

## Um modelo matemático para o problema de programação integrada de curto prazo em minas

Franklin Assunção Almeida<sup>1</sup>, Bruno Santos Pimentel<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Ciência da Computação  
Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG  
Avenida Presidente Antônio Carlos, 6627 – 31.270-210  
Belo Horizonte – Minas Gerais – Brazil

{franklin, brunosp}@dcc.ufmg.br

**Resumo.** Aplicações de pesquisa operacional para a indústria da mineração estão tradicionalmente concentradas no tratamento de problemas de maneira isolada e independente. No problema de programação integrada de curto prazo em minas, busca-se tratar simultaneamente todos os elementos que integram a cadeia de produção de uma mina levando em conta restrições de capacidade de produção, estoque e movimentação, bem como oferta de ROM (run-of-mine) e demanda por produtos finais. O objetivo é manipular os recursos de frentes de lavras, pátios de homogeneização, usinas de beneficiamento e estoques de maneira a atender a demanda em termos de qualidade e quantidade, minimizando perdas de produção e desvios de qualidade e encontrando o melhor sequenciamento de produção nas usinas de beneficiamento. Neste artigo é proposto um modelo matemático de programação inteira-mista que representa tal problema. Alguns resultados preliminares são apresentados, mostrando a sensibilidade do modelo para situações que podem ser observadas na realidade.

**PALAVRAS CHAVE.** Mineração. Cadeia de produção. Programação inteira-mista. PO na Indústria.

**Abstract.** Operations Research approaches for the mining industry often address problems in an isolated and independent way. In the integrated short-term scheduling problem for mines, we simultaneously tackle all elements that make up the production chain of a mine, taking into account production, storage and transportation capacity constraints, as well as ROM (run-of-mine) supply and iron ore demand. The goal is to manipulate the resources of mine benches, homogenization stockyards, processing plants and product stockpiles in order to meet iron ore demand in terms of quality and quantity, minimizing production losses, deviations from quality targets and finding the best production sequencing at the processing plants. This paper introduces a mixed integer mathematical programming model that represents this problem. Some preliminary results are presented which show the sensibility of the model to some situations that often occur in practical scenarios.

**KEYWORDS.** Mining. Production chain. Mixed integer programming. OR in the Industry.

## 1. Introdução

Operações na indústria de mineração, em especial em minas de minério de ferro, envolvem uma complexa alocação de diversos recursos que incluem: frentes de lavras, pilhas de minério bruto formadas em pátios de homogeneização, usinas de beneficiamento, áreas de estocagem de produtos, mão de obra, caminhões, escavadeiras, correias transportadoras, maquinário para empilhamento e retomada de minérios e composições ferroviárias.

Dessa forma, quando a programação de operações em uma ou mais minas de um mesmo complexo produtor é tratada, estamos interessados em abordar diversos problemas. Em primeiro lugar, deve-se controlar a exploração das frentes de lavras para a formação de pilhas de minério bruto a serem homogeneizadas. Deseja-se ainda controlar a sequência da produção pela usina de beneficiamento ao longo do horizonte de programação utilizando as pilhas de minério mais adequadas do pátio de homogeneização. A geração desses produtos tem como fim o atendimento às demandas por minério de ferro, em termos de quantidade e qualidade, determinadas pelos carregamentos ferroviários que chegam ao pátio de produtos finais. A produção de cada minério implica em atender às metas de qualidade para um conjunto de parâmetros químicos e físicos, o que por sua vez implica, em termos de programação de produção, em controlar a exploração de minério bruto de maneira a formar pilhas que atendam às especificações de qualidade dos produtos finais que serão gerados.

A literatura sobre o assunto cobre alguns aspectos do problema de programação de curto-prazo em minas de forma independente, mas poucos tratam da integração de decisões. [Moraes et al. 2006] propôs um modelo de programação linear por metas para o problema de formação e retomada de pilhas de produtos minério de acordo com metas de tamanho e qualidade, enquanto [Toffolo 2009] desenvolve um conjunto de heurísticas sobre um modelo multi-objetivo com características de programação linear por metas que, dentre outros aspectos, trata da blendagem de produtos gerados por usinas de beneficiamento para o atendimento de demandas com qualidade específica.

O objetivo deste trabalho é propor um modelo matemático de programação inteira mista, com características de programação linear por metas [Ignizio 1985], para o problema de programação integrada de curto prazo em minas, considerando restrições práticas inspiradas no funcionamento de grandes empresas mineradoras.

## 2. Operações nas minas

A exploração do minério bruto ou ROM (*run of mine*) ocorre nas frentes de lavras das minas, onde é removido e transportado até as instalações de peneiramento e britagem. Cada frente de lavra explorada apresenta um conjunto de características físicas e químicas previamente conhecidas. [Sattarvand and Niemann-Delius 2008] mostra a aplicação de algumas meta-heurísticas para resolver o problema de planejamento e sequenciamento de exploração de blocos de minérios das frentes de lavras de uma mina. O sequenciamento de exploração de blocos em lavras é essencial para se determinar a quantidade de minério bruto que estará disponível para a mina a cada período e para maximizar o valor econômico do empreendimento mineral. O trabalho de [da Costa et al. 2005] desenvolve um modelo de programação linear por metas para um problema que aborda a determinação do ritmo de exploração das frentes de lavra, levando em conta a alocação de caminhões e as necessidades de insumo das usinas de beneficiamento, em termos de qualidade e quantidade.

O minério ROM extraído das lavras é enviado para o pátio de homogeneização onde é disposto em pilhas. Tais pilhas devem ser formadas de acordo com metas de tamanho que por sua vez são determinadas por restrições de espaço disponível e de operabilidade do maquinário responsável por sua formação e retomada. Na formação dessas pilhas é

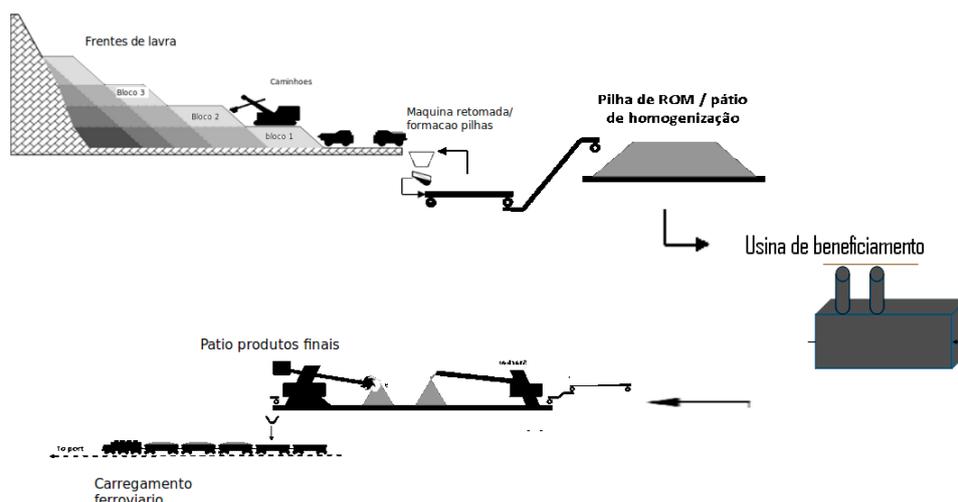


Figura 1. Visão geral do problema de programação de minas

permitida a mistura de minérios provenientes de diferentes frentes de lavra. Essa prática possibilita a formação de pilhas de minério insumo com os parâmetros de qualidade mais adequados para a formação de produtos finais. [Moraes et al. 2006] trata da construção de um modelo de programação linear por metas para o problema de formação e retomada de pilhas de produtos de minério que possibilitem o atendimento de demandas por produtos em termos de quantidade e qualidade.

As usinas de beneficiamento recebem como insumo o minério ROM das pilhas do pátio de homogeneização. Neste trabalho, consideramos que cada mina possui apenas uma usina de beneficiamento. Um aspecto prático importante e que deve ser ressaltado é o fato de as pilhas do pátio de homogeneização não serem misturadas ao serem consumidas, ou seja, não há blendagem na retomada das pilhas. Nas usinas de beneficiamento podem ser gerados diferentes produtos em famílias distintas: finos (*sinter feed*) e superfinos (*pellet feed*). Basicamente esses produtos se diferenciam pela faixa granulométrica e por serem aplicados, posteriormente, em processos de aglomeração distintos, como é visto em [Toffolo 2009].

A cada turno de funcionamento da usina de beneficiamento ocorre a coprodução de um produto de cada família. Os diversos produtos que podem ser gerados por cada usina de beneficiamento apresentam, para cada parâmetro de qualidade, faixas de qualidade que devem ser atendidas. O processo de beneficiamento busca reduzir as diferenças entre os parâmetros originais de qualidade do minério ROM e os parâmetros de qualidade dos produtos finais. Dessa forma, quanto maiores os desvios entre qualidade do insumo e do produto, menor será o rendimento da usina.

Os produtos gerados pelas usinas de beneficiamento são transportados para o pátio de produtos finais onde são novamente empilhados. Um mesmo pátio de produtos finais pode ser compartilhado por uma ou mais minas de um mesmo complexo produtor. A partir desses pátios, os produtos são carregados em uma composição ferroviária onde são levados aos clientes siderúrgicos nacionais ou aos portos para exportação.

Em termos de programação, considera-se que uma composição ferroviária sempre é

carregada por completo, mesmo que os produtos demandados não estejam disponíveis nas qualidades almejadas. Por meio da aplicação de penalidades, permite-se que quantidades de outros produtos, que não aqueles que estão sendo demandados em um dado período, sejam utilizadas para o carregamento de um trem.

### 3. Problema de programação integrada de curto prazo em minas

Conforme foi discutido anteriormente, alguns aspectos do problema de programação de curto prazo em minas podem ser vistos em diferentes aplicações da indústria da mineração.

Este problema adquire características de integração de subproblemas como no planejamento integrado abordado em [Pimentel et al. 2010] e [Almeida and Pimentel 2009], por tratar simultaneamente da integração do controle de exploração de frentes de lavras, formação de pilhas no pátio de homogeneização, controle de sequenciamento de produção nas usinas de beneficiamento e atendimento às demandas num mesmo modelo matemático. Trata-se também do atendimento de metas de qualidade, impostas pela geração de produtos na usina de beneficiamento e na formação de pilhas do pátio de homogeneização semelhante ao apresentado em [da Costa et al. 2005] e [Moraes et al. 2006], além de buscar o melhor sequenciamento de geração de produtos finais — ou primários [Toffolo 2009] — nas usinas de beneficiamento para o atendimento das demandas impostas pelos carregamentos ferroviários que chegam ao complexo de minas. [Pimentel et al. 2010] e [Almeida and Pimentel 2009] postulam o pequeno número de trabalhos que abordam problemas da indústria da mineração de maneira integrada. O mesmo ocorre quando tratamos apenas dos complexos mineradores.

O problema de programação de curto prazo em minas é tratado aqui por meio de um modelo matemático de programação inteira-mista que adota algumas estratégias observadas em programação linear por metas [Ignizio 1985], de fluxo multi-produto e multi-período e de sequenciamento. Estamos interessados em atender demandas especificadas em termos de qualidade e quantidade nos pontos de carregamento ferroviário com o melhor sequenciamento de produção nas usinas de beneficiamento, minimizando desvios de qualidade e perdas de produção das frentes lavras.

#### 3.1. Notação

##### Conjuntos :

$T$  : períodos de tempo no horizonte de programação;

$M$  : conjunto de minas que formam um complexo minerador;

$F^m$  : conjunto de frentes de lavra da mina  $m \in M$ .

$H^m$  : conjunto de pilhas de minério que podem ser formadas no pátio de homogeneização da mina  $m \in M$ ;

$P_f^m$  : conjunto de produtos finais do tipo fino gerados pela usina de beneficiamento da mina  $m \in M$ ;

$P_f$  : conjunto de todos os produtos finais do tipo fino gerados pelas usinas de beneficiamento do complexo;

$P_s^m$  : conjunto de produtos finais do tipo superfino gerados pela usina de beneficiamento da mina  $m \in M$ ;

$P_s$  : conjunto de produtos finais do tipo superfino gerados pelas usinas de beneficiamento do complexo;

$P^m$  : conjunto de produtos finais gerados pela usina de beneficiamento da mina  $m \in M$ .

$$P^m = P_f^m \cup P_s^m;$$

$P$  : conjunto de produtos finais gerados pelas usinas de beneficiamento do complexo.  $P = P_f \cup P_s$ .

$K$  : conjunto de parâmetros de qualidade avaliados em cada minério ROM ou produto final.

**Parâmetros :**

$O_i$  : oferta estipulada para a frente de lavra  $i \in F^m$  da mina  $m \in M$  para o horizonte de programação;

$\alpha_i$  : penalidade por unidade de massa de minério ROM não explorada da frente de lavra  $i \in F^m$  da mina  $m \in M$ ;

$\omega_i$  : limite de retirada de minério da frente de lavra  $i \in F^m$  da mina  $m \in M$ ;

$\rho_{ik}$  : parâmetro que indica a meta de qualidade, em valor percentual, para o parâmetro  $k \in K$  do minério ROM da frente de lavra  $i \in F^m$  na mina  $m \in M$ ;

$Q^m$  : meta de formação, em unidades de massa, de cada pilha  $j$  do pátio de homogeneização  $H^m$  da mina  $m \in M$ ;

$\gamma_+^m$  : penalidade por desvio positivo em relação a meta de formação  $Q^m$  de uma pilha no pátio de homogeneização da mina  $m \in M$ ;

$\gamma_-^m$  : penalidade por desvio negativo em relação a meta de formação  $Q^m$  de uma pilha no pátio de homogeneização da mina  $m \in M$ ;

$\delta_{pk}^m$  : penalidade por desvio positivo em relação a meta de qualidade do parâmetro  $k \in K$  na geração de um produto  $p \in P^m$  a partir de cada pilha  $j \in H^m$  da mina  $m \in M$ ;

$\eta_{pk}^m$  : penalidade por desvio negativo em relação a meta de qualidade do parâmetro  $k \in K$  na geração de um produto  $p \in P^m$  a partir de cada pilha  $j \in H^m$  da mina  $m \in M$ ;

$C^m$  : capacidade máxima de transporte, em unidades de massa, entre as pilhas do pátio de homogeneização e a usina de beneficiamento da mina  $m \in M$ ;

$\beta^m$  : valor % da quantidade de minério ROM processado na usina de beneficiamento da mina  $m \in M$  que gera um produto  $P_f^m$ ;

$\phi_{kp}^m$  : perda, em unidades de massa, do produto  $p \in P^m$ , gerado na usina de beneficiamento da mina  $m \in M$ , para cada unidade de desvio positivo em relação a meta do parâmetro  $k \in K$ ;

$\varphi_{kp}^m$  : perda, em unidades de massa, do produto  $p \in P^m$ , gerado na usina de beneficiamento da mina  $m \in M$ , para cada unidade de desvio negativo em relação a meta do parâmetro  $k \in K$ ;

$W^m$  : capacidade total, em unidades de massa, de produção da usina de beneficiamento da mina  $m \in M$ ;

$m_{pk}$  : meta % para o valor do parâmetro de qualidade  $k \in K$  no produto  $p \in P$ ;

$D_p^t$  : demanda pelo produto  $p \in P$  no período  $t$ ;

$h_{pb}$  : penalidade aplicada para cada unidade de massa do produto  $b \in P$  utilizada para atender a demanda do produto  $p \in P$ ;

$n_p^m$  : penalidade por trocar os parâmetros de produção da usina de beneficiamento da mina  $m \in M$  para passar a produzir o produto  $p \in P^m$ ;

$U_p^1$  : estoque inicial do produto  $p \in P$  no pátio de produtos finais;

$U_p^T$  : estoque final mínimo exigido para o produto  $p \in P$  no pátio de produtos finais;

$U_p$  : limite de capacidade para o produto  $p \in P$  no pátio de produtos finais;

$U$  : limite de capacidade do pátio de produtos finais;

**Variáveis :**

$x_{ij}^t$  : quantidade do minério ROM explorada da frente de lavra  $i \in F^m$  aplicada na formação da pilha  $j \in H^m$  na mina  $m \in M$  em cada período  $t$ . A variável é definida até o período  $T - 1$ , já que pela restrição prática que condiciona uma pilha formada num dado período só poder ser consumida a partir do período seguinte, preferimos por construir um modelo que impeça a formação de uma pilha no último período;

- $pl_i$  : quantidade de minério ROM não explorado da frente de lavra  $i \in F^m$  da mina  $m \in M$  ao longo do horizonte de programação;
- $f_j^t$  : variável binária que determina se a pilha  $j \in H^m$  da mina  $m \in M$  é formada no período  $t$  para  $t \leq T - 1$ . Tendo em vista que não trabalhamos, neste modelo, com a formação de pilhas no último período da programação, não definimos essa variável para o último período;
- $c_j^t$  : variável binária que determina se a pilha  $j \in H^m$  da mina  $m \in M$  é consumida no período  $t$ , para  $t \geq 2$ . Tendo em vista que uma pilha só pode ser consumida a partir do segundo período da programação, não definimos essa variável no primeiro período da programação;
- $dh_{j+}^t$  : desvio positivo em relação a meta formação  $Q_m$  da pilha  $j \in H^m$  da mina  $m \in M$  no período  $t \leq T - 1$ ;
- $dh_{j-}^t$  : desvio negativo em relação a meta formação  $Q_m$  da pilha  $j \in H^m$  da mina  $m \in M$  no período  $t \leq T - 1$ ;
- $dq_{jpk+}^{ft}$  : desvio positivo em relação a meta para o parâmetro de qualidade  $k \in K$  do produto  $p \in P^m$  gerado a partir da pilha  $j \in H^m$ , da mina  $m \in M$ , formada no período  $f$  e consumida no período  $t \leq T - 1$ . Essa variável é definida em termos de unidade de massa;
- $dq_{jpk-}^{ft}$  : desvio negativo em relação a meta para o parâmetro de qualidade  $k \in K$  do produto  $p \in P^m$  gerado a partir da pilha  $j \in H^m$ , da mina  $m \in M$ , formada no período  $f$  e consumida no período  $t \leq T - 1$ . Essa variável é definida em termos de unidade de massa;
- $w_{jp}^{fc}$  : variável binária determina se a pilha  $j \in H^m$  do pátio de homogeneização da mina  $m \in M$ , formada no período  $f \leq T - 1$  foi consumida no período  $c \in T$ , tal que  $c > f$ , para a geração do produto  $p \in P^m$ ;
- $g_p^{mt}$  : determina se o produto  $p \in P^m$  foi gerado pela usina de beneficiamento da mina  $m \in M$  no período  $t \geq 2$ ;
- $y_{jp}^{fc}$  : quantidade de minério ROM que sai da pilha  $j \in H_m$  formada no período  $f \in 1, 2, \dots, T - 1$  e consumida no período  $c \in f + 1, f + 2, \dots, T$  utilizada na usina de beneficiamento da mina  $m \in M$  para formar o produto  $p \in P$ . Deve-se observar que dois produtos são gerados pela usina em cada período e para esses dois produtos o valor de  $y_{jp}^{fc}$  será o mesmo, embora a quantidade gerada de tais produtos seja diferente;
- $z_p^{mt}$  : quantidade do produto  $p \in P^m$  que foi gerado pela usina de beneficiamento da mina  $m \in M$  no período  $t \geq 2$ ;
- $v_p^{mt}$  : variável binária que determina se um produto  $p \in P^m$  que não era produzido na usina da mina  $m \in M$  no período  $t - 1$  passou a ser produzido no período  $t$ . É definida para  $t \geq 3$ ;
- $s_{pb}^t$  : massa do produto  $b \in P$ , armazenado no pátio de produtos finais, utilizada para atender a demanda pelo produto  $p \in P$ ;
- $u_p^t$  : estoque do produto  $p \in P$  no pátio de produtos finais, para  $t \geq 2$ ;

### 3.2. Modelo matemático

*Minimizar*

$$\sum_{m \in M} \sum_{i \in F^m} (\alpha_i pl_i) + \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{m \in M} \sum_{j \in H^m} (\gamma_+^m dh_{j+}^t + \gamma_-^m dh_{j-}^t)$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{c=t+1}^T \sum_{m \in M} \sum_{j \in H^m} \sum_{p \in P^m} \sum_{k \in K} (\delta_{pk}^m dq_{jpk+}^{tc} + \eta_{pk}^m dq_{jpk-}^{tc}) \\
 & + \sum_{t=3}^T \sum_{m \in M} \sum_{p \in P} (n_p v_p^{mt}) + \sum_{t=2}^T \sum_{p \in P} \sum_{b \in P} (h_{pb} s_{pb}^t)
 \end{aligned}$$

$$\sum_{t=1}^{T-1} \sum_{j \in H^m} x_{ij}^t + pl_i = O_i \quad \forall i \in F^m, \forall m \in M \quad (1)$$

$$c_j^t + f_j^t \leq 1, \quad \forall j \in H^m, \forall m \in M, \forall t = 2, 3, \dots, T-1 \quad (2)$$

$$\sum_{d=2}^t c_j^d \leq \sum_{d=1}^{t-1} f_j^d, \quad \forall j \in H^m, \forall m \in M, \forall t \in 2, 3, \dots, T \quad (3)$$

$$\sum_{d=1}^t f_j^d \leq \sum_{d=2}^t c_j^d + 1, \quad \forall j \in H_m, \forall m \in M, \forall t \in 2, \dots, T-1 \quad (4)$$

$$\sum_{i \in F_m} x_{ij}^t - dh_{j+}^t + dh_{j-}^t = Q_m * f_j^t, \quad \forall j \in H_m, \forall m \in M, \forall t \in 1, 2, \dots, T-1 \quad (5)$$

$$\sum_{i \in F^m} \rho_{ik} x_{ij}^t - \sum_{c=t+1}^T \sum_{p \in P^m} dq_{jpk+}^{tc} + \sum_{c=t+1}^T \sum_{p \in P^m} dq_{jpk-}^{tc} = \sum_{c=t+1}^T \sum_{p \in P^m} m_{pk} y_{jp}^{tc}, \quad \forall k \in K, \quad (6)$$

$$\forall j \in H^m, \quad \forall m \in M, \forall t \in 1, 2, \dots, T-1$$

$$dq_{jpk+}^{tc} \leq C^m * w_{jp}^{tc}, \quad \forall k \in K, \forall p \in P^m, \forall j \in H^m, \forall t \in 1, 2, \dots, T-1, \forall c = t+1, \dots, T \quad (7)$$

$$dq_{jpk-}^{tc} \leq C^m * w_{jp}^{tc}, \quad \forall k \in K, \forall p \in P^m, \forall j \in H^m, \forall t \in 1, 2, \dots, T-1, \forall c = t+1, \dots, T \quad (8)$$

$$\sum_{c=t+1}^T w_{jp}^{tc} \leq f_j^t, \quad \forall p \in P^m, \forall j \in H^m, \forall m \in M, \forall t \in 1, 2, \dots, T-1 \quad (9)$$

$$\sum_{f=1}^{t-1} w_{jp}^{ft} \leq c_j^t, \quad \forall p \in P^m, \forall j \in H^m, \forall m \in M, \forall t \in 2, 3, \dots, T \quad (10)$$

$$\sum_{f=1}^{t-1} w_{jp}^{ft} \leq g_p^t, \quad \forall p \in P^m, \forall j \in H^m, \forall m \in M, \forall t \in 2, 3, \dots, T \quad (11)$$

$$y_{jp}^{fc} \leq C^m w_{jp}^{fc}, \quad \forall j \in H^m, \forall m \in M, \forall f \in 1, 2, \dots, T-1, \forall c = f+1, \dots, T \quad (12)$$

$$\sum_{i \in F} x_{ij}^t - \sum_{c=t+1}^T \sum_{p \in P_f^m} y_{jp}^{tc} = 0 \quad \forall j \in H^m, \forall m \in M, \forall t \in 1, 2, \dots, T-1 \quad (13)$$

$$\sum_{i \in F} x_{ij}^t - \sum_{c=t+1}^T \sum_{p \in P_g^m} y_{jp}^{tc} = 0 \quad \forall j \in H^m, \forall m \in M, \forall t \in 1, 2, \dots, T-1 \quad (14)$$

$$\sum_{p \in P_f^m} g_p^{mt} = 1, \quad \forall m \in M, \forall t \in 2, 3, \dots, T \quad (15)$$

$$\sum_{p \in P_s^m} g_p^{mt} = 1, \quad \forall m \in M, \forall t \in 2, 3 \dots T \quad (16)$$

$$v_p^{mt} - g_p^{mt} + g_p^{mt-1} \geq 0, \quad \forall p \in P, \forall t \in 3, 4 \dots T - 1T \quad (17)$$

$$\beta^m * \sum_{f=1}^{t-1} \sum_{j \in H^m} y_{jp}^{ft} - z_p^t - \sum_{f=1}^{t-1} \sum_{j \in H^m} \sum_{k \in K} \phi_{pk}^m dq_{jpk+}^{ft} - \sum_{f=1}^{t-1} \sum_{j \in H^m} \sum_{k \in K} \varphi_{pk}^m dq_{jpk-}^{ft} = 0 \quad (18)$$

$$\forall p \in P_f^m, \forall m \in M, \forall t \in 1, 2 \dots T - 1$$

$$(1 - \beta^m) * \sum_{f=1}^{t-1} \sum_{j \in H^m} y_{jp}^{ft} - z_p^{mt} - \sum_{f=1}^{t-1} \sum_{j \in H^m} \sum_{k \in K} \phi_{pk}^m dq_{jpk+}^{ft} - \sum_{f=1}^{t-1} \sum_{j \in H^m} \sum_{k \in K} \varphi_{pk}^m dq_{jpk-}^{ft} = 0 \quad (19)$$

$$\forall p \in P_f^m, \forall m \in M, \forall t \in 1, 2 \dots T - 1$$

$$\sum_{p \in P^m} z_p^{mt} \leq W^m \quad \forall m \in M, \forall t \in 1, 2 \dots T - 1 \quad (20)$$

$$\sum_{m \in M} z_p^{mt} - \sum_{b \in P} s_{bp}^t = u_p^t - u_p^{t-1} \quad \forall p \in P_f^m, \forall t \in T \quad (21)$$

$$u_p^t \geq U_p^T \quad \forall p \in P, \forall t = T \quad (22)$$

$$\sum_{b \in P} s_{pb}^t = D_p^t, \quad \forall p \in P, \quad \forall t \in T \quad (23)$$

$$0 \leq x_{ij}^t \leq \omega_i, \quad \forall i \in F_m, \quad \forall j \in H_m, \quad \forall m \in M, \quad \forall t \in T \quad (24)$$

$$pl_i \geq 0, \quad \forall i \in F_m, \forall m \in M \quad (25)$$

$$c_j^t, f_j^t \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in H^m, \quad \forall m \in M, \quad \forall t \in T \quad (26)$$

$$dh_{j+}^t, dh_{j-}^t \geq 0, \quad \forall j \in H^m, \quad \forall m \in M, \quad \forall t \in T \quad (27)$$

$$y_{jp}^{fc} \geq 0, \quad \forall j \in H, \quad \forall f \in 0, 1, \dots T, \quad \forall c \in f + 1, \dots T \quad (28)$$

$$g_p^{mt}, v_p^{mt} \in \{0, 1\}, \quad \forall p \in P, \quad \forall t \in T \quad (29)$$

$$w_{pj}^{fc} \in \{0, 1\}, \quad \forall p \in P, \quad \forall f \in 0, 1, \dots T, \quad \forall c \in f + 1, \dots T, \quad j \in H \quad (30)$$

$$dq_{jpk+}^{tc}, dq_{jpk-}^{tc} \geq 0, \quad \forall k \in K, \quad \forall t, c \in T \quad (31)$$

$$s_{pb}^t \geq 0, \quad \forall p \in P, \quad \forall b \in P, \quad \forall t \in T \quad (32)$$

$$0 \leq u_p^t \leq U_p, \quad \forall p \in P, \quad \forall t \in T \quad (33)$$

$$0 \leq \sum_{p \in P} u_p^t \leq U, \quad \forall p \in P, \quad \forall t \in T \quad (34)$$

A função objetivo busca minimizar as perdas de oferta nas frentes de lavra, os desvios em relação às metas de qualidade dos produtos que serão gerados a partir das pilhas de ROM, os desvios em relação às metas de tamanho das pilhas de ROM, as penalidades relativas ao atendimento de demandas com produtos fora da especificação, além de obter a sequência ótima de geração de produtos na usina de beneficiamento.

Com a restrição (1), determina-se que ao longo do horizonte de programação deseje-se que toda a oferta das frentes de lavra seja explorada. Essa restrição busca o máximo de fidelidade ao plano de exploração da mina, considerado um dado de entrada para este problema.

As restrições (2) e (5) determinam que uma mesma pilha não pode ser formada e con-

sumida num mesmo período, além de estabelecerem uma meta de tamanho, em unidades de massa, para a formação da pilha. Tal restrição reflete limites de capacidade do pátio e produtividade do maquinário responsável pelo trabalho sobre as pilhas.

Já nas restrições (3) e (4), representamos que uma pilha só deve ser retomada após ter sido formada, da mesma maneira que só será formada após o espaço determinado para uma pilha, que estava sendo retomada, tiver sido liberado.

Por meio da restrição (6), definimos como meta de qualidade para cada parâmetro o valor de sua proporção ideal no produto final a ser produzido pela usina de beneficiamento. Uma vez que os desvios de qualidade de cada pilha devem ser minimizados, as restrições (7) e (8) definem que as variáveis de desvio só podem assumir valores positivos caso as respectivas pilhas tenham sido formadas e consumidas na geração dos produtos.

Com as restrições (9), (10) e (11) vincula-se as variáveis de destino das pilhas com o consumo, formação e com o produto gerado na usina no período em que a pilha tiver sido retomada.

O fluxo de saída de ROM de uma pilha do pátio de homogeneização deve estar condicionado à variável de destino da pilha, ou seja, só pode haver saída de produtos de uma pilha se ela já tiver sido formada e se ela for consumida num dado período. Isso é garantido por meio da restrição (12). Pelas restrições (13) e (14) efetua-se o balanço de massa de cada pilha de ROM em cada pátio de homogeneização. A usina de beneficiamento co-produzirá dois produtos por período, implicando em um fluxo de saída para cada produto gerado a partir da pilha. Com as restrições (18) e (19) modela-se o balanço de massa das pilhas utilizadas, levando-se em conta a perda de rendimento decorrente dos desvios em relação às metas de qualidade.

Em (15) e (16) determina-se que apenas um produto de cada família possa ser gerado em uma usina num mesmo período.

Por meio da restrição (20), faz-se o limite máximo de produção de uma usina em termos de unidade de massa. Com a restrição (17) tornamos a variável  $v_p^{mt}$  igual a 1 toda vez que um produto  $p$  passa a ser produzido na respectiva usina de beneficiamento, ou seja, sempre que os parâmetros de produção da usina forem alterados para que outro produto seja produzido.

Por fim, as restrições (21), (22) e (23) estabelecem o balanço de estoque do pátio de produtos finais, o limite de estoque de cada produto no pátio e o atendimento à demanda do carregamento ferroviário, respectivamente.

As restrições restantes determinam os limites e tipos das variáveis de decisão.

#### 4. Testes computacionais

O modelo foi implementado através da biblioteca Concert para a linguagem Java, versão 1.6, utilizando o software de otimização CPLEX 12.1. Os testes foram executados em máquinas Intel Xeon Quad Core 2.00GHz 64bits, com 8GB de memória RAM e sistema operacional Linux, distribuição Ubuntu 9.04.

Propomos uma instância que representa um complexo minerador com uma única mina com quatro frentes de lavra e um pátio de homogeneização com capacidade de estocagem de quatro pilhas. As ofertas das frentes de lavra foram cerca de 20% superiores às demandas, e estas equivalem a aproximadamente 80% da capacidade de produção da usina de beneficiamento. A cada período, dois produtos são demandados, em uma sequência determinada aleatoriamente, mas que evita a demanda pelo mesmo produto em dois períodos consecutivos, pois acreditamos que a demanda pelo mesmo produto por muitos períodos consecutivos pode tornar as instâncias mais fáceis de serem resolvidos dificultando assim

uma análise mais fidedigna dos resultados. Os experimentos tiveram tempo máximo de duração de 30 minutos de processamento do CPLEX.

O primeiro experimento visa à análise da sensibilidade do modelo as variações das penalidades sobre os desvios de qualidade dos parâmetros avaliados. A tabela 1 mostra as diferentes metas dos parâmetros de qualidade para os quatro produtos gerados. Neste caso utilizamos apenas componentes químicos, indetificados por seus símbolos, mas características físicas também podem ser levadas em conta. Os valores são ilustrativos.

Produtos	<i>Fe</i>	<i>SiO<sub>2</sub></i>	<i>Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub></i>	<i>Mn</i>	<i>P</i>
PF1(fino)	64%	4%	1%	0,8%	0,06%
PF2(fino)	50%	2%	5%	0,13%	0,05%
SF1(superfino)	64%	1%	5%	1,5%	0,01%
SF2(superfino)	66%	0,9%	10%	3%	0,06%

**Tabela 1. Metas dos parâmetros dos produtos**

A primeira análise feita sobre o modelo é com relação ao peso das penalidades para os parâmetros, que apresentam diferentes proporções nos produtos. Em cada execução o parâmetro considerado mais penalizado, apresentava uma penalidade 10 vezes superior aos outros parâmetros, em cada produto, para os desvios em relação as metas de qualidade.

Parâmetro penalizado	Tempo solução (seg)	Função objetivo	Gap (%)
Teste com 3 períodos			
<i>Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub></i>	0,41	74.431	0,0
<i>Fe</i>	0,35	81.410	0,0
<i>Mn</i>	0,4	73.293	0,0
<i>P</i>	0,41	72.119	0,0
<i>SiO<sub>2</sub></i>	0,31	74.029	0,0
Teste com 7 períodos			
<i>Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub></i>	68,94	75.709	0,0
<i>Fe</i>	77,83	95.432	0,0
<i>Mn</i>	91,69	70.534	0,0
<i>P</i>	97,24	66.854	0,0
<i>SiO<sub>2</sub></i>	89,18	74.783	0,0
Teste com 15 períodos			
<i>Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub></i>	1.800	309.123	79,88
<i>Fe</i>	1.800	302.300	69,38
<i>Mn</i>	1.800	-	-
<i>P</i>	1.800	-	-
<i>SiO<sub>2</sub></i>	1.800	111.862	44,92

**Tabela 2. Experimento 1**

A partir dos resultados da tabela 2 percebe-se que quanto maior a proporção de um dado parâmetro nos produtos finais gerados, maior será o valor da função objetivo quando estes parâmetros forem mais penalizados. Nota-se que penalizando os componentes com maior proporção, encontra-se soluções viáveis com maior facilidade.

O segundo experimento buscou analisar a dificuldade em se resolver o problema

quando o sequenciamento de produção da usina de beneficiamento é priorizado em detrimento às metas de qualidade. Na priorização de sequenciamento, as penalidades por troca de produção foram consideradas 100 vezes maiores que as penalidades por desvios de qualidade, e na priorização de desvios de qualidade foi feito o oposto. Percebe-se pela tabela

Prioridade	Tempo solução (s)	Função objetivo	Gap (%)
Teste 3 períodos			
Sequenciamento	0,37	91.886	0,0
Qualidade	0,69	256.661	0,0
Teste 7 períodos			
Sequenciamento	724,87	165.773	0,0
Qualidade	171,92	634.550	0,0
Teste 10 períodos			
Sequenciamento	1.800	198.208	72,19
Qualidade	1.800	846.320	4,4
Teste 15 períodos			
Sequenciamento	1.800	-	-
Qualidade	1.800	2.759.949	56,92

**Tabela 3. Experimento 2 - Análise de sensibilidade à priorização de produção sobre qualidade.**

3 que priorizar o sequenciamento de produção na usina de beneficiamento sobre as metas de qualidade torna o problema mais difícil, uma vez que o espaço de soluções definido pelas restrições de sequenciamento e suas variáveis binárias impõem maior complexidade de solução.

O terceiro experimento teve como objetivo analisar a dificuldade em se resolver o problema para maiores números de períodos e de produtos, penalizando-se de forma equivalente os desvios de qualidade e as trocas de produção. Analisando os gaps de solução, percebe-se que o aumento dos horizontes de planejamento torna o problema bastante complicado. Embora não listado na tabela 4, nenhum experimento obteve uma resposta viável para horizontes de 21 e 30 períodos dentro do limite de tempo definido. A capacidade de gerar soluções, para um mesmo tempo de processamento, reduz-se bastante à medida que o número de períodos, e por consequência o número de variáveis, aumenta.

## 5. Conclusões

Este trabalho apresentou uma primeira abordagem para o problema de programação integrada de curto prazo em minas. Esse é um problema de grande relevância prática, uma vez que são comuns os casos em que decisões de programação de lavra, beneficiamento e estocagem para carregamento são tomadas de forma isolada e independente. Acredita-se que um modelo integrado de decisão possa gerar resultados consideravelmente melhores na programação de curto prazo. Esse é um dos trabalhos futuros.

Por meio dos experimentos feitos sobre o modelo, percebemos sua sensibilidade à priorização dos parâmetros de sequenciamento e qualidade, evidenciando que determinar o programa de produção da usina de beneficiamento é significativamente mais complicado que atender metas de qualidade. Percebe-se ainda que a obtenção de respostas exatas no tempo desejado para um programa relativamente pequeno não é fácil. Um segundo trabalho futuro envolve a elaboração de soluções heurísticas que sejam capazes de gerar respostas com boa qualidade e baixo tempo de resposta.

Número produtos	Tempo solução (s)	Função objetivo	Gap (%)
Teste com 3 períodos			
4	0,51	27.095	0,0
5	0,56	131.962	0,0
6	0,96	161.962	0,0
Teste 7 períodos			
4	193,71	66.697	0,0
5	1.414,61	65.832	0,0
6	1.338,45	66.304	0,0
Teste 10 períodos			
4	802,64	39.732	0,0
5	1.800	78.986	1,41
6	1.800	169.956	1,12
Teste 15 períodos			
4	1.800	275.594	85,49
5	1.800	166.644	15,86
6	1.800	735.262	72,67

**Tabela 4. Experimento 3 - Aumento de complexidade do modelo em função do número de produtos e períodos no horizonte de planejamento.**

## Referências

- Almeida, F. A. and Pimentel, B. S. (2009). Algoritmos para planejamento integrado de produção e transporte de minérios. *Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*.
- da Costa, F. P., Souza, M. J. F., and Pinto, L. R. (2005). Um modelo de programação matemática para alocação estática de caminhões visando ao atendimento de metas de produção e qualidade. *Revista Escola de Minas*.
- Ignizio, J. P. (1985). *Introduction to Linear Goal Programming*. Sara Miller McCune.
- Moraes, E. F., do Carmo Bento Alves, J. M., Souza, M. J. F., Cabral, I. E., and Martins, A. X. (2006). Um modelo de programação matemática para otimizar a composição de lotes de minério de ferro da mina cauê da cvrd. *Revista Escola de Minas*.
- Pimentel, B. S., Mateus, G. R., and Almeida, F. A. (2010). Mathematical models for optimizing the global mining supply chain. In Nag, B., editor, *Intelligent Systems in Operations: Methods, Models and Applications in the Supply Chain*, pages 133–163. IGI Global.
- Sattarvand, J. and Niemann-Delius, C. (2008). Perspective of metaheuristics optimization methods in open pit production planning. *Proceedings of the XXI World Mining Congress*.
- Toffolo, T. A. M. (2009). Otimização do fluxo de produtos de uma empresa mineradora. Master's thesis, Universidade Federal de Minas Gerais.