

**GRAFOS COM CONECTIVIDADE DE ARESTAS IGUAL A 2
CAPAZES DE MODELAR REDES CONFIÁVEIS****Leandro da Silva Teixeira**Centro de Análises de Sistemas Navais
Endereço da Instituição
Leandro.Teixeira@casnav.mar.mil.br**Nair Maria Maia de Abreu**Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)
nair@pep.ufrj.br
Rio de Janeiro – RJ**Leonardo da Silva Lima**Centro Federal de Educação Tecnológica – CEFET-RJ
Av. Maracanã, 229 – Maracanã - RJ
llima@cefet-rj.br**RESUMO**

A avaliação de parâmetros determinísticos e probabilísticos de um grafo que modela um problema de rede são frequentemente utilizados na determinação da topologia da rede. Assumindo que os vértices do grafo são confiáveis e associadas às arestas há uma probabilidade de falha aleatória e independente, a confiabilidade da rede pode ser avaliada a partir do grafo que a modela. Neste artigo, uma classe de grafos com máxima confiabilidade dentre todos os grafos com conectividade de arestas igual a dois é apresentada.

PALAVRAS CHAVE: Grafos Purificados; confiabilidade; conectividade de aresta.

ABSTRACT

Deterministic and probabilistic parameters can be used to measure the reliability of a graph that models a network. Consider that each node of the network is reliable and its failure is related to the probabilities of the edge failures of the graph when these probabilities occur randomly and independently. In this work, a class of graphs with maximum reliability is presented.

KEYWORDS: Harary graphs; reliability; edge connectivity.

1. Introdução

Redes são sistemas físicos, biológicos ou sociais caracterizados por um conjunto de entidades bem definidas que interagem dinamicamente entre si. Muitos sistemas podem ser representados na forma de redes, dentre eles: a *Web*, o mercado financeiro através do *marketgraph*, redes de telefonia, o *callgraph* e redes de transportes entre outras. Grafos são frequentemente utilizados para modelar estas redes de sistemas reais. Estes grafos podem ser determinísticos, quando não há probabilidade de falha associadas às suas arestas ou vértices ou probabilísticos, em caso contrário. Conceitos da teoria dos grafos, tais como medidas de vulnerabilidade, de centralidade e de confiabilidade são utilizados tanto para identificação de elementos mais centrais da rede ou para avaliação da confiabilidade do sistema quanto para a determinação de novas topologias de redes, entre outras aplicações.

A vulnerabilidade de uma rede pode ser entendida como a propensão da mesma ser desconectada após a remoção de um subconjunto de seus vértices e/ou arestas. A determinação de vulnerabilidade envolve o cálculo de parâmetros determinísticos em grafos que modelam tais redes. Dentre eles, podem ser citados os parâmetros clássicos de conectividade de arestas e de vértices; o parâmetro espectral conhecido por conectividade algébrica; parâmetros não-tradicionais como o cardinal de conectividade de arestas, o cardinal de conectividade de vértices, a integridade e o *toughness*, dentre outros. Para maiores detalhes veja Reis Neto, B.M. (2005) e Lima, L. S. (2006).

A confiabilidade de uma rede é a probabilidade que esta tem de permanecer conexa mesmo após a remoção de um subconjunto dos seus vértices e/ou arestas. Em geral, à confiabilidade estão associadas medidas probabilísticas. Assim, redes altamente confiáveis são estruturas fortes e diz-se que uma rede é mais confiável que outra, se a probabilidade da primeira se desconectar for menor que a da segunda.

Neste artigo, uma medida de confiabilidade de redes é apresentada e uma classe de grafos com máxima confiabilidade num determinado conjunto é exibida. Esta medida envolve o cálculo de dois parâmetros determinísticos de vulnerabilidade, a conectividade de arestas e o cardinal de conectividade de arestas, ambos definidos na seção seguinte.

O trabalho está organizado como segue: na seção 2, os principais conceitos e definições da teoria dos grafos são introduzidos. A seção 3 apresenta os grafos purificados e mostra que estes apresentam máxima confiabilidade para certos valores de conectividade de arestas. Finalmente, as conclusões são apresentadas na seção 4.

2. Conceitos Básicos

Os grafos considerados nesse trabalho são não-orientados com $|V| = n$ vértices e $|E| = m$ arestas e denotados por $G = (V, E)$. Um grafo é dito simples se não há a presença de laços ou arestas paralelas, em caso contrário é denominado *multigrafo*. Denota-se $G(n, m)$, o conjunto de todos os grafos conexos com n vértices e m arestas. A *conectividade de arestas* de G , $\lambda(G)$, é o menor número de arestas que devem ser removidas para desconectar G . O *i-ésimo cardinal de conectividade de arestas*, denotado por $m_i = m_i(G)$, é definido como a quantidade de conjuntos de cortes de arestas com cardinalidade i . O conjunto constituído por todos os grafos com n vértices, m arestas, máxima conectividade de arestas e mínima cardinalidade de conjuntos de cortes de aresta com cardinalidade $\lambda(G)$ é denotado por $G_{m,\lambda}(n,m)$. O *grau mínimo* de G , $\delta(G)$, é o menor número de arestas incidentes a um vértice de G , enquanto que o *grau máximo* de um vértice, $\Delta(G)$, é dado pelo maior número de arestas que incidem em um vértice de G .

Kelmans (1966) introduziu uma medida de confiabilidade de um dado grafo G que capturasse a probabilidade do grafo se tornar desconexo após a falha de algumas de suas arestas por

$$P(G, \rho) = \sum_{i=\lambda}^m m_i (1 - \rho)^i \rho^{m-i} \quad (1)$$

Uma dificuldade para o cálculo do parâmetro $P(G, \rho)$ em casos reais, onde o número de arestas e de vértices do grafo é muito grande, é a determinação de $m_i(G)$ para todo i , que

é um problema computacionalmente difícil. Entretanto, Bauer *et al.* (1985) mostra que o cálculo de $P(G, \rho)$ pode ser reduzido somente ao cálculo do primeiro termo da expressão (1), quando i é igual à conectividade de arestas λ . Neste caso, a expressão dada em (1) se transforma em

$$P(G, \rho) = m_\lambda \rho^\lambda (1 - \rho)^{m-\lambda} \tag{2}$$

Veja que os grafos capazes de minimizar a expressão (2) pertencem a $G_{\lambda, m\lambda}(n, m)$, que mais simplesmente é notado por $G_{\lambda, m\lambda}$. O principal desafio é determinar os grafos que minimizam $P(G, \rho)$ para dados n e m . Teixeira *et al.* (2008) apresentou uma família de grafos que minimizam a expressão dada em (2), quando $(2m/n) \geq 3$. Entretanto, para $(2m/n) = 2$, a família de grafos que minimizam tal expressão é formada pelos *grafos purificados* a serem definidos após alguns conceitos preliminares dados a seguir.

A inserção de um vértice de grau 2 em uma aresta de um dado grafo ou multigrafo é uma operação conhecida por *subdivisão de aresta*. Mais formalmente, seja uma aresta $e = (v, w)$ de um grafo (multigrafo) G e G' o grafo resultante de G quando e é substituída pelo par de arestas (v, u) e (u, w) em G então G' é o grafo resultante de uma subdivisão de aresta aplicada a G . Em geral, a aresta e é referida como uma *aresta subdividida*. Veja que os dois grafos da Figura 2.2 resultam da aplicação sucessiva da subdivisão de arestas aplicadas à Figura 2.1.

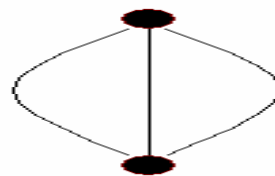


Figura 2.1: Multigrafo

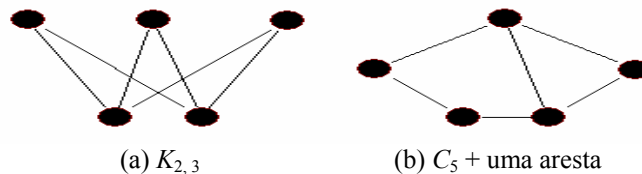


Figura 2.2: Grafos em $G_2(5 6)$

Um grafo $S = S_1(G)$ é um *grafo subdivisão* de um multigrafo, ou simplesmente, uma *subdivisão de G* , quando S_1 é obtido de G pela *subdivisão de cada uma das arestas de G* , ou seja, S_1 é obtido de G , de modo que cada aresta em S seja subdividida exatamente em duas a partir da correspondente aresta em G . Se S for obtido de G por sucessivas operações de subdivisão, ou seja, $S = S_k(G) = S(S_{k-1}(G))$, e dizemos que S_k é a k -ésima subdivisão de G . A Figura 2.3(b) ilustra um grafo S_1 obtido de G , Figura 2.3(a), por uma operação de subdivisão em cada uma das arestas de G .

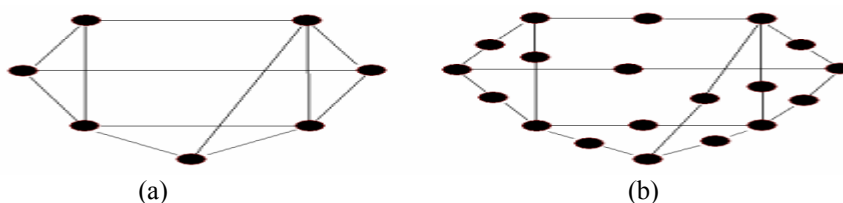


Figura 2.3: Grafo subdivisão S_1 em (b) obtido do grafo em (a)

Dados $m > n$ e r números naturais tais que $n > 3$ e $r > 2$, seja H um grafo simples, r -regular, com n vértices e m arestas em que H_1 seja a primeira subdivisão de H . Então, H_1 é tal que $n_1 = n + nr/2$ e $m_1 = 2m$. Generalizando, tem-se: Dado H e H_1 sua primeira subdivisão, a segunda subdivisão H_2 de H tem $n_2 = n_1 + m$ e $m_2 = 3m$. Logo, $n_2 = n + 2m$; a terceira subdivisão H_3 de H tem $n_3 = n_2 + m$ e $m_3 = 4m$. Conseqüentemente, $n_3 = n + 3m$. Generalizando, a k -ésima subdivisão H_k de H é tal que $n_k = n + km$ e $m_k = (k + 1)m$.

Definição 2.1: Considere $G \in G(n, m)$. Seja um natural $n_k < m$. Diz-se que n_k arestas são subdivididas quando um vértice de grau 2 é inserido em cada uma dessas n_k arestas. Assim, G' terá n_k arestas com uma única subdivisão e as demais arestas sendo exatamente como aquelas de G . Caso $n_k \geq m$, faça $n_k = \beta_1 m + \beta_2$, β_1 e $\beta_2 \in \mathbb{N}$. Quando $n_k = m$, $\beta_2 = 0$, cada aresta pode receber β_1 vértices de grau 2. Se isto ocorrer, o grafo resultante G' será um grafo subdivisão. Se $\beta_2 \neq 0$, cada aresta de G poderá receber β_1 novos vértices de grau 2 e, ainda, haverá β_2 arestas distintas em G , cada uma delas, capaz de receber mais um novo vértice de grau 2. O grafo resultante G' terá, a partir de G , β_2 arestas com duas inserções de vértices de grau 2 e as demais com apenas uma inserção. Em qualquer um destes casos, e somente nestes, diz-se que a operação é uma subdivisão uniforme de arestas de G e o grafo resultante G' é dito ser um *grafo subdivisão uniforme* de G , sendo então denotado por G_{su} . Observe que um grafo subdivisão uniforme de G_{su} permite números de operações de subdivisões de arestas distintos, o que não acontece com o grafo subdivisão de arestas. Ou seja, todo grafo subdivisão é um grafo subdivisão uniforme, mas a recíproca não é verdadeira. Do grafo da Figura 2.4(a), obtemos os grafos mostrados nas Figuras 2.4(b) e 2.4(c). O primeiro, com 5 arestas subdivididas e o segundo, com 7.

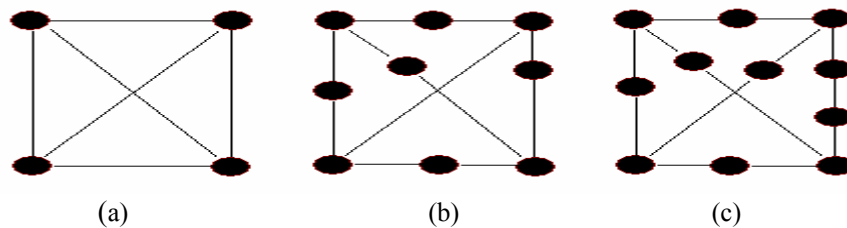


Figura 2.4: Grafos em (b) e (c) obtidos a partir da subdivisão uniforme de arestas no grafo em (a).

Sejam u e v dois vértices adjacentes de G , a *contração elementar* (ou, simplesmente, *contração*) de dois vértices adjacentes u e v é uma operação que resulta num grafo G' , em que os vértices u e v são substituídos por um único vértice w , tendo como arestas incidentes exatamente aquelas que eram incidentes a u ou a v em G . Para maiores detalhes Harary (1969). Dado um caminho P_n , uma contração de dois vértices adjacentes u e v reduz P_n a P_{n-1} . Uma seqüência sucessiva de $n-1$ contrações elementares de vértices de P_n o reduzirá a um único vértice. Em geral, um grafo G é *contratível* a H , se H resulta de G por sucessivas contrações elementares e, neste caso, dizemos ser H uma *contração* de G . Por exemplo, se $t < k$, P_t é uma *contração* de P_k . Quando o grafo G possui um subgrafo induzido isomorfo a um caminho P_k , tal que em G , os graus dos vértices extremais, vértices inicial e final de P_k sejam maiores ou iguais a 3 e os graus dos vértices intermediários sejam exatamente 2, a operação que resulta no grafo G' obtido de G por $(k-2)$ contrações sucessivas dos vértices intermediários de P_k , é chamada de *contração por caminho*. Nem sempre G' pode não resultar em um grafo simples.

3. Grafos Purificados: aqueles com máxima confiabilidade em que $(2m/n) = 2$

Os conceitos de grafos purificados disponíveis na literatura foram encontrados, de maneira muito intuitiva e pouco formal, nos artigos de Bauer *et al.* (1985), Boesch *et al.* (2004) e Wang e Zhang (1997). Nesta seção os grafos purificados são definidos com mais rigor matemático.

Um grafo purificado é um multigrafo quando ele é obtido de G por sucessivas *contrações por caminhos* aplicados a todos os caminhos disjuntos por arestas de G . A operação que faz resultar G' por sucessivas contrações de todos os caminhos disjuntos de G é chamada de *purificação do grafo G* e G' é o *grafo purificado* de G o qual denotamos por $G' = P(G)$.

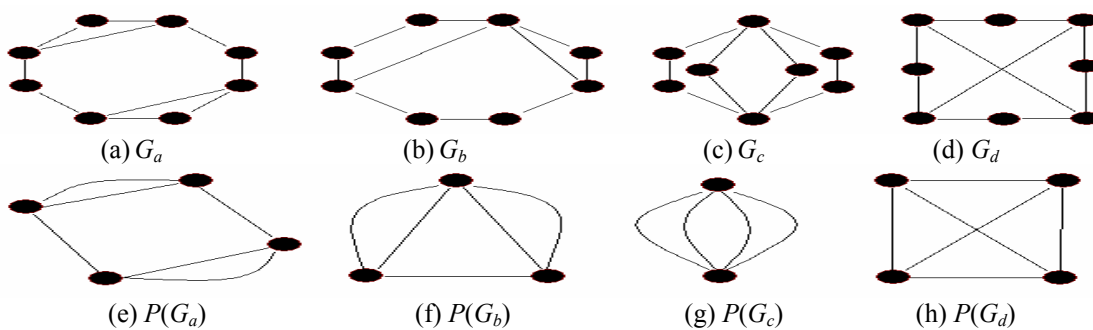


Figura 3.1: Grafos da classe $G_2(8, 10)$ em (a), (b), (c) e (d) com seus respectivos grafos purificados $P(G_a)$, $P(G_b)$, $P(G_c)$ e $P(G_d)$ em (e), (f), (g) e (h).

Se um grafo simples S é resultado de uma k -subdivisão uniforme de um multigrafo G então G resulta de uma contração de S . Assim, dado um grafo G qualquer, seu grafo purificado $P(G)$ é uma contração de G , pois ele é obtido por sucessivas contrações de pares de vértices de G . Por exemplo, na Figura 3.1, todos os multigrafos dados em (e), (f), (g) e (h) são contrações dos respectivos grafos que estão nas Figuras 3.1(a), 3.1(b), 3.1(c) e 3.1(d). Os exemplos dos grafos dados nas Figuras 2.1, 2.2 e 3.1 levaram a Bauer *et al.* (1985) observar que caso existam grafos em $G_2(n, m)$ cujos respectivos grafos purificados sejam iguais, aquele que foi obtido a partir de uma inserção uniforme de vértices de grau 2 em $P(G)$, por sucessivas subdivisões uniformes em um grafo purificado com $\lambda = 3$, é o que terá menor valor para m_2 . Para prova disto consulte Teixeira, L. S (2008).

A partir de agora, mostra-se uma técnica de construção de grafos confiáveis com $\lambda \geq 2$ e m e n conhecidos apresentadas de forma pouco formal em Bauer *et al.* (1985) e com maior rigor matemático em Teixeira, L. S (2008). Para isso, suponha que certo grafo G possa ser decomposto por y caminhos disjuntos por arestas, onde os vértices terminais de cada caminho tenham grau 3 e os intermediários, caso existam, grau 2. Considere então A_i como o conjunto de todos os caminhos disjuntos por arestas e, para $i = 1, \dots, y$. Faça T_i o conjunto de todos os vértices de grau 2 dos respectivos caminhos disjuntos por arestas. O grafo G da Figura 3.2, com 5 vértices, numerados de 0 a 4, sendo o vértice u igual a 0 e o vértice v igual a 2, é usado como exemplo. Este grafo possui 3 caminhos disjuntos por arestas ligando os vértices u e v . Portanto, $y = 3$ e $i = 1, 2$ e 3.

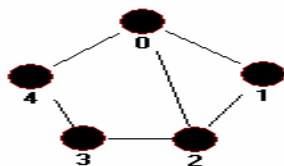


Figura 3.2: Grafo que pode ser decomposto por caminhos disjuntos por arestas.

Os valores para A_i e T_i entre os vértices u e v são os seguintes: $A_1 = \{0, 1, 2\} \Rightarrow T_1 = \{1\}$, $|T_1| = 1$; $A_2 = \{0, 4, 3, 2\} \Rightarrow T_2 = \{4, 3\}$, $|T_2| = 2$; $A_3 = \{0, 2\} \Rightarrow T_3 = \emptyset$, $|T_3| = 0$. Observe que T_i pode ser vazio. Se $|T_i| \neq 0$, a remoção de qualquer par de arestas de A_i desconecta o grafo. Com isso, chega-se às seguintes relações:

$$(i) \quad m_2 \geq \sum_{i=1}^y \binom{|T_i|+1}{2};$$

$$(ii) \quad p_2 = \sum_{i=1}^y |T_i|, \text{ representa o número de vértice com grau } 2 \text{ e};$$

$$(iii) \quad m = \sum_{i=1}^y |T_i| + 1, \text{ a quantidade de arestas.}$$

Sabendo-se que G tem n vértices, m arestas e $\lambda = \lfloor 2m/n \rfloor = 2$, é possível relacionar o número de vértices e arestas do seguinte modo:

$$2m = n\delta + r \tag{3.1}$$

De acordo com Teixeira (2008), pode-se concluir que $p_2 \geq n - r$, onde p_2 é o número de vértices de grau 2. A equação (4.1) pode ser reescrita como $m = n + r/2$. Tomando-se $r/2$ igual a e , as seguintes relações são obtidas:

$$(i) \quad m = n + e; \tag{3.2}$$

$$(ii) \quad p_2 \geq n - 2e; \tag{3.3}$$

$$(iii) \quad m = \sum_{i=1}^y |T_i| + 1 = \sum_{i=1}^y |T_i| + \sum_{i=1}^y 1 = \sum_{i=1}^y |T_i| + y; \tag{3.4}$$

$$(iv) \quad p_2 = \sum_{i=1}^y |T_i|, \tag{3.5}$$

Note que a fórmula para o cálculo de p_2 (3.5) é igual ao 1º termo da fórmula (3.4) e que $m = n + e$. Fazendo as substituições adequadas, encontra-se: $n + e = p_2 + y$, que é igual a $p_2 = n + e - y$. Novamente, substituindo este valor para p_2 na inequação dada em (3.3), obtém-se $y \leq 3e$. Isto significa que a quantidade de caminhos disjuntos em que o grafo G pode ser decomposto é limitada superiormente por $3e$. Resumindo estes resultados tem-se:

$$m_2 \geq \sum_{i=1}^y \binom{|T_i|+1}{2}, \tag{3.6}$$

$$m = \sum_{i=1}^y |T_i| + 1, \tag{3.7}$$

$$y \leq 3e. \tag{3.8}$$

Como $P(G)$ deve possuir $\lambda = 3$, o grafo purificado é conexo 3-regular e, no mínimo, igual a um multigrafo com 2 vértices e 3 arestas. Portanto, podemos considerar que $P(G)$ possui $3e$ arestas e, conseqüentemente, podemos admitir que $y = 3e$. Com isso, o problema de determinar o menor valor para m_2 pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\min \sum_{i=1}^{3e} \binom{x_i}{2} \tag{3.9}$$

onde $x_i = |T_i| + 1$.

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{3e} x_i = m; \tag{3.10}$$

x_i é um inteiro para $i = 1, \dots, 3e$,

onde $x_i = |T_i| + 1$, temos $x_i - 1 = |T_i| = w_i$, para $i = 1, \dots, 3e$. Note que por construção, a diferença entre a quantidade de vértices com grau 2, inseridos nos diferentes caminhos disjuntos por arestas, não pode ser maior que 1, ou seja, $|T_i| - |T_{i+1}| \leq 1$. Com isso, é razoável admitir que a solução do problema em (3.9) é dado por x_i que é igual a s ou $s + 1$.

Sintetizando a solução do problema apresentado em (3.9) temos:

$$x_i = s + 1 \text{ para } i = 1, \dots, L \text{ e } x_i = s \text{ para } i = L + 1, \dots, 3e;$$

Sabendo-se que $\sum_{i=1}^{3e} x_i = m$, a partir da equação (3.4) podemos obter:

$$m = \sum_{i=1}^L s + 1 + \sum_{i=L+1}^{3e} s;$$

$$m = \sum_{i=1}^L s + \sum_{i=1}^L 1 + \sum_{i=L+1}^{3e} s;$$

$$m = \sum_{i=1}^{3e} s + \sum_{i=1}^L 1.$$

Conclui-se então que $m = 3es + L$, para $0 \leq L < 3e$. Note que $\lfloor 2m/n \rfloor = 2$ implica que $m < 3n/2$. Além disso, $m = n + e$. Desta forma, $e < n/2$, $3e < m$ chegamos a.

$$m_2 \geq L \binom{s+1}{2} + (3e-L) \binom{s}{2};$$

Generalizando o procedimento até aqui apresentado, é intuitivo então construir um interessante problema de otimização para calcular o menor valor para m_2 :

$$\min \sum_{i=1}^y \binom{x_i}{2}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^y x_i = m;$$

x_i é um inteiro para $i = 1, \dots, y$;

$$y \leq 3e,$$

onde $x_i = |T_i| + 1$.

Para que a expressão (3.6) forneça o menor valor para $m_2(G)$, onde G é um grafo com n vértices, m arestas e $\lambda = \lfloor 2m/n \rfloor = 2$ é necessário que G seja construído de forma que $p_2 = n - 2e$ e que o número de cortes de arestas com esta cardinalidade seja a menor possível.

Os conjuntos de cortes de arestas de um grafo $\max \lambda$, com $\lambda = 2$ e cardinalidade também igual a 2 que possa ser decomposto por caminhos disjuntos, como sugerido por Bauer *et al.* (1985), devem satisfazer uma das seguintes propriedades: (i) Tem que ser um conjunto de arestas incidentes a um vértice; (ii) precisa ser conjunto formado por pares de arestas de um mesmo caminho disjunto por arestas e, finalmente, (iii) tem que um conjunto formado por arestas diferentes que sejam também formados por pares de arestas de caminhos disjuntos. Os grafos das Figuras 3.1(d), 3.2(b) e 3.3(a) são exemplos para a primeira, segunda e terceira possibilidades de corte, respectivamente. Em caso da possibilidade (iii) ocorrer, o valor de m_2 é maior que $\sum_{i=1}^y \binom{|T_k|+1}{2}$. Portanto, este grafo não pertence a $G_{2, m_2}(n, m)$.

Faça, agora, $e \geq 2$. A construção do grafo mais confiável começa com um grafo purificado G' regular com grau 3, conectividade de aresta igual a 3 e com $2e$ vértices. Como já foi mostrado $|T_i| + 1 = x_i = s + 1$ para $i = 1, \dots, L$ e $|T_i| + 1 = x_i = s$ para $i = L + 1, \dots, 3e$.

Desde que $s \geq 1$, segue-se que $|T_i| = s \geq 1$ para $i = 1, \dots, L$ e $|T_i| = s - 1 \geq 0$ para $i = L + 1, \dots, 3e$. Para formar o grafo G , insira s vértices de grau 2 em cada uma das L arestas do grafo purificado G' e $s - 1$ vértices de grau 2, em cada uma das $3e - L$ arestas restantes. Não é possível ocorrer à situação em que $s = 1$ e $L = 0$, pois, teremos $|T_i| = s = 1$ para $i = 1, \dots, L$ e $|T_i| = s - 1 = 0$ para $i = L + 1, \dots, 3e$, resultando em $m = \sum_{k=1}^{3e} (x_k) = 3e$, $m = n - e = 2e$ e $\lfloor 2m/n \rfloor = 3$, caindo em uma contradição, pois queremos $\lambda = 2$. Assim, sempre no mínimo um T_i não é vazio e a conectividade de arestas será no máximo 2. É claro que $\lambda(G) \geq 2$ desde que G' não tenha uma ponte. Observe que existem $3e$ caminhos disjuntos por arestas com dois vértices terminais cada, denotados por u e v , com grau igual a 3 e todos os vértices internos com grau no máximo igual a 2 em G . Sendo o grafo Purificado G' 3-regular, a remoção de 2 arestas do Grafo G , cada uma de caminhos disjuntos diferentes, não o desconectam, pois cada caminho tem os vértices limites com grau igual a 3. Assim, os conjuntos de cortes de arestas são formados por pares de um mesmo caminho disjunto por arestas e são exatamente:

$$L \binom{s+1}{2} + (3e-L) \binom{s}{2};$$

A seguir um exemplo de construção de um grafo purificado dados n e m é apresentado.

EXEMPLO 3.1: Deseja-se formar um grafo G com 17 vértices e 20 arestas de forma que ele tenha conectividade máxima de arestas e a menor quantidade de conjunto de cortes de arestas com cardinalidade igual a λ . Como $\lambda = \lfloor 2m/n \rfloor = 2$, deve-se construir um grafo pertencente a $G_{2, m_2}(17, 20)$ usando o conceito de grafos Purificados.

Se $n = 17$, $m = 20$, então $e = 3$, pois $m = n + e$. O grafo Purificado G' é um grafo 3-regular com 6 vértices e 9 arestas, ilustrado na Figura 5.7(a). Para formar G , vértices de grau 2 são inseridos em suas arestas de maneira uniforme.

Sendo $m = 3es + L \Rightarrow 20 = 9s + L$, $0 \leq L < 9$, encontra-se $s = 2$ e $L = 2$; desta forma são inseridos 2 vértices de grau em 2 arestas e um vértice de grau 2 em 7 arestas ($3e - L$) remanescentes do grafo purificado G' . Veja que o grafo G obtido, Figura 3.3(b), é um grafo subdivisão uniforme do grafo Purificado G' , Figura 3.3(a), ou seja, $G = G_{su}(G')$. Conforme a Definição 2.1, $n_k = \beta_1 m + \beta_2$ e neste caso $n_k = 11$, $\beta_1 = 1$ e $\beta_2 = 2$.

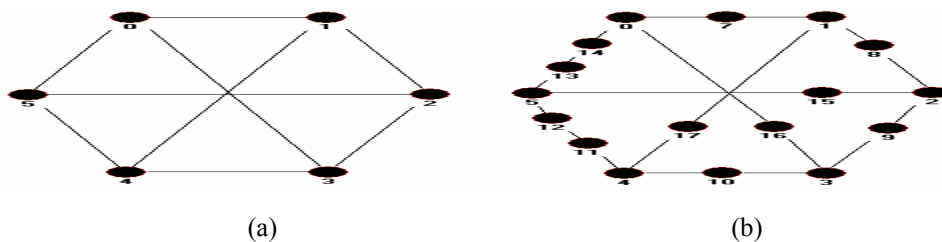


Figura 3.3: Grafo Purificado em (a) e em (b) o grafo G pertencente a $G_{2, m_2}(17, 20)$

Observe que o grafo $G(17,20)$, Figura 3.3(b), possui 9 caminhos disjuntos por arestas, sendo dois deles com 2 vértices internos de grau 2 e outros 7 com 1 vértice interno de grau 2.

Teorema 3.1: Considere $G'_2(n, m)$ como o conjunto de todos os grafos com $\lambda = \lfloor 2m/n \rfloor = 2$ e $m = n + e = 3es + L$, onde $0 \leq L \leq 3e$. Então qualquer grafo de $G'_2(n, m)$ com m_2 mínimo possui $n - 2e$ vértices de grau 2 inseridos uniformemente em um grafo purificado regular de grau 3, com $2e$ vértices e $\lambda = 3$ e pertencem a $G_{2, m_2}(n, m)$. Especificamente, cada uma das L arestas do grafo purificado possui s vértices de grau 2 e cada uma das $3e - L$ arestas remanescentes possui $s - 1$ vértices de grau 2. No caso:

$$m_2 = L \binom{s+1}{2} + (3e-L) \binom{s}{2}$$

4. Algoritmo para construção de grafos pertencentes a $G_{2, m_2}(n, m)$

Como dito anteriormente, o que desejamos é encontrar grafos em $G_2(n, m)$ que tenham $n - 2e$ vértices de grau 2 e cortes de arestas formados somente por arestas incidentes e por arestas de um mesmo caminho disjunto por arestas. Desta forma, a seguir é descrito um procedimento para construir grafos pertencentes a $G_{2, m_2}(n, m)$.

O Algoritmo a seguir usa as idéias descritas em Bauer *et al.* (1985) que se baseiam no conceito de distribuição uniforme de vértices de grau 2 em um grafo purificado 3-regular e o clássico conceito de subdivisão de aresta.

Observe que cada caminho disjunto por arestas A_i de um grafo G pertencente a G_{2, m_2} é um subgrafo induzido isomorfo a um caminho P_k . Aplicando-se o conceito de contração por caminho a cada A_i e considerando que $3e$ deve ser o número de arestas do grafo purificado $G' = P(G)$ 3-regular, conclui-se que a quantidade de vértices de G' é igual a $2e$.

Os dados de entrada do algoritmo são os valores de n, m do grafo G a ser construído. Sabemos que o grafo inicial é o grafo Purificado G' 3-regular com $2e$ vértices e $3e$ arestas. O objetivo é distribuir vértices de grau 2 de forma mais uniforme possível, evitando a possibilidade de corte formado por arestas de caminhos disjuntos diferentes. O algoritmo possui os seguintes passos:

Entrada: n, m e $e \in \mathbb{N}, 0 \leq k < n$ e $G' (2e, 3e)$ o grafo purificado 3-regular.

1- Faça

$e = m - n;$

Construa um grafo 3-regular com $2e$ vértices e $3e$ arestas

1- Faça

$$k = \left\lfloor \frac{n - 2e}{3e} \right\rfloor;$$

2 – Faça
 k subdivisões no grafo purificado G' ;

3 – Faça
 $n_k = 2e + 3ke$, e $m_k = (k+1)3e$;
 Se ($n_k = n$ e $m_k = m$) então
 Fim
 Senão
 $L = |m - m_k|$,

5 – Insira 1 vértice de grau 2 em L arestas diferentes do grafo corrente.
 Fim

Desta forma, observando o desenvolvimento do Algoritmo, são inseridos k vértices de grau 2 em $3e - L$ arestas do grafo Purificado G' e $k + 1$ vértices de grau 2 nas L arestas remanescentes, de acordo com a Definição 2.1. Assim, O grafo G construído sempre tem no mínimo um T_i , conjunto de vértices de grau 2 de cada i caminho disjunto por aresta, que não é vazio. Portanto, a conectividade de aresta do grafo é 2.

O exemplo a seguir confirma que o algoritmo apresentado está de acordo com o procedimento descrito na Seção 3 para construção de grafos pertencentes a $G_{2, m_2}(n, m)$.

Exemplo 4.1: Deseja-se construir um grafo G com 7 vértices e 9 arestas de forma que ele tenha conectividade máxima de arestas e a menor quantidade de conjunto de cortes de arestas com cardinalidade igual a λ . Como $\lambda = \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor = 2$, deve-se construir um grafo pertencente a $G_{2, m_2}(7, 9)$ usando o conceito de grafos purificados.

Se $n = 7, m = 9$, então $e = 2$, pois $m = n + e$. O grafo purificado será um grafo 3-regular com 4 vértices e 6 arestas, ilustrado na Figura 5.9(a). Este grafo é construído nos Passos 4 e 5 do Algoritmo 5.3, onde é inserido 1 vértice de grau 2 em $m - 3e$ ($9 - 6 = 3$) arestas diferentes do grafo Purificado $G'(4, 6)$ e construímos o grafo da Figura 4.1(b).

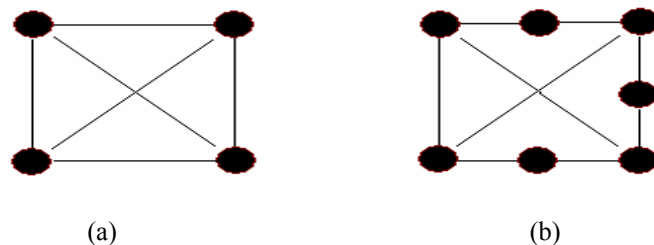


Figura 4.1 Grafo Purificado G' em (a), e em (b) o grafo G com 7 vértices e 9 arestas

Veja que com a inserção uniforme de vértices de grau 2 no grafo Purificado G' 3-regular o grafo G possui $n - 2e$ vértices de grau 2 e os conjuntos de cortes com cardinalidade igual a 2 são formados por pares de um mesmo caminho disjunto, com isso a remoção de 2 arestas de G , cada uma de caminhos disjuntos diferentes, não o desconectam.

Conclusões

Como contribuição deste trabalho, introduzimos formalmente o conceito de grafo purificado anteriormente utilizado na literatura de maneira apenas intuitiva. Além disso, mostramos aqui que, os grafos com n vértices e m arestas que obedecem à relação $2m/n = 2$, construídos a partir da inserção uniforme de vértices de grau 2 em um grafo purificado com $\lambda \geq 3$, são modelos de grafos confiáveis. Desta forma, o interesse prático por redes que sigam este modelo de grafos é justificável, quando o interesse é construir redes que tenham baixa probabilidade de se desconectarem diante de uma possível falha que acarrete a eliminação de um subconjunto de suas arestas. Os resultados teóricos obtidos neste trabalho, além de confirmarem aqueles obtidos por Bauer *et al.* (1985), nos permitem, de forma natural, a construção de um algoritmo capaz de exibir uma classe de grafos confiáveis quando a igualdade $2m/n = 2$ é válida.

Referências

BAUER, D., BOESCH, F., SUFFEL, C. “Combinatorial optimization problems in the analysis and design of probabilistic networks”, *Networks*, v.15, pp. 257-271, 1985.

BAUER, D., BOESCH, F., SUFFEL, C. “On the validity of a reduction of reliable network design to a graph extremal problem”, *IEEE Transactions on circuits and systems*, v.34, pp. 1579-1581, 1987.

DENG, H., CHEN, J., LI, R., et al., "On the construction of most reliable networks", *Discrete Applied Mathematics*, v. 140, pp. 19-33, 2004.

HARARY, F., *Graphy Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1969.

KELMANS, A. *Connectivity of probabilistic networks*, *Automatic Telemekhanika*, v.3, pp.98-116, 1966.

LIMA, L.S., *Vulnerabilidade de redes em grafos de Harary*, D. Sc., COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro, 2006.

REIS NETO, B.M., *Um survey sobre parâmetros de vulnerabilidade em redes*, M. Sc., COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro, 2005.

TEIXEIRA, L.S. *Grafos que modelam redes confiáveis*, M. Sc., COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro, 2008.

TEIXEIRA, L.S., N.M. Abreu, LIMA, L.S., *Grafos que modelam redes confiáveis*, XL Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, João Pessoa, PB, 2008.