O PROBLEMA DE SEQUENCIAMENTO EM PROJETOS COM RESTRIÇÕES DE RECURSOS MODELADO COMO UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA MISTA

Clarisse da Silva Vieira
Universidade Federal de Minas Gerais - E.E. - Departamento de Engenharia Mecânica
Av. Antônio Carlos, 6627, Pampulha - CEP 31270-901 – Belo Horizonte - MG
cosvieira@terra.com.br

Carlos Roberto Venâncio de Carvalho
Universidade Federal de Minas Gerais - E.E. - Departamento de Engenharia de Produção
Av. Antônio Carlos, 6627, Pampulha - CEP 31270-901 – Belo Horizonte - MG
carlos@dep.ufmg.br

Ricardo Luiz Utsch de Freitas Pinto
Universidade Federal de Minas Gerais - E.E. - Departamento de Engenharia Mecânica
Av. Antônio Carlos, 6627, Pampulha - CEP 31270-901 – Belo Horizonte - MG
utsch@demec.ufmg.br

RESUMO

Este artigo propõe uma formulação de programação linear para o Problema de Sequenciamento em Projeto com Restrição de Recurso (PSPRR). O problema aqui considerado consiste essencialmente em um problema de alocação de recursos combinado com um problema de sequenciamento de atividades. Neste problema, o tempo de processamento das atividades e a quantidade de recursos renováveis são variáveis contínuas. Além disso, as relações de precedência entre as atividades devem ser respeitadas. A atribuição simultânea de recursos é modelada com auxílio de variáveis binárias. Nessa formulação, o tempo de processamento depende da quantidade de recurso alocada. Para as funções não lineares que relacionam essas duas variáveis são propostas aproximações lineares, envolvendo segmentos de reta. Embora o tratamento vise problemas com recursos contínuos, ele também se apresenta eficaz no tratamento de problemas com recursos discretos. A aplicação do procedimento proposto é exemplificada em um problema cujos recursos discretos são tratados de forma relaxada.

PALAVRAS CHAVE. Programação linear. Restrição de recurso. Sequenciamento. Área de classificação principal (PO na Administração & Gestão da Produção).

ABSTRACT

This paper proposes a linear programming formulation for the Resource Constrained Project Scheduling Problem (RCPSP). The problem considered here is essentially a resource allocation problem combined with a scheduling problem. In this problem, the activities processing time and the amount of renewable resources are continuous variables. Moreover, the precedence relations between activities must be respected. The simultaneous allocation of resources is modeled with binary variables. In this formulation, the processing time depends on the amount of resource allocated. For nonlinear functions that relate these two variables are proposed linear approximations, involving line segments. Although treatment aimed at problems with continuous resources, it also appears effective in treating problems with discrete resources. The procedure proposed is exemplified in a discrete problem whose resources are treated relaxed.

KEYWORDS. Linear programming. Resource constrained. Scheduling.

1. Introdução

O Problema de Sequenciamento em Projeto com Restrição de Recurso (PSPRR) é formulado, segundo Brucker *et al.* (1998), por um conjunto de n atividades (i = 1, 2, ..., n) e r recursos renováveis. As relações de precedência devem ser respeitadas, ou seja, algumas atividades, a priori, necessariamente precisam ser realizadas antes de outras. Além disso, mesmo que não estabelecido a priori, se na realização do projeto, os recursos são repassados de uma atividade para outra, a primeira tem que preceder a segunda.

Os problemas de sequenciamento classificados como PSPRR são problemas relevantes da literatura que motivam diversos autores, tais como Artigues *et al.* (2003), Balas (1967), Brucker e Knust (2000), Carlier e Néron (2003), Deblaere *et al.* (2007), Mingozzi *et al.* (1998), Christofides *et al.* (1987) e Klein e Scholl (1999). Devido, porém, à complexidade e dificuldade de resolução de tais problemas, muitas variações da formulação original podem ser observadas.

Balas (1967) introduz uma abordagem diferente para o problema, considerando que as atividades que inicialmente poderiam ser executadas simultaneamente, não podem ser realizadas plenamente em paralelo, mesmo que não existam relações de precedência entre elas. Isso porque tais atividades compartilham o mesmo recurso. Essa abordagem foi considerada em muitas outras formulações, como por exemplo, a apresentada por Artigues *et al.* (2003).

A formulação proposta por Artigues *et al.* (2003) considera ainda o PSPRR como um problema de fluxo. O que também pode ser constatado em Deblaere *et al.* (2007).

Brucker e Knust (2000), assim como Carlier e Néron (2003), Mingozzi *et al.* (1998), Christofides *et al.* (1987) e Klein e Scholl (1999) modificam a formulação do problema original relaxando algumas restrições.

Brucker e Knust (2000), Carlier e Néron (2003), Klein e Scholl (1999) também propõem o cálculo de limites inferiores para o PSPRR.

No entanto, apesar das características particulares apresentadas para cada formulação do PSPRR, os autores, inseridos neste contexto, consideram, de maneira semelhante, que tanto o valor do tempo de processamento de cada atividade do projeto, bem como da quantidade de recurso utilizada na sua execução, são constantes conhecidas a priori. Como constata Konstantinidis (1998), essas condições são usuais em muitos outros trabalhos e publicações.

Por outro lado, segundo Poder *et al.* (2004), em muitas aplicações concretas, as quantidades de recursos consumidas e, consequentemente, os tempos de execução das atividades são raramente constantes.

Em Vieira *et al.* (2007), uma relação não linear entre o tempo de execução e a quantidade de recurso alocada para cada atividade foi linearizada aproximando-se a curva por uma secante única. No entanto, este procedimento gera imprecisões relevantes ao problema, fornecendo soluções muitas vezes bastante diferentes da solução ótima exata.

Neste trabalho, para as funções não lineares que relacionam o tempo de execução com a quantidade de recurso são propostas aproximações lineares envolvendo um número arbitrário de segmentos de retas. Um dos aspectos relevantes do presente estudo é a sua aplicabilidade a problemas com recursos discretos. Neste caso, obtêm-se soluções relaxadas. Estas soluções são computacionalmente mais fáceis de serem obtidas e, se necessário, são facilmente ajustadas a posteriori para atenderem o quesito de recurso discreto no tempo.

Na Seção 2 do presente trabalho, apresenta-se a formulação não linear do PSPRR. A Seção 3 contém toda a argumentação e o desenvolvimento para uma reformulação linear aproximada do PSPRR. A formulação linear para o problema é apresentada na Seção 4. Um exemplo de problema de sequenciamento é modelado e resolvido computacionalmente na Seção 5. Finalmente, a Seção 6 apresenta as principais conclusões sobre o trabalho.

2. Formulação Não Linear do PSPRR

Considere o problema de realizar em tempo mínimo uma sequência de n atividades que necessitam compartilhar um mesmo recurso R, sendo que o tempo de realização de uma atividade varia de forma não linear com a quantidade de recurso aplicada.

No contexto da teoria da otimização, trata-se de um problema não linear de sequenciamento de atividades (Job Shop), para o qual se pretende minimizar o tempo total de execução, através da alocação ótima dos recursos.

Matematicamente, o problema pode ser formulado como:

$$\text{Minimizar } t_{n+1} \tag{1}$$

$$\text{s.t. } p_i = \beta_i(q_i) \qquad i = 1,\ldots,n; \tag{2}$$

$$(t_j - t_i - p_i)y_{ij} \geq 0 \qquad i = 0,1,\ldots,n;\ j = 1,\ldots,n+1, i \neq j; \tag{3}$$

$$0 \leq f_{ij} \leq l_{ij} y_{ij} \qquad i = 0,1,\ldots,n\ j = 1,\ldots,n+1, i \neq j; \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} f_{0j} = R \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} f_{ij} = q_i \qquad i = 1,\ldots,n; \tag{6}$$

$$\sum_{i=0}^{n} f_{ij} = q_j \qquad j = 1,\ldots,n; \tag{7}$$

$$\sum_{i=0}^{n} f_{in+1} = R \tag{8}$$

$$y_{ij} + y_{ji} \leq 1,\ y_{ij} \in \{0,1\}, \quad i = 0,1,\ldots,n;\ j = 1,\ldots,n+1, i \neq j; \tag{9}$$

$$y_{ij} = 1 \qquad \forall (i,j) \in E \tag{10}$$

$$t_i \geq 0 \qquad i = 0,1,\ldots,n+1; \tag{11}$$

$$\underline{q}_i \leq q_i \leq \overline{q}_i \qquad i = 1,\ldots,n \tag{12}$$

Onde:

- t_i (i = 1,..., n) denota a data de início da i-ésima atividade;
- t_0 denota a data de início do projeto, coincidente com o término de uma atividade artificial de índice 0, a qual precede todas as demais atividades;
- t_{n+1} denota a data de término do projeto, correspondente a data de início de uma atividade artificial, com índice $n+1$, a qual é precedida por todas as demais atividades;
- q_i denota a quantidade de recurso utilizada na i-ésima atividade;
- p_i denota o tempo de execução da i-ésima atividade;
- $y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a } i\text{-ésima atividade precede a } j\text{-ésima atividade;} \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$
- f_{ij} denota a quantidade de recurso que será transferida da i-ésima atividade para a j-ésima atividade;
- l_{ij} denota a quantidade máxima de recurso que pode ser transferida da i-ésima atividade para a j-ésima atividade;
- n denota o número de atividades do projeto;
- R denota a quantidade máxima disponível do recurso utilizado;
- E = {(i, j): i = 0, 1,..., n, j = 1,..., $n+1$, tal que a atividade i precede a atividade j} representa o conjunto de indexadores de pares de atividades cuja precedência é pré-estabelecida.

A função objetivo (1) indica a minimização da data de finalização do projeto (t_{n+1}). Isto é impõe-se a priori que a atividade artificial (de índice n+1) preceda todas as demais atividades

(y_{in+1}=1, i = 0, 1,..., n). As restrições (2) definem o tempo de execução de cada atividade do projeto como uma função não linear da quantidade de recurso alocada. As restrições (3) estabelecem a precedência da atividade i em relação à atividade j. Elas serão ativadas quando y_{ij} = 1 e inativas quando y_{ij} = 0. Por sua vez as restrições (4) estabelecem limites para o fluxo de recurso entre a atividade i e a atividade j. Note que, se y_{ij} = 0, necessariamente deve-se ter f_{ij} = 0. As restrições (5) estabelecem que a somatória dos fluxos de recurso que saem da atividade inicial é igual à quantidade total disponível desse recurso. As restrições (6) e (7) expressam que a quantidade de recurso que entra em uma atividade deve ser igual à quantidade de recurso que sai da mesma, ou seja, garante a continuidade de fluxo. As restrições (8) garantem que a quantidade total de recurso que chega à atividade final é igual à quantidade total disponível desse recurso. As restrições (9) impossibilitam que a variável de precedência y_{ij} e a variável de precedência y_{ji} sejam simultaneamente iguais a um. As relações (10) garantem as precedências, estabelecidas a priori. Finalmente, as restrições (11) e (12) estabelecem, respectivamente, a positividade das datas de inicio das atividades e os limites mínimo ($\underline{q}_i$) e máximo ($\overline{q}_i$) para a quantidade de recurso q_i.

Note que o problema possui não linearidade nas restrições (2) e (3). As restrições (3) serão manipuladas no presente trabalho de acordo com o procedimento já consagrado na literatura, conforme será mostrado adiante. Por outro lado, as restrições (2), foco do presente trabalho, receberão um tratamento original, cujo desenvolvimento será apresentado a seguir.

3. Linearização das Curvas de Tempo de Execução por Segmentos de Reta

No presente artigo, considera-se o tempo de execução de uma atividade (p_i) inversamente proporcional à quantidade de recurso alocada (q_i), conforme ilustrado na figura 1, obedecendo à equação:

$$p_i(q_i) = \frac{\alpha_i}{q_i} \quad q_i \in \left[\underline{q}_i, \overline{q}_i\right],$$

onde, α_i representa um fator de proporcionalidade, correspondente à atividade i, sendo $\underline{q}_i$ e $\overline{q}_i$ as quantidades mínima e máxima admissíveis de recurso para executar a atividade i.

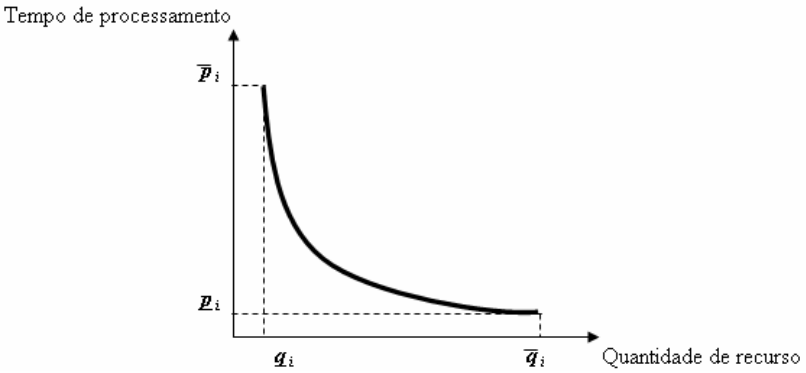

Figura 1: Gráfico da função p_i não linear

Uma forma simples de aproximação linear para a função $p_i(q_i)$, adotada em Vieira *et al.*, (2007), consiste em substituí-la pela reta secante, conforme mostrado na figura 2.

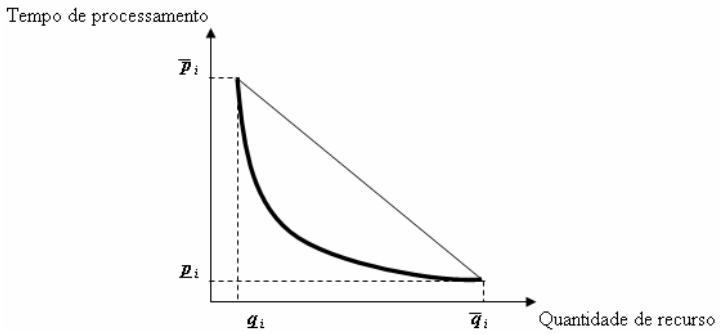

Figura 2: Gráfico da função p_i linear

A reta indicada na figura 2 tem como equação:

$$p_i = \overline{p}_i - a_i x_i,$$

onde:

$$a_i = \frac{\overline{p}_i - \underline{p}_i}{\overline{q}_i - \underline{q}_i},$$

$$x_i = q_i - \underline{q}_i,$$

sendo $\overline{p}_i$ o tempo de execução da atividade i, quando é alocada a quantidade $\underline{q}_i$ de recurso para executá-la e $\underline{p}_i$ o tempo de execução da atividade i, quando é alocada a quantidade $\overline{q}_i$ de recurso para executá-la.

Note que x_i representa a quantidade de recurso alocada para a execução da atividade i, além da quantidade mínima $\underline{q}_i$. Por sua vez, $\overline{p}_i$ e $\underline{p}_i$ correspondem, respectivamente, ao máximo e ao mínimo tempo possível para a aplicação do recurso na execução da atividade i.

Conforme já comentado, essa aproximação gera algumas dificuldades, como por exemplo, uma discrepância muito grande entre o tempo de execução aproximado e o real, o que altera significativamente a solução ótima obtida. Com o objetivo de controlar os erros de aproximação e melhorar a precisão dos resultados, no presente artigo propõe-se uma aproximação através de um número arbitrário de segmentos de reta, tal que as aproximações dos tempos de execução sejam suficientemente próximas dos seus valores exatos.

Para compreender a segmentação arbitrária da curva de tempo de execução como função dos recursos alocados considere a figura 3.

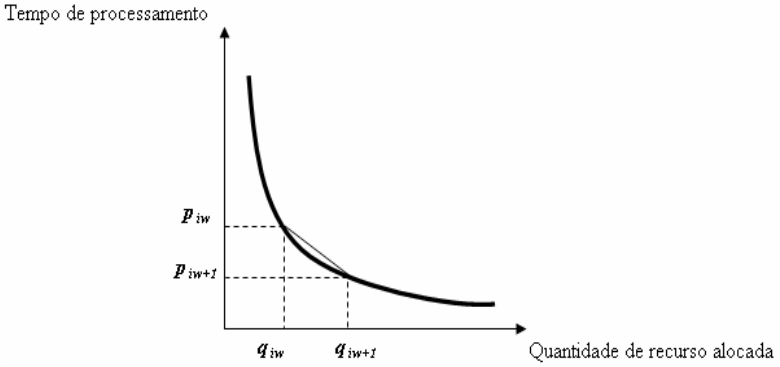

Figura 3: Segmentação arbitrária para linearizar a função p_i

A figura 3 representa um segmento arbitrário de reta aproximando a curva sobre o intervalo arbitrário:

$$q_i \in [q_{iw}, q_{iw+1}].$$

Neste caso, o segmento indicado na figura 3 possui como equação:

$$p_i = p_{iw} - a_{iw} x_i$$

onde:

$$a_{iw} = \frac{p_{iw} - p_{iw+1}}{q_{iw} - q_{iw+1}}$$

$$x_i = q_i - q_{iw}, \qquad q_{iw} \le q_i \le q_{iw+1}$$

Note que q_{iw} e q_{iw+1} correspondem à menor quantidade e a maior quantidade de recurso para o intervalo considerado, respectivamente. Por sua vez, p_{iw} e p_{iw+1} correspondem ao maior tempo e ao menor tempo de execução, respectivamente, para o intervalo considerado.

A aplicação da aproximação da curva de recursos alocados ao Problema de Sequenciamento em Projeto com Restrição de Recurso (PSPRR) é feita estendendo-se cada segmento sobre todo o intervalo do problema $q_i \in [\underline{q}_i, \overline{q}_i]$. Para compreender a estratégia, considere inicialmente uma aproximação por dois segmentos como mostrado na figura 4.

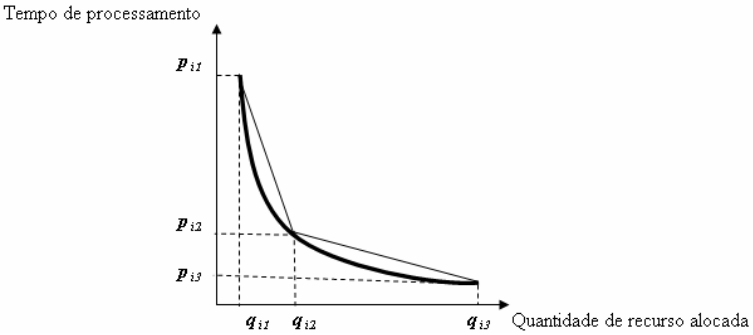

Figura 4: Gráfico da função p_i linearizada por dois segmentos de reta

Note que, a reta suporte de cada segmento está estendida sobre todo o intervalo de pertinência, ou seja, $q_i \in [\underline{q}_i, \overline{q}_i]$. Assim, o primeiro segmento estendido tem a seguinte representação matemática:

$$p_i = p_{i1} - a_{i1} x_i$$

onde:

$$a_{i1} = \frac{p_{i1} - p_{i2}}{q_{i1} - q_{i2}}$$

$$x_i = q_i - q_{i1}, \qquad \underline{q}_i = q_{i1} \le q_i \le q_{i3} = \overline{q}_i$$

Por sua vez, para o segundo segmento estendido temos:

$$p_i = p_{i2} - a_{i2}x_i$$

onde:

$$a_{i2} = \frac{p_{i2} - p_{i3}}{q_{i2} - q_{i3}}$$

$$x_i = q_i - q_{i3}, \qquad \underline{q}_i = q_{i1} \le q_i \le q_{i3} = \overline{q}_i$$

A idéia é incorporar a aproximação por dois segmentos no problema de otimização através das desigualdades:

$p_i \ge p_{i1} - a_{i1}x_i$ (13) $\qquad 0 \le x_i \le \overline{q}_i - \underline{q}_i$

$p_i \ge p_{i2} - a_{i2}x_i$ (14) $\qquad 0 \le x_i \le \overline{q}_i - \underline{q}_i$

Note que o intervalo estabelecido para x_i, para ambas as aproximações, corresponde à:

$$\underline{q}_i \le q_i \le \overline{q}_i$$

Observe que o menor valor de p_i, satisfazendo a ambas as desigualdades, estará sobre o primeiro segmento, no caso de $q_i \in [q_{i1}, q_{i2}]$, e estará sobre o segundo segmento para $q_i \in [q_{i2}, q_{i3}]$.

Não é difícil observar também que, para o problema de otimização cujo objetivo e minimizar o tempo necessário para realização das tarefas, o valor de p_i deverá ser o menor valor satisfazendo as desigualdades (13) e (14). Portanto, na solução ótima, o valor de p_i estará de acordo com a equação (13), no caso de q_i ótimo pertencer ao primeiro intervalo, ou de acordo com a equação (14), no caso de q_i ótimo pertencer ao segundo intervalo.

Note que, para um dado q_i, o valor de p_i será definido pela primeira aproximação, caso $q_i \in [q_{i1}, q_{i2}]$ e pela segunda aproximação, caso $q_i \in [q_{i2}, q_{i3}]$.

Este raciocínio pode ser estendido a um número arbitrário de segmentos, levando às seguintes desigualdades:

$$\begin{cases} p_i \ge p_{i1} - a_{i1}x_i \\ p_i \ge p_{i2} - a_{i2}x_i \\ \text{M} \\ p_i \ge p_{iw^i} - a_{iw^i}x_i \end{cases} \qquad 0 \le x_i \le \overline{q}_i - \underline{q}_i$$

onde, w^i denota o número de segmentos adotados para cada atividade i.

4. Formulação Linear do PSPRR

O PSPRR é formulado como um modelo de Programação Linear Inteira Mista:

$$\text{Minimizar } t_{n+1} \tag{15}$$

s.t.

$$\begin{cases} p_i \ge p_{i1k} - a_{i1k}x_{ik} \\ p_i \ge p_{i2k} - a_{i2k}x_{ik} \\ \text{M} \qquad 0 \le x_{ik} \le \overline{q}_{ik} - \underline{q}_{ik} \qquad i = 1,\text{K},n, \quad k = 1,\text{K},r; \\ p_i \ge p_{iw^ik} - a_{iw^ik}x_{ik} \end{cases} \tag{16}$$

$$t_j - t_i - p_i - M_1 y_{ij} \geq -M_1 \qquad i = 0,1,\ldots,n; j = 1,..,n+1, i \neq j; \tag{17}$$

$$f_{ijk} - l_{ijk} y_{ij} \leq 0 \qquad i = 0,1,\ldots,n\ j = 1,\ldots,n+1, i \neq j, k = 1,\mathrm{K}\ ,r; \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} f_{0jk} = R_k \qquad k = 1,\mathrm{K}\ ,r; \tag{19}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} f_{ijk} = q_{ik} \qquad i = 1,..,n, k = 1,\mathrm{K}\ ,r; \tag{20}$$

$$\sum_{i=0}^{n} f_{ijk} = q_{jk} \qquad j = 1,..,n, k = 1,\mathrm{K}\ ,r; \tag{21}$$

$$\sum_{i=0}^{n} f_{in+1k} = R_k \qquad k = 1,\mathrm{K}\ ,r; \tag{22}$$

$$y_{ij} + y_{ji} \leq 1,\ y_{ij} \in \{0,1\}, \qquad i = 0,1,\ldots,n; j = 1,\ldots,n+1, i \neq j; \tag{23}$$

$$y_{ij} = 1 \qquad \forall (i,j) \in E \tag{24}$$

$$t_i \geq 0 \qquad i = 0,1,\ldots,n+1; \tag{25}$$

$$f_{ijk} \geq 0 \qquad i = 0,1,\ldots,n\ j = 1,\ldots,n+1, i \neq j, k = 1,\mathrm{K}\ ,r; \tag{26}$$

Onde t_i (i = 1,..., n), t_0, t_{n+1}, p_i, y_{ij}, f_{ij}, n, R e E, x_i, w, M_1 e l_{ij} são como definidos no modelo 1. Adicionalmente, tem-se:

- $k=1,\ldots,r$ denota a quantidade do recurso que será alocada para acelerar a execução da i-ésima atividade i;
- R_k denota a quantidade máxima disponível do recurso k utilizado.

Note que a formulação proposta agora e estendida para mais de um tipo de recurso e que o tempo de execução de cada atividade do projeto agora é definido como uma função linear da quantidade de recurso alocada, dado pelas restrições (16). Note também que existirá uma restrição deste tipo para cada segmento de reta considerado na aproximação. Assim, p_i deve atender a todas as restrições (16). Dessa forma, para um dado q_i, a restrição (16) ativa será aquela correspondente ao segmento de reta que fornece o maior valor de p_i. Isso garante que o tempo de processamento da atividade i será calculado de acordo com o segmento de reta apropriado.

5. Exemplo

Considere um projeto constituído da montagem de um conjunto de cinco equipamentos mecânicos. A montagem de cada equipamento corresponde a uma atividade com a necessidade de um número total de homens-hora para ser realizada (vide tabela 1).

Atividade	Homens-Hora	Limite de Trabalhadores
1	20	1 ≤ Homens ≤ 7
2	25	2 ≤ Homens ≤ 8
3	25	3 ≤ Homens ≤ 9
4	30	4 ≤ Homens ≤ 10
5	15	5 ≤ Homens ≤ 11

Tabela 1: Dados gerenciais do exemplo

De acordo com a especificidade de cada equipamento, existe uma necessidade mínima de homens para montá-lo bem como um número máximo de homens que podem trabalhar simultaneamente sobre o equipamento, conforme mostra a tabela 2. Admite-se que a montagem deverá ser realizada por uma empresa que possui uma equipe de dez trabalhadores.

Note, por exemplo, que para a atividade cinco ser executada são necessários no mínimo 5 e no máximo 11 trabalhadores. No entanto, tecnicamente, ela só poderá utilizar uma quantidade

máxima de 10 trabalhadores, que é o número disponível do recurso.

Atividade	Necessidade (recurso-hora)	Quantidade Mínima Permitida	Quantidade Máxima Permitida
1	20	1	7
2	25	2	8
3	25	3	9
4	30	4	10
5	15	5	11

Tabela 2: Dados gerenciais do exemplo

Para modelar o problema são introduzidas artificialmente uma atividade "0" e uma atividade "6", conforme ilustra o grafo da figura 5. No presente caso, admite-se que a montagem dos equipamentos pode ser feita em qualquer ordem, sem nem uma precedência estabelecida a priori. Somente a título de ilustração, no grafo da figura 5, as cinco atividades estão sendo realizadas em paralelo.

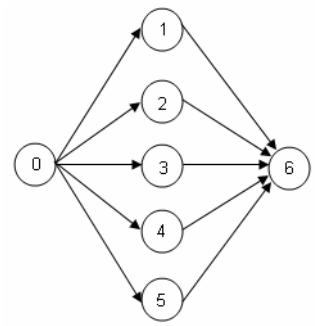

Figura 5: Grafo do exemplo

A partir das quantidades mínimas ($\underline{q}_i$) e máximas ($\overline{q}_i$) do recurso admissíveis para a execução de cada atividade do projeto, podem-se calcular os tempos de processamento máximos ($\overline{p}_i$) e mínimos ($\underline{p}_i$), conforme mostrado na tabela 3.

Atividade	R	$\underline{q}_i$	$\overline{p}_i$	$\overline{q}_i$	$\underline{p}_i$
0	-	0	0	0	0
1	10	1	20,0	7	2,86
2	10	2	12,5	8	3,13
3	10	3	8,3	9	2,78
4	10	4	7,5	10	3,00
5	10	5	3,0	10	1,50
6	-	0	0	0	0

Tabela 3: Dados técnicos do exemplo

Note que, para a atividade 5, o número máximo de trabalhadores está estabelecido como 10, correspondendo ao total de trabalhadores disponíveis, ou seja, embora ela admita um máximo de 11 trabalhadores, esse número é impossível de ser oferecido pela empresa.

Este problema foi manipulado através da metodologia apresentada no presente artigo e resolvido computacionalmente utilizando-se o MPL (*Mathematical Programming Language*) e o GLPK (*GNU Linear Programming Kit*).

Uma primeira solução foi obtida inicialmente, aproximando-se as curvas de recurso por um único segmento de reta, cujos resultados estão apresentados na tabela 4.

Atividade	x_i	t_i	p_i	q_i
0	-	0	0	-
1	6	0	2,9	7
2	0	0	12,5	2
3	1	5,0	7,5	4
4	0	5,0	7,5	4
5	3	2,9	2,1	8
6	-	12,5	0	-

Tabela 4: Solução do exemplo por um único segmento de reta

Uma segunda solução foi obtida conforme mostrado na tabela 5. Trata-se de uma solução com as curvas de tempo de execução sendo aproximadas pelo número de segmentos indicados na segunda coluna da tabela 5. O número de segmentos objetivou intervalos de uma unidade entre um segmento e outro.

Atividade	Número de segmentos	x_i	t_i	p_i	q_i
0	-	-	0	0	-
1	6	3	0	5	4
2	6	3	6,5	5	5
3	6	2	6,5	5	5
4	6	2	0	5	6
5	5	5	5	1,5	10
6	-	-	11,5	0	-

Tabela 5: Solução do exemplo por segmentos de reta

As soluções ótimas obtidas estão representadas através de diagrama de Gantt, para a primeira solução na figura 6 e, para a segunda solução, na figura 7.

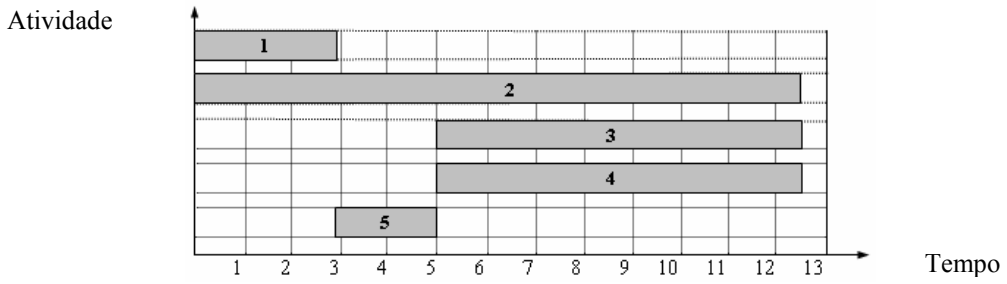

Figura 6: Diagrama de Gantt do exemplo por um único segmento de reta

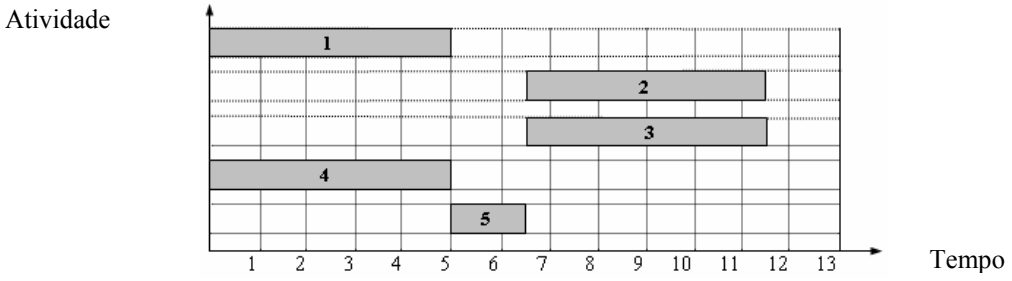

Figura 7: Diagrama de Gantt do exemplo por segmentos de reta

Note que a sequência de execução das atividades, para cada solução, é bastante diferente. Por sua vez, o tempo para realizá-las foi menor para a segunda solução (12,5 para a primeira e 11,5 para a segunda).

Com o objetivo de comprovar o desempenho do modelo apresentado, foram criados adicionalmente três grupos de problemas. Cada grupo formado por um conjunto de cinco exemplos. Para cada exemplo:

- existe somente um tipo de recurso;
- o número de atividades é igual à 7, 12 e 17 para os exemplos do grupo 1, 2 e 3, respectivamente;
- os demais dados, como o tempo de processamento e a quantidade de recurso disponível, variam de um exemplo para outro de forma aleatória, dentro da quantidade mínima e máxima de viabilidade permitida.

Os resultados computacionais estão resumidos na tabela abaixo:

Problemas	Solução Ótima	Tempo CPU[s]	Num. Rest. / Num. Var.	Num. Iteração
G1-1	10	0,02	116/93	276
G1-2	16	0,02	116/93	444
G1-3	9	0,02	116/93	228
G1-4	7	0,01	116/93	48
G1-5	20	0,03	116/93	959
G2-1	16	0,01	352/278	90
G2-2	21	0,02	352/278	114
G2-3	16	0,01	352/278	129
G2-4	17	0,01	352/278	91
G2-5	20	0,01	352/278	114
G3-1	26	0,04	722/563	189
G3-2	26	0,03	722/563	118
G3-3	26	0,01	722/563	65
G3-4	30	0,03	722/563	116
G3-5	30	0,01	722/563	58

Tabela 6: Resultados computacionais

6. Conclusão

O artigo abordou a solução do Problema de Sequenciamento em Projeto com Restrição de Recurso (PSPRR) que considera como variáveis contínuas tanto o tempo de execução das atividades quanto às quantidades de recurso alocadas. Trata-se de uma generalização de problemas estudados pelos autores anteriores.

Aproximações por segmentos de reta foram propostas para representar o tempo de

processamento de cada atividade como função linear da quantidade de recurso alocada. Com auxílio de desigualdades lineares, estas aproximações tornaram possível reformular o problema original como um problema de programação linear inteira mista.

Um exemplo foi resolvido comprovando a eficácia do procedimento, especialmente comparada com um procedimento anterior que utilizava um único segmento secante para a linearização. Além de outros exemplos gerados e implementados computacionalmente.

Os autores do presente artigo esperam, em trabalhos futuros, apresentar o desenvolvimento de um método de resolução robusto o suficiente para resolver problemas de grandes dimensões através de técnicas matemáticas aprimoradas, em particular, o Método de Decomposição de Benders.

Referências

Artigues, C., Michelon, P. e Reusser, S. (2003), European Journal of Operational Research, *Insertion Techniques for Static and Dynamic Resource Constrained Project Scheduling*, 149, 249-267.

Balas, E. (1967), Operational Research, *Project Scheduling with Resource Constraints*, 15, 915-957.

Brucker, P. e Knust, S. (2000), European Journal of Operational Research, *A Linear Programming and Constraint Propagation-Based Lower Bound for the RCPSP*, 127, 355-362.

Brucker, P., Knust, S., Schoo, A. e Thiele, O. (1998), European Journal of Operational Research, *A Branch and Bound Algorithm for the Resource-Constrained Project Scheduling Problem*, 107, 272-288.

Carlier, J. e Néron, E. (2003), European Journal of Operational Research, *On Linear Lower Bounds for the Resource Constrained Project Scheduling Problem*, 149, 314-324.

Christofides, N., Alvarez-Valdes, R. e Tamarit, J. M. (1987), European Journal of Operational Research, *Project Scheduling with Resource Constraints: A Branch and Bound Approach*, 29, 262-273.

Deblaere, F., Demeulemeester, E. L., Herroelen, W. S. e Vonder, S. V. (2007), Decision Science, *Robust Resource Allocation Decisions in Resource Constrained Projects,* 38, 5-37.

Klein, R. e Scholl, A. (1999), European Journal of Operational Research, *Computing Lower Bounds by Destructive Improvement: An Application to Resource-Constrained Project Scheduling*, 112, 322-346.

Konstantinidis, P. D. (1998), European Journal of Operational Research, *A Model to Optimized Project Resource Allocation by Construction of a Balanced Histogram*, 104, 559-571.

Mingozzi, A., Maniezzo, V., Ricciardelli, S. e Bianco, L. (1998), Management Science, *An Exact Algorithm for the Resource-Constrained Project Scheduling Problem Based on a New Mathematical Formulation*, 44, 714-729.

Poder, E., Beldiceanu, N., e Sanlaville, E. (2004), European Journal of Operational Research, *Computing a Lower Approximation of the Compulsory Part of a Task with Varying Duration and Varying Resource Consumption*, 153, 239-254.

Vieira, C. S., Pinto, R. L. U. F. e Carvalho, C. R. V. (2009), The Resoursce Constrained Project Scheduling Problem Formulation Considering Processing Time and Amount of Resource Continuos. *20th International Congress of Mechanical Engineering*.