_4 um $NMA_1 \cong 1,819(0,017)$.

A CCMBCP proposta apresentou desempenho satisfatório no monitoramento da fração não conforme em função dos CPs, pois obteve um valor grande de NMA_0 para um processo sob controle e um valor pequeno de NMA_1 conforme as alterações induzidas de descontrole.

6. Considerações Finais

O objetivo deste artigo foi propor uma carta de controle baseada em modelos Beta por componentes principais (CCMBCP) para monitorar características de qualidade do tipo fração, com valores restritos ao intervalo $[0,1]$, em função das variáveis de controle multicolineares. Inicialmente foi apresentado um referencial teórico sobre modelos de regressão Beta, carta de controle baseada em modelos Beta, análise de componentes principais e carta de controle baseada em componentes principais. Na seqüência foi proposta a CCMBCP e os passos para a sua implantação.

A CCMBCP foi aplicada em um estudo de caso simulado de um processo de manufatura com uma CQ com distribuição Beta e quatro VC com distribuição Normal 4-variada multicolineares. A simulação de Monte Carlo foi realizada para um processo sob controle e outro fora de controle, induzindo diferentes alterações aditivas. Este estudo permitiu analisar o desempenho da carta CCMBCP na detecção de alterações induzidas no processo e a análise de diagnóstico utilizando as cartas CCCP.

Os resultados da análise de sensibilidade indicaram que a CCMBCP apresenta desempenho satisfatório no monitoramento de CQ do tipo fração em função de VC multicolineares. Adicionalmente, a análise de diagnóstico via CCCP proposta contribuiu na identificação das fontes de alteração do processo.

Conclui-se que CCMBCP pode ser uma ferramenta adequada para o monitoramento de CQ do tipo fração, com valores restritos ao intervalo $[0,1]$, que não seguem a distribuição Normal e que dependam de freqüentes ajustes nas VC, sendo estas multicolineares.

Referências

- COX, C.** Nonlinear quasi-likelihood models: applications to continuous proportions. Computational Statistical & Data Analysis, Los Angeles, v. 21, n. 4, p. 449-461, 1996.
- FERRARI, S.L.P.; CRIBARI-NETO, F.** Beta regression for modeling rates and proportions. Journal of Applied Statistics, Sheffield, v. 31, n. 7, p.799-816, 2004.
- HAWKINS, D. M.** Multivariate Quality Control Based on Regression-Adjusted Variables. Technometrics, Washington, v. 33, n. 1, p. 61-75, 1991.
- JACKSON, J. E.; MUDHOLKAR, G. S.** Control Procedures for Residuals Associated with Principal Component Analysis. Technometrics, Washington, v.21, n. 3, p. 341-349, 1979.
- JACKSON, J.E.** A User's guide to Principal Components. New York: John Wiley & Sons, 1991, 570p.

- JOHNSON, N.L.; KOTZ, S.; BALAKRISHNAN, N.** Continuous Univariate Distributions. v. 2, 2^a ed., New York: John Wiley & Sons, 1995, 717p.
- KIESCHNICK, R.; McCULLOUGH, B.D.** Regression analysis of variates observed on [0,1]: percentages, proportions and fractions. *Statistical Modelling*, Amsterdam, v. 3, n. 3, p. 193–213, 2003.
- KOURTI, T. & MACGREGOR, J. F.** Multivariate SPC Methods for Process and Product Monitoring. *Journal of Quality Technology*, Milwaukee, v. 28, n. 4, p. 409-428, 1996.
- MACGREGOR, J.F.** Using on-line process data to improve quality: challenges for statisticians. *International Statistical Review*, New York, v. 65, n. 3, p. 309-323, 1997.
- MOITRA, S.D.** Skewness and the Beta distribution. *Journal of the Operational Research Society*, Houndmills, v. 41, n. 10, p. 953–961, 1990.
- NETER, J.; KUTNER, M H.; NACHTSHEIM, C. J.; LI, W.** Applied Linear Statistical Models. 5^a ed., New York: Mc Graw-Hill/Irwin, 2005, 1396 p.
- PIERCE, D.A.; SCHAFER, D.W.** Residuals in generalized linear model. *Journal of the American Statistical Association*, Durham, v. 81, n. 396, p. 977–986, 1986.
- RENCHER, A.C.** Methods of Multivariate Analysis, 2^a ed., New York: John Wiley & Sons, 2002, 708p.
- ROCKE, D.M.** On the Beta transformation family. *Technometrics*, Washington, v. 35, n. 1, p. 72–81, 1993.
- SKINNER, K. R.; MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C.** Generalized Linear Model-based Control Charts for Discrete Semiconductor Process Data. *Quality and Reliability Engineering International*, Chichester, v. 20, n. 8, p. 777-786, 2004.
- WOODALL, W.H.** Controversies and Contradictions in Statistical Process Control. *Journal of Quality Technology*, Milwaukee, v. 32, n. 4, p.341–378, 2000.