

Aplicação da Heurística *Relax-and-Fix* no Problema de Dimensionamento e Sequenciamento de Lotes de Produção em Máquinas Distintas em Paralelo

Márcio S. Kawamura

Departamento de Engenharia de Produção, EPUSP, Universidade de São Paulo
Av. Prof. Almeida Prado, 128, Cidade Universitária, 05508-900, São Paulo SP, Brasil
marcio.kawamura@poli.usp.br

Débora P. Ronconi

Departamento de Engenharia de Produção, EPUSP, Universidade de São Paulo
Av. Prof. Almeida Prado, 128, Cidade Universitária, 05508-900, São Paulo SP, Brasil
dronconi@usp.br

RESUMO

O presente trabalho trata do problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes de produção com máquinas em paralelo (*GLSPPL*). Considera-se o caso específico de máquinas distintas em paralelo com estrutura de *setup* dependente da sequência. Atrasos de atendimento da demanda são permitidos e os produtos acabados são estocados em um armazém com capacidade limitada. Esse problema é *NP-difícil*, sendo comumente encontrado em empresas do setor produtivo. Nesse trabalho, propomos 11 estratégias de resolução baseadas na técnica *relax-and-fix* para resolver o caso real de uma empresa de grande porte da indústria de bens de consumo. Os testes computacionais realizados mostraram que a abordagem proposta obtém resultados melhores do que os atualmente praticados pela empresa.

PALAVRAS-CHAVE. Dimensionamento de lotes, sequenciamento, *relax-and-fix*.

ÁREA PRINCIPAL. PO na Indústria.

ABSTRACT

This paper addresses the General Lot Sizing and Scheduling Problem with Parallel Machines (*GLSPPL*). We consider the particular case of unrelated parallel machines with sequence-dependent setup times and costs. Backordering is allowed and finished goods are stored in a warehouse with limited capacity. This problem is NP-hard and it is commonly found in industrial processes. We propose 11 different strategies based on the *relax-and-fix* heuristic to solve a real-world problem of a big consumer goods company. The computational experiments showed that the proposed approach obtain better results than those used by the company.

KEYWORDS. Lot sizing, scheduling, *relax-and-fix*.

MAIN AREA. OR in Industry.

1. Introdução

Decisões de planejamento operacional sempre exerceram grande influência sobre o desempenho das empresas. Questões como dimensionamento e sequenciamento de lotes, adequação dos níveis de estoque, atendimento à demanda de mercado e a consequente sincronização de todos esses processos são ainda hoje desafios presentes na cadeia de suprimentos. O processo de dimensionar lotes de produção consiste em determinar quanto produzir de cada produto em cada período a fim de atender a uma demanda prevista sob as condições e capacidades operacionais existentes. Um dimensionamento incorreto dos lotes pode causar excesso de produto acabado em estoque, pedidos de venda não totalmente atendidos, eventuais perdas de material perecível, entre outros. Por sua vez, sequenciar lotes de produção significa determinar em que ordem produzir esses lotes de forma a melhor aproveitar os recursos produtivos e atender aos prazos estabelecidos. Um sequenciamento ineficiente pode provocar não cumprimento dos prazos, reduzir significativamente a capacidade produtiva da linha de produção, acumular antecipadamente estoques de produtos acabados, gerar custos maiores de preparação de máquina, entre outros.

Devido à sua importância na prática e sua complexidade matemática, diversos trabalhos vêm sendo desenvolvidos sobre esse tema nas suas diversas variantes. Drexel e Kimms (1997), Karimi, Fatemi Ghomi e Wilson (2003), Zhu e Wilhelm (2006), Quadt e Kuhn (2008), Gao, Altay e Robinson (2008) e Robinson, Narayanan e Sahin (2009) são alguns trabalhos que revisaram a literatura publicada sobre o assunto. Apesar do problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes ser frequentemente explorado, existem diversas oportunidades de pesquisa (DREXL; KIMMS, 1997; ZHU; WILHELM, 2006; QUADT; KUHN, 2008), principalmente em problemas que envolvem sistemas produtivos com máquinas em paralelo, estrutura de *setup* complexa e possibilidade de permissão de atraso de entrega nas vendas (*backordering*).

O problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes sujeitos a tempos e custos de *setup* dependentes da sequência é chamado de *GLSP (General Lot Sizing and Scheduling Problem)*, sendo que o problema análogo com máquinas em paralelo é denominado *GLSPPL (General Lot Sizing and Scheduling Problem with Parallel Machines)*. O *GLSP* é classificado como *NP-difícil* (FLEISCHMANN; MEYR, 1997). Por consequência, o *GLSP* com tempos de *setup* dependentes é também classificado como *NP-difícil* (MEYR, 2000). Para esse problema, até mesmo encontrar uma solução viável para o problema é uma tarefa difícil, o que torna inviável a resolução desse problema por métodos exatos.

Alguns trabalhos recentes sobre *GLSP* propuseram resoluções através de heurísticas e metaheurísticas (MEYR, 2000; HAASE; KIMMS, 2000; GUPTA; MAGNUSSON, 2005; ALMADA-LOBO; OLIVEIRA; CARRAVILLA, 2008) e aplicações da heurística *relax-and-fix* (ARAÚJO; ARENALES; CLARK, 2008; FERREIRA; MORABITO; RANGEL, 2009; TOSO; MORABITO; CLARK, 2009). Por sua vez, poucos trabalhos foram desenvolvidos sobre o *GLSPPL* (ZHU; WILHELM, 2006; MEYR, 2002). Kang, Malik e Thomas (1999) trataram o *GLSPPL* considerando como função objetivo a minimização dos custos de *setup* e estoque descontando-se o faturamento com as vendas utilizando técnicas de geração de colunas. Clark e Clark (2000) estudaram o *GLSPPL* cuja função objetivo minimizava custos de armazenagem e de *backordering*, porém não tratava custos de *setup*. Sua formulação matemática baseava-se numa premissa de que o número máximo de *setups* por período era pré-determinado. A esse modelo matemático, foi utilizada uma heurística de horizonte rolante e uma do tipo *relax-and-fix*. Porém os resultados computacionais mostraram que somente problemas de pequeno porte conseguiram ser resolvidos em tempos razoáveis. Visando minimizar os custos de produção, estoque e *setup* sem permitir atrasos de entrega, Meyr (2002) utilizou as metaheurísticas *Threshold Accepting (TA)* e *Simulated Annealing (SA)* em instâncias reais de pequeno porte (19 produtos, 2 máquinas e 8 períodos) com máquinas idênticas. Dastidar e Nagi (2005) trataram o *GLSPPL* com máquinas

distintas minimizando custos de estoque, *backordering* e *setup* e com restrição de recursos produtivos como ferramentas. Os autores trataram o problema através de uma decomposição em duas fases. Na primeira fase, as máquinas foram agrupadas enquanto que na segunda fase, os subproblemas foram resolvidos por um *software* livre de otimização (GLPK 4.1). As instâncias utilizadas nos experimentos computacionais possuíam diferentes configurações que contavam com dimensão de até 51 tipos de produtos, 45 máquinas, 6 tipos de recursos produtivos e 30 períodos. Beraldi *et al.* (2008) desenvolveram heurísticas de horizonte rolante e *relax-and-fix* para resolver o *GLSPPL* num ambiente de máquinas idênticas, encontrado na indústria têxtil e de fibra de vidro. Ao contrário da formulação matemática desenvolvida por Meyr (2002), esse trabalho introduz uma formulação compacta para o caso de máquinas idênticas, considerando apenas o custo de *setup*, porém negligenciando os tempos de *setup*. Józefowska e Zimniak (2008) desenvolveram um sistema de apoio à decisão aplicado em uma empresa polonesa fabricante de tubos plásticos, cujo ambiente produtivo é composto por máquinas em paralelo. Esse sistema é baseado numa abordagem multi-objetivo que compreende entre seus critérios a maximização da utilização de máquina e a minimização do desvio entre o programa de produção e o *S&OP* (*Sales and Operations Plan*), da perda de lucro dada pelas faltas de produto permitidas pelo modelo, do tempo total de *setup* e da quantidade de produtos abaixo do nível de estoque de segurança desejado. O modelo é resolvido através de um algoritmo genético, após ter seu espaço de soluções reduzido pelo acréscimo de restrições sugeridas por planejadores experientes. Os testes realizados envolveram instâncias com 50 máquinas e mais de 2000 produtos, porém seus tempos de processamento foram elevados (em torno de 30 horas). Ferreira, Morabito e Rangel (2009) trabalharam com um sistema produtivo de uma fábrica de refrigerantes composto de 2 estágios (preparação do refrigerante e engarrafamento) que devem ser sincronizados em linhas de produção em paralelo. Com objetivo de minimizar custos de estoque, de *backordering* e de *setup*, foram desenvolvidas duas abordagens de resolução do problema que utilizavam 15 diferentes estratégias de *relax-and-fix* baseadas em conjugações de relaxação de variáveis de períodos, máquinas e estágios de produção.

O presente trabalho trata do problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes com características especiais: um ambiente produtivo composto de linhas de produção distintas em paralelo, tempos e custos de preparação de máquina que variam conforme a sequência de produção estabelecida, permissão de atrasos de entrega e uma capacidade limitada de produção e de armazenagem dos produtos fabricados. O método utilizado para resolver o problema foi a heurística *relax-and-fix*, que decompõe o problema original em subproblemas que podem ser resolvidos de modo exato. Além de propor diferentes estratégias de criação de partições para o problema, esse trabalho procura contribuir com a literatura existente verificando não somente a influência no desempenho da heurística do modo como as partições são criadas como também da ordem em que as mesmas são resolvidas.

Esse trabalho está dividido conforme descrito a seguir: a Seção 2 apresenta uma descrição detalhada e uma formulação matemática para o problema. Na Seção 3, as heurísticas *relax-and-fix* são propostas. Na Seção 4, são apresentados os experimentos computacionais realizados enquanto que a Seção 5 mostra as principais conclusões do estudo.

2. Descrição do Problema

No *GLSPPL*, N tipos de produtos são produzidos em um ambiente de produção composto de M máquinas distintas num horizonte de T intervalos de tempo. Em um intervalo de tempo t , pode ser produzido mais de um tipo de produto em cada máquina, desde que essa utilização não ultrapasse a capacidade de produção disponível Cp_{mt} , correspondente ao tempo disponível na máquina m no período t . As máquinas são distintas entre si, ou seja, têm taxas de produção e níveis de eficiência diferentes umas das outras. Conseqüentemente, os custos de produção cp_{il} para produzir o produto i na máquina l podem ser diferentes dependendo da máquina utilizada. Além disso, por restrições técnicas, nem todos os produtos podem ser

fabricados em todas as máquinas. Entre a produção de lotes de tipos de produtos diferentes, existe a necessidade de um tempo para preparação da máquina l e para ajustes de parâmetros, que geralmente incorrem em perda de material. Esses tempos de *setup* st_{ijl} , e consequentemente os seus respectivos custos cs_{ijl} , são dependentes da sequência das tarefas a serem executadas. Não se permite que as tarefas sejam interrompidas durante sua execução.

A demanda d_{it} de cada tipo de produto i em cada período t é determinística e dinâmica, ou seja, é conhecida e varia ao longo do tempo. Permite-se que existam atrasos de entrega (*backorders*). No entanto, cada unidade do produto i com entrega atrasada sofre uma penalização g_i para cada período t de demanda não atendida. Os produtos assim que fabricados são transferidos para um centro de distribuição, com capacidade limitada de armazenagem Ca . Para cada unidade de produto i armazenada nesse centro de distribuição, incorre-se a cada período t em um custo de manutenção de estoque h_i , correspondente ao custo de capital imobilizado.

Nesse problema, além de definir as quantidades a serem produzidas de cada produto e a sua sequência de produção, deve-se escolher em qual máquina será fabricado cada lote, de modo a minimizar os custos variáveis de armazenagem, de *setup*, de *backorder* e de produção.

A formulação proposta foi adaptada do modelo de programação inteira mista (MIP) de Meyr (2002), adicionando-se a permissão de atrasos de entrega e a restrição de armazenagem. Nesse modelo, o horizonte de planejamento é dividido simultaneamente em T períodos e W sub-períodos, sendo que cada período t é constituído de sub-períodos s . Observe que os períodos possuem duração fixa pré-determinada enquanto que cada sub-período não necessariamente precisa ter a mesma duração. Em cada sub-período permite-se a produção de apenas um tipo de produto, identificando um lote de produção. Essa divisão em sub-períodos permite identificar a sequência de tarefas na máquina, assim como associar os respectivos custos e tempos de *setup* dependentes.

Esse modelo é apresentado a seguir:

Variáveis

- q_{ils} : quantidade do produto i produzido na máquina l no sub-período s
 x_{ils} : 1, se a máquina l está preparada para produzir o produto i no sub-período s . 0, caso contrário.
 y_{ijls} : 1, se há *setup* do produto i para o produto j na máquina l no sub-período s . 0, caso contrário.
 I_{it}^+ : quantidade de produto i em estoque no final do período t
 I_{it}^- : quantidade de produto i com demanda não atendida no final do período t

Parâmetros

- S_{it} : conjunto de sub-períodos contidos no período t na máquina l
 SP_l : conjunto de produtos que podem ser produzidos na máquina l
 d_{it} : demanda do produto i no período t
 CA : capacidade de armazenagem
 CP_{it} : capacidade de produção disponível na máquina l no período t
 cs_{ijl} : custo de *setup* para produzir o produto j imediatamente após o produto i na máquina l
 cp_{il} : custo de produção para produzir o produto i na máquina l
 h_i : custo de manutenção de uma unidade do produto i em estoque por período
 g_i : custo de atraso de entrega de uma unidade do produto i por período
 p_{il} : tempo consumido para produção de uma unidade do produto i na máquina l
 lm_{il} : lote mínimo do produto i produzido na máquina l
 st_{ijl} : tempo de *setup* para produção do produto j imediatamente após o produto i na máquina l
 I_{i0}^+ : quantidade de produto i em estoque no início do horizonte de planejamento
 I_{i0}^- : quantidade de produto i com demanda não atendida no início do horizonte de planejamento
 x_{i0} : 1, se a máquina está preparada para produzir o produto i na máquina l no início do horizonte de planejamento. 0, caso contrário.

Modelo

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T h_i \cdot I_{it}^+ + \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T g_i \cdot I_{it}^- + \sum_{i \in SP_l} \sum_{j \in SP_l} \sum_{l=1}^M \sum_{s=1}^W cs_{ijl} \cdot y_{ijls} + \sum_{i \in SP_l} \sum_{l=1}^M \sum_{s=1}^W cp_{il} \cdot q_{ils} \quad (1)$$

Sujeito a:

$$I_{i,t-1}^+ - I_{i,t-1}^- + \sum_{l=1}^M \sum_{s \in S_{it}} q_{ils} - I_{it}^+ + I_{it}^- = d_{it} \quad i \in SP_i; t = 1, \dots, T \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^N I_{it}^+ \leq CA \quad t = 0, \dots, T \quad (3)$$

$$\sum_{i \in SP_l} \sum_{s \in S_{it}} p_{il} \cdot q_{ils} + \sum_{i \in SP_l} \sum_{j \in SP_l} \sum_{s \in S_{it}} st_{ijl} \cdot y_{ijls} \leq CP_{lt} \quad l = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T \quad (4)$$

$$p_{il} \cdot q_{ils} \leq CP_{lt} \cdot x_{ils} \quad i \in SP_i; l = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T; s \in S_{it} \quad (5)$$

$$q_{ils} \geq lm_{il} \cdot (x_{ils} - x_{il,s-1}) \quad i \in SP_i; l = 1, \dots, M; s = 1, \dots, W \quad (6)$$

$$\sum_{i \in S_l} x_{ils} = 1 \quad l = 1, \dots, M; s = 1, \dots, W \quad (7)$$

$$y_{ijls} \geq x_{il,s-1} + x_{jls} - 1 \quad i, j \in SP_i; l = 1, \dots, M; s = 1, \dots, W \quad (8)$$

$$x_{il0} = 0 \quad i \in SP_i; l = 1, \dots, M \quad (9)$$

$$x_{ils} \in \{0, 1\} \quad i \in SP_i; l = 1, \dots, M; s = 1, \dots, S \quad (10)$$

$$I_{it}, q_{ils}, y_{ijls} \geq 0 \quad i, j \in SP_i; l = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T; s = 1, \dots, S \quad (11)$$

O objetivo do modelo (1) é a minimização dos custos variáveis com armazenagem, *backordering*, *setups* e de produção. O balanço de estoques e *backorders* é realizado através do conjunto de restrições (2), que relaciona quantidades em estoque, *backorders*, produtos produzidos e demanda. O conjunto de restrições (3) garante que a quantidade total de produtos não ultrapasse a capacidade de armazenagem disponível no centro de distribuição. Por sua vez, o conjunto de restrições (4) garante que a quantidade de horas consumidas na produção, adicionada da quantidade de horas necessárias para preparação da máquina, deve ser menor ou igual à capacidade disponível em cada máquina em cada período de tempo. O conjunto de restrições (5) indica que somente haverá produção do produto *i* no sub-período *s* se a máquina estiver preparada para o produto ($x_{ils} = 1$). Existem casos em que a matriz de custos de *setup* não satisfaz a desigualdade triangular, ou seja, $cs_{ij} + cs_{jk} \geq cs_{ik}$, $i, j, k = 1, \dots, N$. Casos como esse são encontrados na indústria química e na indústria de rações (veja por exemplo, Toso, Morabito e Clark, 2009), na qual existem produtos “limpantes”, ou seja, se fabricados em uma certa quantidade, têm a característica de “limpar” o sistema produtivo, incorrendo em tempos menores de preparação de máquina para o próximo lote. O conjunto de restrições (6) é importante para uma eficaz utilização dessa propriedade. A imposição de fabricação de um lote mínimo de produto sempre que ocorre uma preparação de máquina faz com que a quantidade de produto fabricada seja suficiente para gerar uma “limpeza” natural na máquina. O conjunto de restrições (7) determina que a máquina esteja preparada para produzir somente um produto em cada máquina em cada sub-período *s*. O conjunto de restrições (8) indica se houve mudança de produção do produto *i* para o produto *j* na máquina *l* entre os sub-períodos. O conjunto de restrições (9) indica que as máquinas não estão preparadas para nenhum produto no início do horizonte de planejamento *T*. O conjunto de restrições (10) indica que a variável x_{ils} é binária, enquanto que o conjunto (11) determina que as variáveis q_{ils} , I_{it} e y_{ijls} são reais não negativas. Observe que não há a necessidade de se impor que a variável y_{ijls} seja binária, pois a mesma pode assumir apenas os valores 0 ou 1. Isso se deve ao fato de que essa variável é obtida através de uma expressão de variáveis binárias, cujo resultado pode ser somente $y_{ijls} \geq -1$, $y_{ijls} \geq 0$ e $y_{ijls} \geq 1$.

Como a variável é real não negativa e a função objetivo minimiza os custos com *setup*, a expressão assume o mínimo valor possível, ou seja, $y_{ijs} = 0$ ou $y_{ijs} = 1$.

3. Heurísticas *Relax-and-Fix* Propostas

Wolsey (1998) define a heurística *relax-and-fix* como um método de decomposição no qual um problema representado por um modelo de programação inteira mista (*MIP*) de difícil solução pode ser decomposto em subproblemas menores que podem ser resolvidos rapidamente, fornecendo boas soluções ao problema original. Alguns trabalhos recentes utilizaram essa técnica para resolver problemas de dimensionamento e sequenciamento de lotes envolvendo máquinas em paralelo (DASTIDAR; NAGI, 2005; BERALDI *et al.*, 2008; FERREIRA; MORABITO; RANGEL, 2009).

Na heurística *relax-and-fix*, um modelo *MIP* é dividido em vários subproblemas disjuntos. Essa divisão consiste em particionar as variáveis inteiras ou binárias do problema em conjuntos de modo que o subproblema torne-se reduzido o suficiente para ser resolvido rapidamente de maneira exata. Os subproblemas são então resolvidos sequencialmente, fixando-se os valores das variáveis dos subproblemas já resolvidos, mantendo-se a integralidade das variáveis do subproblema em resolução e relaxando-se a integralidade das variáveis dos subproblemas que serão resolvidos posteriormente.

No presente trabalho, adaptamos o *MIP* da seção anterior para resolvê-lo através da heurística *relax-and-fix*. Para tanto, elegemos a variável binária x_{ils} para ser particionada em k subconjuntos definidos como $\{x_{ils}: (i,l,s) \in X_w\}$, onde $w = 1, \dots, k$. Denominamos r o subproblema que está sendo resolvido e adicionamos as restrições (12), (13) e (14) a seguir ao *MIP* original:

$$x_{ils} = \hat{x}_{ils} \quad (i, l, s) \in \prod_{w=1, \dots, r-1} X_w \quad (12)$$

$$x_{ils} \in \{0, 1\} \quad (i, l, s) \in X_r \quad (13)$$

$$x_{ils} \geq 0 \quad (i, l, s) \in \prod_{w=r+1, \dots, k} X_w \quad (14)$$

onde \hat{x}_{ils} são os valores inteiros de x_{ils} nas soluções dos subproblemas $1, \dots, r-1$.

Nessa nova formulação, o conjunto de restrições (12) indica que os subproblemas relacionados aos subconjuntos X_1 a X_{r-1} são subproblemas que já foram resolvidos e cujos valores de x_{ils} permanecerão fixos para o restante da resolução. O conjunto de restrições (13) indica que o r -ésimo subproblema é o subproblema que está sendo resolvido e portanto que possui as variáveis x_{ils} definidas como binárias. Por sua vez, o conjunto de restrições (14) indica que as variáveis x_{ils} dos subproblemas posteriores (relacionadas aos subconjuntos X_{r+1} a X_k) serão tratadas como variáveis reais (relaxadas) na resolução do r -ésimo subproblema.

Nesse trabalho, propomos estratégias de resolução baseadas na heurística *relax-and-fix*, divididas em dois tipos: estratégias básicas, que particionam a variável x_{ils} utilizando apenas uma de suas dimensões (produto, máquina ou tempo); e estratégias híbridas, que particionam a variável x_{ils} utilizando mais de uma dimensão. Além de analisar diferentes estratégias para a criação de partições para o *GLSPPL*, verificaremos a influência da ordem em que essas partições são resolvidas no desempenho das estratégias.

Alguns trabalhos recentes também desenvolveram estratégias básicas de *relax-and-fix* para problemas de dimensionamento e sequenciamento de lotes. Beraldi *et al.* (2008) propuseram estratégias baseadas nas dimensões de tempo e produto. Ferreira, Morabito e Rangel (2009), por sua vez, utilizaram as dimensões de tempo e de máquina. As estratégias básicas de *relax-and-fix* propostas nesse trabalho são:

- a) **RF_Tmp1**: Nessa estratégia, dividimos o conjunto original dos intervalos de tempo em k subconjuntos disjuntos, ou seja, sem sobreposição de intervalos. Nessa estratégia, a sequência de resolução dos subproblemas dá-se do subconjunto de

- intervalos mais próximo ao mais distante cronologicamente do instante zero (*forward*).
- b) **RF_Tmp2**: Essa estratégia também utiliza partições baseadas em intervalos de tempo, porém, ao contrário da anterior (*RF_Tmp1*), começa a resolução dos subproblemas do intervalo mais distante cronologicamente do instante zero ao mais próximo (*backward*).
 - c) **RF_Maq1**: Nessa estratégia, dividimos o conjunto original de máquinas em k subconjuntos de máquinas de acordo com a velocidade e eficiência de cada uma delas. Isso significa que decomparamos o problema original em k subproblemas e consideraremos dentro dele apenas uma parcela do conjunto total de máquinas como variáveis binárias. Essa abordagem resolve os subproblemas iniciando pelo subconjunto de máquinas mais rápidas e eficientes e segue progressivamente até o subconjunto de máquinas menos rápidas e eficientes.
 - d) **RF_Maq2**: Essa abordagem é análoga à anterior porém, ao contrário de *RF_Maq2*, executa as otimizações parciais iniciando pelo subconjunto de máquinas menos rápidas e eficientes e seguindo progressivamente até o subconjunto de máquinas mais rápidas e eficientes.
 - e) **RF_Maq3**: Essa abordagem é análoga às anteriores, porém o particionamento das máquinas segue o critério definido por Dastidar e Nagi (2005). Esses autores propõem um particionamento do problema principal baseado na criticidade das máquinas. Segundo esse critério, analisam-se os produtos e as máquinas que podem produzir esses produtos. O subconjunto de máquinas que possuem produtos com menos alternativas de produção são priorizadas em detrimento daquelas que possuem produtos com mais alternativas de produção.
 - f) **RF_Prod1**: Nessa estratégia, dividimos o conjunto original de produtos em k subconjuntos formados por grupos de produtos. Nessa abordagem, formamos 3 subconjuntos, de acordo com a análise da curva ABC da demanda total de cada produto. A resolução dos subproblemas dá-se iniciando pelo grupo de produtos com maior demanda, que totaliza 80% da demanda total (classe A) até o grupo com menor demanda, que é responsável por apenas 5% da demanda total (classe C).
 - g) **RF_Prod2**: Essa abordagem é análoga à anterior porém, ao contrário de *RF_Prod1*, executa as otimizações parciais iniciando pelo grupo de produtos com menor demanda (classe C) e seguindo até o grupo de maior demanda (classe A).
 - h) **RF_Prod3**: Trata-se também de uma abordagem baseada em partição do grupo de produtos. Nesse caso, ordenamos os produtos de acordo com a sua demanda e agrupamos os $N/3$ produtos com maior demanda no grupo 1, os $N/3$ próximos produtos com maior demanda no grupo 2 e os produtos restantes no grupo 3. A resolução dos subproblemas é realizada iniciando-se com o grupo 1, passando-se ao grupo 2 e finalmente resolvendo-se o grupo 3.
 - i) **RF_Prod4**: Essa abordagem é análoga à anterior porém, ao contrário de *RF_Prod3*, executa as otimizações parciais iniciando pelo grupo de produtos com menor demanda (grupo 3) e seguindo até o grupo de maior demanda (grupo 1).

Estratégias híbridas, que utilizam partições baseadas em mais de uma dimensão (produto, máquina e tempo), também são encontradas na literatura (BERALDI *et al.*, 2008; FERREIRA; MORABITO; RANGEL, 2009). Nesse trabalho, as estratégias híbridas foram definidas do seguinte modo:

- j) **RF_Hib1**: Essa abordagem utiliza todas as dimensões da variável x_{ils} . Através do desempenho das estratégias básicas nos experimentos computacionais, identificamos a dimensão com melhores resultados gerais. Em seguida, dividimos o conjunto de variáveis de acordo com a estratégia básica com melhor desempenho dentro dessa dimensão. O mesmo procedimento é realizado nos subconjuntos gerados para a dimensão que apresentou o segundo melhor desempenho e, finalmente, analogamente executado para a dimensão restante. A ordem de

resolução dos subproblemas obedece às regras determinadas pelas estratégias básicas de melhor desempenho dentro de cada dimensão. A Figura 3.1 ilustra esquematicamente o processo de particionamento do conjunto X das variáveis x_{ils} , assim como a sequência de resolução dos subconjuntos, indicada pelas setas tracejadas:

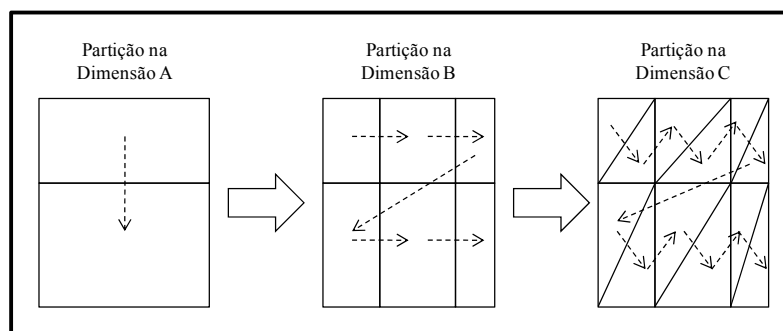


Figura 3.1. Processo de particionamento das variáveis x_{ils} e ordem de resolução dos subproblemas na estratégia híbrida RF_Hib1 .

- k) **RF_Hib2** : Nessa estratégia, utilizamos somente as duas dimensões que melhor desempenho apresentaram nos experimentos computacionais. Analogamente a anterior (RF_Hib1), a ordem de resolução dos subproblemas também obedece à regra definida pela estratégia básica de melhor desempenho dentro de cada dimensão.

4. Experimentos Computacionais

Utilizamos como estudo de caso para os testes computacionais das abordagens propostas uma empresa da indústria de bens de consumo. Essa empresa possui fábricas no Brasil, nas quais produz a maior parte dos produtos que comercializa. Em cada fábrica, existem linhas de produção especializadas em determinadas famílias de produtos: fraldas, absorventes, lenços, entre outros produtos de higiene pessoal. Cada família de produtos é composta por tipos de produtos similares que se diferenciam basicamente pelo seu tamanho, composição do material utilizado, quantidade de itens por embalagem de venda, entre outros. Os produtos, depois de fabricados, são enviados para um armazém com capacidade limitada.

Atualmente, o dimensionamento e sequenciamento de lotes na empresa é realizado no início de cada mês e revisado semanalmente pelos planejadores de produção para um horizonte de 4 meses, período para o qual existe previsão de vendas elaborada pela área comercial. Os produtos em geral são fabricados em lotes de frequência mensal, podendo existir frequência quinzenal se o produto tiver uma demanda de alto volume ou frequência bimestral, caso contrário. O sequenciamento dos lotes são realizados de acordo com a cobertura de vendas que o estoque inicial provê, ou seja, os produtos com menor nível de estoque relativo são sequenciados antes daqueles que tem maior nível de estoque relativo, visando evitar *backorders*. Para se oficializar o plano de produção a ser executado, existe uma reunião de aprovação com a presença dos responsáveis pela produção, na qual deve existir um balanceamento entre as necessidades de atendimento de vendas, de manutenção de estoques em níveis adequados e uma boa utilização dos recursos produtivos. Porém, atualmente não se utilizam métricas de custo para avaliar os planos de produção gerados.

Para esses experimentos computacionais, foram preparados 12 conjuntos de dados de diferentes características e tamanhos. Por questões de confidencialidade, os dados foram alterados procurando-se manter a proporcionalidade entre os mesmos. As principais características dos problemas são mostradas na Tabela 4.1 a seguir:

Problema	Quantidade		
	Máquinas	Produtos	Períodos
P1	2	6	16
P2	2	5	16
P3	2	7	16
P4	2	20	16
P5	3	8	16
P6	3	12	16
P7	4	9	16
P8	4	8	16
P9	5	13	16
P10	5	24	16
P11	7	26	16
P12	7	26	16

Tabela 4.1 – Dimensão dos problemas testados.

Para montarmos as partições das estratégias *relax-and-fix*, utilizamos os seguintes critérios:

- RF_Tmp1 e RF_Tmp2 : O horizonte de planejamento foi dividido em 4 partições de tempo de 4 semanas cada uma.
- RF_Maq1 , RF_Maq2 e RF_Maq3 : Cada partição de máquina foi composta de 1 máquina.
- RF_Prod1 , RF_Prod2 , RF_Prod3 e RF_Prod4 : As partições foram executadas segundo definição da seção anterior.

Os teste computacionais foram realizados num computador Intel Core 2 Duo 2.4 GHz com 2 Gb de memória RAM e resolvidos pelo *software* CPLEX 11.1 com interface OPL 5.5. O tempo de processamento para cada teste foi limitado em 1 hora e dividido em intervalos iguais para cada subproblema a ser resolvido.

A Tabela 4.2 a seguir mostra o valor da função objetivo da solução obtida por cada uma das estratégias básicas em cada problema em milhares de unidades monetárias. Segregamos a análise por dimensão (produto, máquina e tempo) para identificar qual estratégia obteve melhor desempenho dentro de cada uma delas. Os valores destacados em negrito mostram o melhor resultado obtido dentro de cada dimensão, enquanto que o símbolo “*” indica os casos nos quais as heurísticas não conseguiram obter solução viável dentro do limite de tempo estabelecido. A linha # Vit mostra a quantidade de vitórias de cada estratégia dentro de sua respectiva dimensão, ou seja, quantas vezes a estratégia obteve o melhor resultado em comparação às demais dentro de sua dimensão.

	Tempo		Máquina			Produto			
	RF_Tmp1	RF_Tmp2	RF_Maq1	RF_Maq2	RF_Maq3	RF_Prod1	RF_Prod2	RF_Prod3	RF_Prod4
P1	69,5	69,1	69,7	70,0	69,7	70,8	69,9	70,8	69,9
P2	379,9	376,9	380,2	377,0	377,0	381,1	378,1	379,1	377,7
P3	219,6	220,0	221,0	222,4	221,0	231,0	*	231,0	*
P4	24,9	28,3	31,8	29,7	29,7	*	*	*	27,4
P5	254,3	253,0	252,9	254,1	254,1	*	256,2	256,2	254,1
P6	33,3	37,2	33,8	34,8	34,8	*	34,3	33,5	35,0
P7	1.868,6	1.846,3	1.849,7	1.844,6	1.847,8	1.867,9	*	1.864,8	1.852,7
P8	953,8	953,8	955,4	954,2	954,9	957,6	958,1	957,6	958,1
P9	1.030,5	1.027,1	995,2	1.022,6	*	1.036,3	1.033,0	1.038,6	1.032,5
P10	*	1.421,1	1.328,8	1.557,8	1.339,4	*	*	*	1.783,0
P11	989,7	*	977,2	980,2	978,4	991,1	1.000,2	*	*
P12	3.266,7	3.117,3	*	*	*	*	3.659,7	*	2.891,1
# Vit	5	8	7	4	4	3	1	3	8

Tabela 4.2 – Comparação dos resultados das abordagens básicas das heurísticas *relax-and-fix* propostas.

Todos os testes realizados tiveram seu processamento encerrado no limite de tempo estabelecido (3.600s), ou seja, nenhuma abordagem foi capaz de resolver de forma exata os

problemas dentro do tempo limite estipulado. A partir da análise da tabela anterior, podemos notar que a dimensão tempo obteve melhor desempenho em comparação às demais, seguida pela dimensão máquina e, por fim, a dimensão produto. Observamos nesse caso que as estratégias baseadas em partições de produtos não têm bom desempenho em encontrar soluções viáveis mesmo nos problemas de menor porte, não tendo êxito em 15 dos 48 testes (31,25%). Além disso, em geral, apresentam soluções de pior qualidade em comparação às demais estratégias baseadas em partições de máquina e de tempo. Dentro de cada dimensão, as melhores abordagens básicas, pelo critério de número de vitórias e obtenção de soluções viáveis, foram *RF_Tmp2*, *RF_Maq1* e *RF_Prod4*. Assim sendo, utilizamos esse resultado para a elaboração das estratégias híbridas descritas a seguir:

- RF_Hib1:** Inicialmente particionamos o conjunto das variáveis x_{ils} pela dimensão que apresentou melhores resultados gerais (tempo), seguindo a estratégia básica de melhor desempenho *RF_Tmp2*. Em seguida, dividimos cada subconjunto de intervalos de tempo em partições de máquina de acordo com *RF_Maq1*; e, finalmente, cada subconjunto de intervalos de tempo – máquinas em subconjuntos de grupos de produtos, de acordo com *RF_Prod4*.
- RF_Hib2:** Valendo-se do fato de que as estratégias básicas de partição de produtos não demonstraram bom desempenho na obtenção de soluções viáveis e de boa qualidade, elaboramos uma abordagem híbrida baseada apenas nas dimensões máquina e tempo. Nessa abordagem, dividimos os intervalos de tempo em subconjuntos, seguindo a definição de *RF_Tmp2*, e cada subconjunto de intervalo de tempo em subgrupos de máquinas, de acordo com *RF_Maq1*.

Na Tabela 4.3 a seguir, comparamos a solução atual da empresa, a solução obtida pelo *software* de otimização CPLEX dentro do limite de 1 hora executando a formulação matemática (1)-(12) descrita na Seção 2, assim como as melhores heurísticas *relax-and-fix* básicas em cada dimensão (produto, máquina e tempo) e as estratégias híbridas propostas para os 12 problemas utilizados. As colunas *Valor* indicam o resultado da função objetivo em milhares de unidades monetárias enquanto as colunas *Dif%* mostram a diferença entre a solução atual praticada pela empresa e a solução obtida pela melhor abordagem proposta e é dada pela fórmula:

$$Dif\% = \frac{SoluçãoAbordagem - SoluçãoAtual}{SoluçãoAtual} \cdot 100.$$

	Valor							Melhor Abordagem	Dif%
	Atual	CPLEX	RF_Tmp2	RF_Maq1	RF_Prod4	RF_Hib1	RF_Hib2		
P1	85,0	70,0	69,1	69,7	69,9	70,2	69,1	<i>RF_Tmp2, RF_Hib2</i>	-18,7
P2	415,2	388,3	376,9	380,2	377,7	379,7	376,9	<i>RF_Tmp2, RF_Hib2</i>	-9,2
P3	239,2	235,2	220,0	221,0	*	*	217,0	<i>RF_Hib2</i>	-9,3
P4	55,7	56,9	28,3	31,8	27,4	33,4	25,9	<i>RF_Hib2</i>	-53,5
P5	405,0	256,5	253,0	252,9	254,1	253,7	252,3	<i>RF_Hib2</i>	-37,7
P6	109,2	38,8	37,2	33,8	35,0	32,9	33,4	<i>RF_Hib1</i>	-69,9
P7	2.099,7	1.930,0	1.846,3	1.849,7	1.852,7	1.847,9	1.880,2	<i>RF_Tmp2</i>	-12,1
P8	1.156,2	965,4	953,8	955,4	958,1	953,4	956,7	<i>RF_Hib1</i>	-17,5
P9	1.402,9	1.085,3	1.027,1	995,2	1.032,5	1.008,1	1.002,5	<i>RF_Maq1</i>	-29,1
P10	1.851,2	1.361,7	1.421,1	1.328,8	1.783,0	1.439,0	1.344,5	<i>RF_Maq1</i>	-28,2
P11	1.100,3	1.000,0	*	977,2	*	1.075,4	1.039,1	<i>RF_Maq1</i>	-11,2
P12	3.487,3	3.266,7	*	*	2.891,1	*	3.362,4	<i>RF_Prod4</i>	-17,1

Tabela 4.3 – Comparação da solução atual com os resultados com o CPLEX e uma seleção das heurísticas *relax-and-fix* propostas.

Observamos que, em geral, todas as abordagens apresentaram resultados melhores do que os praticados pela empresa. Os ganhos foram significativos e variaram de 9,2% a 69,9%. Além disso, as abordagens obtiveram em geral resultados melhores do que o CPLEX, exceto nos casos marcados com “*”, nos quais as heurísticas não conseguiram encontrar soluções viáveis. Entre as abordagens *relax-and-fix*, a única que obteve soluções viáveis para todos os problemas foi a *RF_Hib2*, que também apresentou os melhores resultados gerais para 5 dos 12 problemas. Nos demais problemas, alcançou resultados bastante próximos à melhor solução encontrada,

exceto para o problema P12. A outra abordagem híbrida *RF_Hib1* obteve resultados razoáveis, sendo a melhor em 2 problemas, não encontrando solução viável em 2 problemas e resultados próximos da melhor solução obtida nos demais. Entre as abordagens básicas, *RF_Tmp2* e *RF_Maq1* obtiveram cada uma o melhor resultado em 3 dos 12 problemas, enquanto a *RF_Prod4* foi a melhor estratégia em 1 dos problemas.

5. Conclusões

Um problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes em um sistema de produção composto de linhas de produção em paralelo é abordado nesse trabalho. Decisões de planejamento de produção para o problema estudado envolvem a minimização de custos de *setup*, de estoque, de produção e de não atendimento da demanda, satisfazendo restrições de capacidade de produção e armazenagem.

Apesar do problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes ser frequentemente abordado na literatura, são raros os trabalhos que tratam ambientes produtivos com máquinas em paralelo. Além disso, não foram encontrados na literatura casos similares ao tratado nesse trabalho: problemas de dimensionamento e sequenciamento integrados de lotes com penalidades de atrasos de atendimento de demanda (*backordering*) em máquinas paralelas distintas (*GLSPPL*) e restrição de capacidade de armazenagem.

Nesse trabalho, realizamos testes computacionais no *software* de otimização CPLEX 11.1 utilizando um modelo de programação inteira mista (*MIP*) e heurísticas baseadas na técnica *relax-and-fix* com dados obtidos em um caso real vivenciado por uma empresa da indústria de bens de consumo. Conjuntos de dados reais de tamanhos distintos foram elaborados para avaliar o desempenho das abordagens propostas. Nesses testes, observamos que as heurísticas *relax-and-fix* obtiveram melhores resultados do que os praticados pela empresa e pelo *software* comercial de otimização CPLEX. Em geral, a heurística híbrida *RF_Hib2*, que utiliza partições do conjunto de máquinas e de intervalos de tempo, apresentou um desempenho melhor do que as demais, provendo soluções viáveis para todos os problemas e sendo a melhor estratégia em 5 dos 12 problemas. Essa estratégia utiliza o modo de criação e a ordem de execução das estratégias básicas *RF_Tmp2* (*backward*) e *RF_Maq1* (do subconjunto de máquinas mais rápidas e eficientes para o de máquinas menos rápidas e eficientes). Pelos testes conduzidos, a partição baseada na dimensão de produtos não apresentou bom desempenho. Além do ganho de qualidade do programa de produção gerado, podemos também destacar a agilidade na elaboração do mesmo, obtido num tempo inferior ao do atualmente praticado pelos programadores de produção da empresa.

Referências Bibliográficas

- Almada-Lobo, B., Oliveira, J.F., Carravilla, M.A.** *A note on “the capacitated lot-sizing and scheduling problem with sequence-dependent setup costs and setup times”*. Computers & Operations Research, 35, pp. 1374-1376, 2008.
- Araujo, S.A., Arenales, M.N., Clark, A.R.** *Lot sizing and furnace scheduling in small foundries*. Computers and Operations Research, 35, pp. 916-932, 2008.
- Beraldi, P., Ghiani, G., Grieco, A., Guerriero, E.** *Rolling-horizon and fix-and-relax heuristics for the parallel machine lot-sizing and scheduling problem with sequence-dependent set-up costs*. Computers and Operations Research, 35, pp. 3644-3656, 2008.
- Clark, A.R., Clark, S.J.** *Rolling-horizon lot-sizing when set-up times are sequence-dependent*. International Journal of Production Research, 38-10, pp. 2287-2307, 2000.
- Dastidar, S.G., Nagi, R.** *Scheduling injection molding operations with multiple resource constraints and sequence dependent setup times and costs*. Computers & Operations Research, 32, pp. 2987-3005, 2005.

- Drexl, A., Kimms, A.** *Lot Sizing and Scheduling – Survey and Extensions*. European Journal of Operational Research, 99, pp. 221-235, 1997.
- Ferreira, D., Morabito, R., Rangel, S.** *Solution approaches for the soft drink integrated production lot sizing and scheduling problem*. European Journal of Operational Research, 196, pp. 697-706, 2009.
- Fleischmann, B., Meyr, H.** *The general lotsizing and scheduling problem*. OR Spektrum, 19, pp. 11-21, 1997.
- Gao, L.-L., Altay, N., Robinson, E.P.** *A comparative study of modeling and solution approaches for the coordinated lot-size problem with dynamic demand*. Mathematical and Computer Modelling, 47, pp. 1254-1263, 2008.
- Gupta, D., Magnusson, T.** *The capacitated lot-sizing and scheduling problem with sequence-dependent setup costs and setup times*. Computers & Operations Research, 32, pp. 727-747, 2005.
- Haase, K., Kimms, A.** *Lot sizing and scheduling with sequence-dependent setup costs and times and efficient rescheduling opportunities*. International Journal of Production Economics, 66, pp. 159-169, 2000.
- Józefowska, J., Zimniak, A.** *Optimization tool for short-term production planning and scheduling*. International Journal of Production Economics, 112, pp. 109-120, 2008.
- Kang, S., Malik, K., Thomas, L.J.** *Lotsizing and scheduling on parallel machines with sequence-dependent setup costs*. Management Science, 45-2, pp. 273-289, 1999.
- Karimi, B., Fatemi Ghomi, S.M.T., Wilson, J.M.** *The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms*. Omega – The International Journal of Management Science, 31, pp. 365-378, 2003.
- Meyr, H.** *Simultaneous lotsizing and scheduling by combining local search with dual reoptimization*. European Journal of Operational Research, 120, pp. 311-326, 2000.
- Meyr, H.** *Simultaneous lotsizing and scheduling on parallel machines*. European Journal of Operational Research, 139, pp. 277-292, 2002.
- Quadt, D., Kuhn, H.** *Capacitated lot-sizing with extensions: a review*. 4OR – A Quarterly Journal of Operations Research, 6-1, pp. 61-83, 2008.
- Robinson, P., Narayanan, A., Sahin, F.** *Coordinated deterministic dynamic demand lot-sizing problem: A review of models and algorithms*. Omega, 37, pp. 3-15, 2009.
- Toso, E.A.V., Morabito, R., Clark, A.** *Lot sizing and sequencing optimisation at an animal-feed plant*. Computers and Industrial Engineering, 57-3, pp. 813-821, 2009.
- Wolsey, L.A.** *Integer Programming*. Wiley-Interscience. New York, 1998.
- Zhu, X., Wilhelm, W.E.** *Scheduling and lot sizing with sequence-dependent setup: A literature review*. IIE Transactions, 38, pp. 987-1007, 2006.