PROGRAMAÇÃO DINÂMICA ESTOCÁSTICA APLICADA AO PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO DO SISTEMA ELÉTRICO BRASILEIRO ATRAVÉS DO USO DE PROCESSAMENTO PARALELO

Bruno H. Dias
PUC-Rio[1] / UFJF[2]
Rua Marquês de São Vicente, 225 – Gávea, 22451-900, Rio de Janeiro, RJ [1]
Campus da UFJF, Plataforma do Setor de Tecnologia, 36036-330, Juiz de Fora, MG[2]
bdias@ieee.org

André L. M. Marcato
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF
Campus da UFJF, Plataforma do Setor de Tecnologia, 36036-330, Juiz de Fora, MG
andre.marcato@ufjf.edu.br

Reinaldo C. Souza
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio
Rua Marquês de São Vicente, 225 – Gávea, 22451-900, Rio de Janeiro, RJ
reinaldo@ele.puc-rio.br

Murilo P. Soares
Operador Nacional do Sistema Elétrico - ONS
Rua da Quitanda, 196 – Centro, 20091-005 – Rio de Janeiro, RJ
murilopsoares@yahoo.com.br

Ivo C. Silva Jr, Tales P. Ramos, Rafael B. S. Brandi, Edimar J. Oliveira, Marcelo A. Tomim
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF
Campus da UFJF, Plataforma do Setor de Tecnologia, 36036-330, Juiz de Fora, MG
Ivo.junior@ufjf.edu.br, rafael.brandi@engenharia.ufjf.br, tales.pulinho@engenharia.ufjf.br, edimar.oliveira@ufjf.edu.br, matomim@gmail.com

RESUMO

Neste trabalho são utilizadas técnicas de processamento paralelo para estudo de viabilização da técnica de programação dinâmica estocástica utilizando algoritmo de fechos convexos aplicada ao planejamento da operação de médio prazo. As usinas hidrelétricas representadas são agrupadas em reservatórios equivalentes de energia e as funções de custo futuro modeladas por aproximação linear. Para validação da metodologia o estudo proposto é realizado utilizando os dados do sistema elétrico brasileiro.

KEYWORDS. Planejamento de Sistemas Hidrotérmicos. Programação Dinâmica Estocástica. Programação Paralela. Pesquisa Operacional em Energia Elétrica.

ABSTRACT

This paper uses parallel processing techniques to study the viability of the stochastic dynamic programming using convex hull algorithm applied to long term electrical system operation planning. The hydroelectric plants are grouped into energy equivalent reservoirs and the expected cost functions are modeled by a piecewise linear approximation. To validate the methodology the proposed study uses data from the brazilian electrical power system.

KEYWORDS. Hydrothermal System Planning. Stochastic Dynamic Programming. Parallel Programming. Operations research applied to Electrical Energy.

1. Introdução

O planejamento da operação de sistemas elétricos tem por objetivo a determinação do montante de produção de energia por cada unidade geradora que minimize o valor esperado do custo total de operação do sistema no horizonte considerado, mantendo um nível pré-determinado de confiabilidade (Fortunato, 1990).

Na operação de sistemas hidrotérmicos, como o Sistema Elétrico Brasileiro (SEB), o objetivo é usar, sempre que possível, a geração de origem hidrelétrica, usando as demais fontes como geração complementar a fim de agregar maior confiabilidade ao sistema.

O planejamento da operação do SEB é dividido de acordo com o horizonte de estudo que vai do despacho hidrotérmico até o planejamento de médio prazo. No despacho hidrotérmico o sistema é representado de forma detalhada, já que as restrições de operação dos reservatórios são conhecidas e as incertezas com relação às afluências são muito baixas. À medida que o horizonte se distancia do despacho horário, a incerteza com relação às afluências aumenta, tornando o problema mais complexo do ponto de vista estatístico. Por outro lado, as restrições horárias perdem importância em horizontes maiores, e a representação física do sistema pode ser simplificada (Maceira, 2002; Silva, 2001).

O presente trabalho apresenta como foco o planejamento de médio prazo, cujo horizonte varia de um a cinco anos, com elevadas incertezas, tais como, variação da carga e afluências aos reservatórios ao longo do horizonte. Por outro lado, possibilita uma modelagem do sistema com menor nível de detalhamento.

Desta forma, o planejamento da operação de médio prazo tem como características:

- Estocasticidade: relacionada com a incerteza em relação às afluências futuras, que se tornam mais significativas quanto maior for o horizonte do planejamento;

- Acoplamento espacial: a construção de usinas em cascata, ou seja, no leito de um mesmo rio, visando um maior aproveitamento da energia, faz com que a operação de uma usina a montante interfira na operação das usinas a jusante (Grygier, 1985; Ni, 1999; Terry, 1986);

- Acoplamento temporal: a decisão da utilização dos recursos hídricos em um mês pode ocasionar efeitos indesejados nos meses subseqüentes, tais como o não suprimento da carga (déficit) ou mesmo o vertimento de água dos reservatórios, que representa um desperdício de energia (Silva, 2001).

O planejamento de médio prazo do SEB era realizado, na década de oitenta, utilizando a Programação Dinâmica Estocástica – PDE (Terry, 1986). Porém, a ampliação do sistema de transmissão e conseqüente possibilidade de intercâmbio entre os subsistemas energéticos resultou em um aumento no número de combinações de estados operativos, tornando a metodologia inviável computacionalmente (Kligerman, 1992).

Para contornar o problema, foi então proposta a metodologia da Programação Dinâmica Dual Estocástica – PDDE (Pereira, 1989; Pereira, 1985). Esta metodologia utiliza a técnica de Decomposição de Benders (Benders, 1962), que possibilita que as afluências sejam tratadas a partir de modelos de séries temporais, tais como o modelo auto-regressivo periódico (Maceira, 2004; Hipel, 1994; Mondal, 2006). Adicionalmente, as usinas do Sistema Interligado Nacional (SIN) são agregadas em quatro reservatórios equivalentes de energia a fim de reduzir o número de combinações de estados, reduzindo assim a dimensão do problema (Arvanitidis, 1970; Zambelli, 2006).

Esta modelagem é utilizada até hoje, e está implementada nos modelos DECOMP e NEWAVE (Maceira, 2002), desenvolvidos pelo CEPEL, os quais são os modelos oficiais do setor elétrico brasileiro para o planejamento da operação de curto e médio prazo respectivamente.

Com a evolução tecnológica dos hardwares e softwares dos sistemas computacionais, observada ao longo dos últimos anos, propostas de voltar-se a utilizar a técnica de Programação Dinâmica Estocástica (PDE) têm sido consideradas, a exemplo de Cervellera (2006), que apresenta um modelo de discretização eficiente, bem como a utilização de Redes Neurais Artificiais na resolução do problema.

Silva e Finardi (2003) utilizam técnicas de processamento paralelo para a solução do problema de planejamento hidrotérmico, porém através de Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE). Outros exemplos de aplicação de processamento paralelo utilizado no planejamento da expansão e operação de sistemas hidrotérmicos, baseados na mesma metodologia podem ser vistos em Pinto (2006) e Pinto (2007).

O presente trabalho consiste em, inicialmente, modelar as Funções de Custo Futuro (FCF´s) dos estágios do problema de planejamento energético de médio prazo utilizando aproximação linear por partes. Neste caso propõe-se a utilização do algoritmo de fechos convexos e programação dinâmica estocástica (Dias et al, 2010). Para reduzir o tempo computacional devido ao elevado número de combinações do espaço de estados, o presente trabalho analisa a utilização de múltiplos processadores na solução do problema do planejamento energético do Sistema Elétrico Brasileiro.

2. Programação Dinâmica Estocásctica

A Programação Dinâmica (PD) consiste em um processo seqüencial de tomada de decisões, onde uma decisão ótima global pode ser obtida através da otimização de subproblemas (ou ótimos locais) individuais (Bellman, 1957). No problema do planejamento energético tem-se a subdivisão do problema em estágios, sendo que a decisão ótima atual está ligada a um conjunto de acontecimentos futuros. O problema é resolvido em sentido contrário, ou seja, tomando como início o último estágio de decisão e realizando a recursão no tempo, onde em cada estágio são consideradas as decisões do estágio em análise e as conseqüências futuras (Silva, 2001).

O planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos é, por natureza, um problema estocástico, uma vez que as afluências futuras são incertas. Considerando o vetor de estados X_t, contendo os dados de volume inicial referentes a cada usina hidrelétrica no estágio t em estudo, a Programação Dinâmica Estocástica (PDE) pode ser descrita tendo como base a seguinte equação recursiva (Silva, 2001):

$$\alpha_t\left(X_t\right) = \underset{y_t \mid X_t}{E}\left(\underset{U_t}{Min}\ C_t\left(U_t\right) + \frac{1}{\beta}\alpha_{t+1}\left(X_{t+1}\right)\right) \qquad (1)$$

Sujeito a:

$$gt_t + gh_t + def_t = D_t \qquad (2)$$

$$x_{t+1} = x_t + y_t - u_t - s_t \qquad (3)$$

$$\underline{x}_{t+1} \le x_{t+1} \le \overline{x}_{t+1} \qquad (4)$$

$$u_t \le \overline{u}_t \qquad (5)$$

$$gh_t = \rho . u_t \qquad (6)$$

Onde:

T	Número de estágios do problema;
$\alpha_t(X_t)$	custo total esperado de operação do estado X_t;
α_{t+1}	custo futuro ($);
$E_{yt\|Xt}$	valor esperado do custo total de operação considerando as possíveis afluências no estágio t, e condicionadas ao estado X_t;

X_t	vetor de estados no estágio t;
U_t	vetor de decisões no estágio t;
$C_t(Ut)$	custo operativo associado a decisão U_t;
B	taxa de desconto;
gt_t	geração térmica ($\overline{MW}$);
gh_t	geração hídrica ($\overline{MW}$);
Def_t	déficit ($\overline{MW}$);
D_t	demanda total ($\overline{MW}$);
x_t	volume inicial do reservatório no estágio t (hm^3);
x_{t+1}	volume no final do estágio t (hm^3);
y_t	afluência ao reservatório durante o estágio t (hm^3/mês);
u_t	vazão turbinada no estágio t (hm^3/mês);
$\overline{u_t}$	vazão turbinada máxima (hm^3/mês);
ρ	Produtibilidade da usina hidrelétrica ($\overline{MW}$ /hm^3);
s_t	vazão vertida no estágio t (hm^3/mês);
$\overline{x_{t+1}}$	volume máximo do reservatório (hm^3);
$\underline{x_{t+1}}$	volume mínimo do reservatório (hm^3).

Na equação (1), $C_t(U_t)$ representa o custo imediato vinculado à decisão U_t, uma vez que o estado X_{t+1} é a conseqüência da decisão operativa U_t. Considera-se que U_t é dado pelos vetores correspondentes aos volumes armazenados no final do estágio, volumes turbinados e vertidos das usinas hidrelétricas, montante gerado nas usinas térmicas e déficit de energia. A função de custo de operação pode ser definida como a associação do custo em um determinado estado X_t ao custo futuro associado ao estado X_{t+1}.

As equações (2) a (5) representam as restrições do problema, sendo a equação (2) representa a restrição de atendimento à demanda, onde o montante de geração hídrica e térmica deve suprir a demanda solicitada pelo sistema. Estes valores estão representados em MW-médios ($\overline{MW}$).

Na equação (3) tem-se a restrição de balanço hídrico, onde o volume armazenado no final de um estágio, x_{t+1}, é igual ao volume armazenado no início deste estágio, x_t, somado à afluência ao sistema durante o estágio, y_t, subtraído do montante de água utilizado na geração u_t, e do total vertido s_t.

As equações (4) e (5) representam, respectivamente, os limites máximos e mínimos dos reservatórios e os volumes máximos turbináveis. A equação (6) representa a geração hidráulica em função da produtibilidade equivalente da usina e do volume turbinado.

Esse problema pode ser resolvido naturalmente por PD discretizando as variáveis de estado e enumerando todas as combinações destas variáveis. A desvantagem consiste no elevado número de combinações reforçando a necessidade de novos procedimentos.

3. Fechos Convexos

Os algoritmos da classe "Convex Hull" (CH) apresentam, a partir de um conjunto de pontos fornecidos, o menor polígono convexo que contém os pontos dados (Cormen, 2001), conhecido como fecho convexo.

Um conjunto C é considerado convexo se para quaisquer pontos $x, y \in C$, qualquer combinação convexa de x e y também pertença a C, ou seja,

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in C \mid x, y \in C \; e \; \lambda \in [0,1] \qquad (7)$$

Existem diversos algoritmos para a obtenção dos CH's, dentre eles, o algoritmo de Graham, o algoritmo de Jarvis e o algoritmo "QuickHull", sendo este último utilizado no desenvolvimento do presente trabalho (Qhull, 2009; Barber, 1996).

No presente trabalho, dados os pontos correspondentes à solução ótima de cada um dos estados dos problemas de coordenação hidrotérmica, o algoritmo indica o conjunto de hiperplanos que correspondem a um fecho convexo, que são utilizados como uma aproximação linear das funções de custo futuro para cada estágio do problema.

Os passos do algoritmo de solução são mostrados na Figura 1.

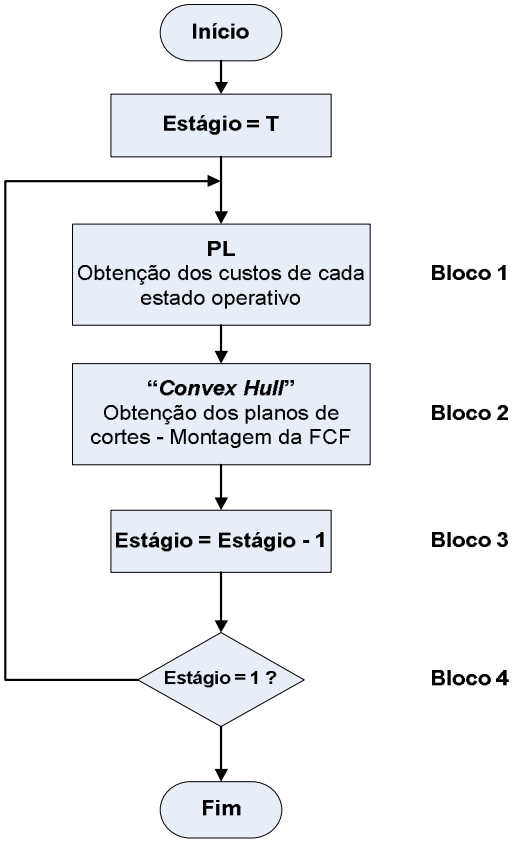

Figura 1: Algoritmo da obtenção das funções de custo futuro utilizando fechos convexos

Observa-se que, seguindo a técnica de programação dinâmica, inicia-se pelo último estágio (t = T). No Bloco 1 são obtidos os custos operacionais médios para cada estado operativo, através da solução de problemas de programação linear. O conjunto de pontos que relacionam o armazenamento do reservatório com o custo de operação obtido anteriormente é fornecido ao algoritmo QuickHull, obtendo o conjunto reduzido de planos que compõem o fecho convexo. Estes planos são utilizados para a modelagem da Função de Custo Futuro (FCF). Este procedimento é mostrado no Bloco 2. No Bloco 3 há um decremento no número do estágio. As FCF's obtidas entram como restrição na análise do próximo estágio, sendo este procedimento repetido até que se atinja o primeiro estágio. O critério de parada está representado através do Bloco 4.

4. Processamento Paralelo

A crescente demanda de aplicações que necessitam um elevado esforço computacional, o que em geral leva a um tempo de execução que torna inviável a sua execução, incentivou o desenvolvimento de técnicas e softwares que permitem a distribuição de processos ou computação paralela de partes do código.

Uma característica importante da Programação Dinâmica Estocástica está no fato do cálculo do custo ótimo de cada estado operativo de um estágio poder ser realizado de forma independente dos outros estados do mesmo estágio, o que possibilita a paralelização destes processos.

Desta forma, o algoritmo apresentado na Figura 1 pode ser reformulado utilizando processamento paralelo. Esta abordagem é mostrada na Figura 2, onde se observa que o Bloco 1 passa a utilizar múltiplos processadores. Foi utilizada a estrutura SPMD (do inglês "Single Program Muliple Data"), onde os processadores executam o mesmo código, variando apenas os dados de entrada (Wilkinson, 2005).

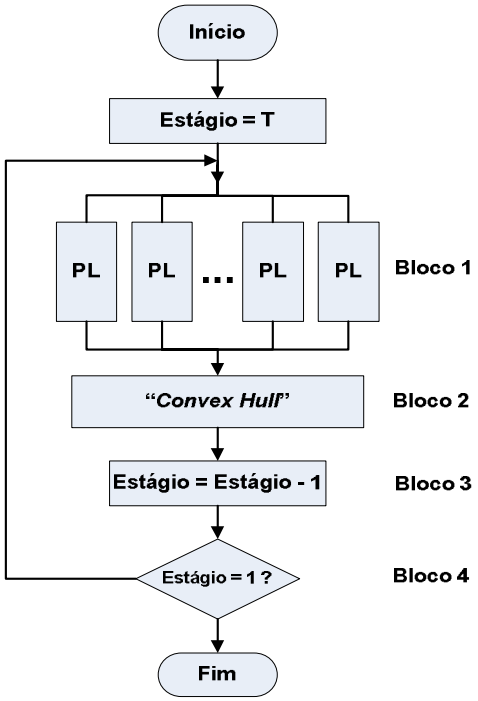

Figura 2: Algoritmo da obtenção das funções de custo futuro utilizando fechos convexos e processamento paralelo

Ao se paralelizar um processo, é importante verificar o ganho de desempenho obtido em relação ao mesmo processo executado de forma seqüencial. Na avaliação do desempenho de códigos paralelizados, algumas métricas de desempenho podem ser utilizadas, tais como o fator de aceleração e eficiência.

O Fator de Aceleração (ou speedup, do inglês), representa a razão entre o tempo gasto na solução de um problema utilizando um único processador, T_s, e o tempo gasto por um programa que utiliza p processadores, de forma paralela, T_p.

$$S = \frac{T_s}{T_p} \tag{7}$$

A Eficiência, por sua vez, mede a fração de tempo no qual cada unidade de processamento é efetivamente utilizada (Grama et al, 2003). A sua representação matemática é dada pela razão entre o fator de aceleração e o número de processadores utilizados, conforme equação abaixo

$$E = \frac{S}{p} = \frac{T_s}{p \cdot T_p} \tag{8}$$

5. Aplicação ao SEB

A metodologia proposta, validada anteriormente para 2 usinas em cascata (Dias et al,

2010), é simulada utilizando o processamento paralelo e aplicada ao sistema elétrico brasileiro. Inicialmente é realizado o planejamento apenas para dois subsistemas: Sul e Sudeste/Centro-Oeste. A seguir, apresenta-se o estudo de caso para o sistema completo, utilizando os quatro subsistemas: Sul, Sudeste/Centro-Oeste, Norte e Nordeste. O sistema computacional utilizado foi desenvolvido em C++.

5.1 – Estudo de caso 1: dois subsistemas

Para avaliação do modelo proposto, utilizou-se o PMO de Janeiro de 2009 modificado, contendo os dados dos sistemas Sudeste/Centro-Oeste e Sul.

Simulou-se o problema com 11 discretizações de armazenamento para os sistemas equivalentes e 72 cenários de afluência da série histórica, com 60 estágios (5 anos) de estudo para a análise. A série histórica corresponde ao registro temporal das afluências aos reservatórios das usinas, que atualmente compreende 76 anos em discretizações mensais. Como o período de estudo considerado é de 5 anos, pode-se obter 72 cenários distintos de 5 anos percorrendo-se o registro do início ao fim.

Neste trabalho não foi considerado período de pós-estudo nesta análise. O pós-estudo consiste em aumentar o horizonte na fase de modelagem dos planos de corte (fase *'backward'*), para evitar que os reservatórios sejam completamente deplecionados no final do horizonte de estudo (nos estudos do SEB são geralmente considerados 5 anos para o pós-estudo). A escolha dos parâmetros foi feita com base em estudos prévios, conforme mostrado em Dias (2010).

Na Figura 3 pode-se observar o conjunto de planos que modelam a função de custo futuro, obtidos na PDE, no último estágio do problema (estágio 60). Adicionalmente, na Figura 4 e na Figura 5 são mostradas as FCF's aproximadas para os estágios 59 e 2, respectivamente.

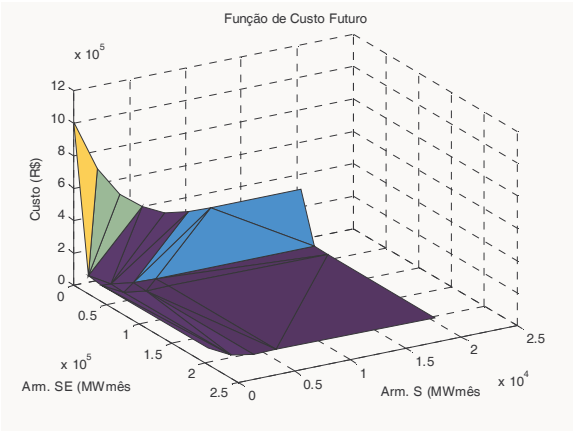

Figura 3: Função de custo futuro obtida no último estágio

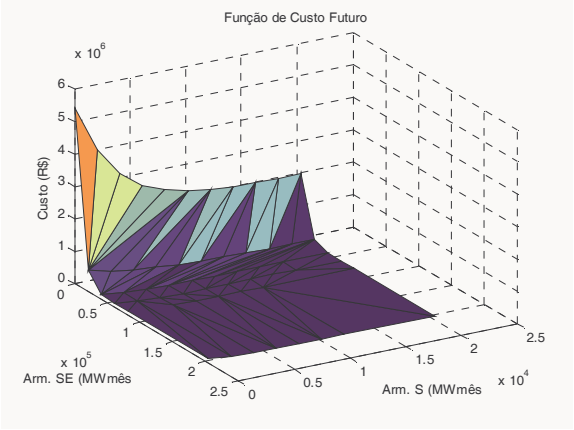

Figura 4: Função de custo futuro obtida no estágio 59

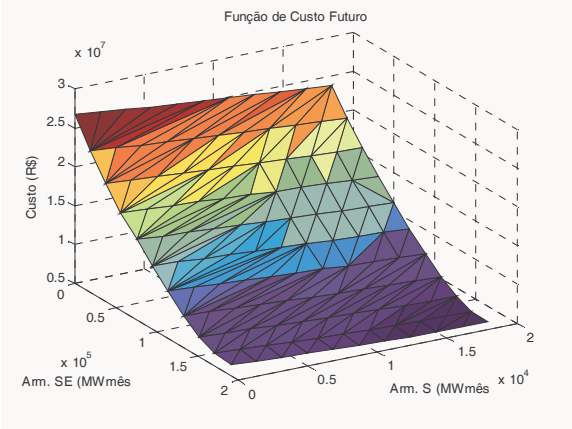

Figura 5: Função de custo futuro obtida no estágio 2

O custo operativo total é calculado por meio de uma simulação da operação realizada do primeiro ao último estágio (fase 'forward') que, neste exemplo, considerou um cenário médio de afluências.

O computador utilizado foi um Intel Core 2 Quad de 2.66 GHz, com 4 Gb de memória RAM. Inicialmente a simulação foi realizada em um único processador. O tempo computacional foi de aproximadamente 210 segundos. Observa-se o número total de Problemas Lineares (PL's) a ser resolvido para esta modelagem, equivale a:

$$C \cdot E \cdot \left(D^N\right) \qquad (10)$$

Onde:

D	número de discretizações;
N	número de reservatórios;
E	número de estágios;
C	número de cenários;

Desta forma, o número total de PL's é de

$$72 \cdot 60 \cdot \left(11^2\right) = 522.720$$

Na Figura 6 observa-se o montante de geração hídrica e térmica em relação ao mercado total de energia para os 5 anos de estudo (2009 a 2013).

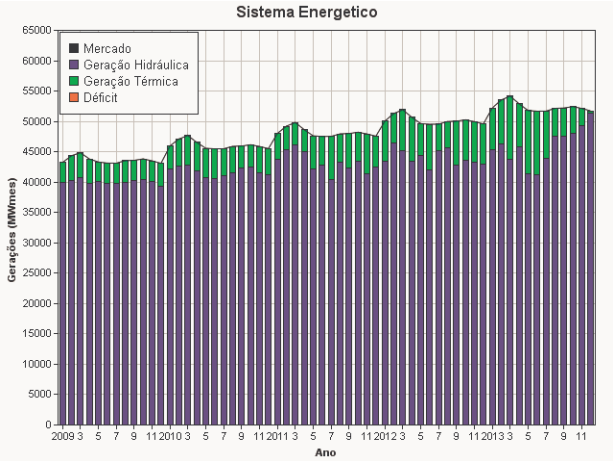

Figura 6: Geração hidráulica e térmica do caso em estudo

Observa-se ainda, na Figura 7, o armazenamento dos reservatórios equivalentes ao longo do horizonte de estudo considerado. Uma análise destes gráficos mostra que ao final do horizonte os reservatórios do Sudeste encontram-se totalmente deplecionados, o que é esperado, já que com o fim do horizonte o custo futuro associado a qualquer nível de armazenamento é nulo. Assim, qualquer água armazenada no reservatório ao final do horizonte implica em desperdício de recursos. No Sul, apesar de haver um esvaziamento dos reservatórios nos dois últimos anos, observa-se ainda água armazenada. Isto ocorre devido ao seu comportamento muito irregular, devido a séries com altas afluências nos últimos meses, o que impossibilitou o uso de toda a água para geração de energia, mesmo havendo uma tendência de usar toda a água nos últimos estágios.

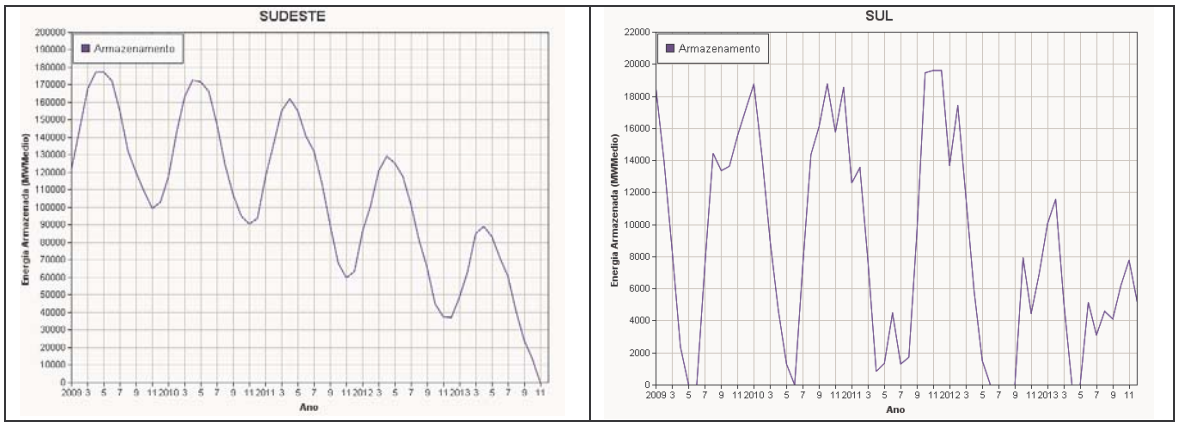

Figura 7: Gráfico de armazenamento dos Subsistemas.

b) Simulação utilizando processamento paralelo

Simulou-se ainda o mesmo sistema, utilizando, porém diferente número de processadores a cada simulação. Tendo em vista a disponibilidade de um micro Quad Core, contabilizou-se, além do tempo seqüencial, o tempo gasto com 2, 3 e 4 processadores. O tempo computacional total do programa em função do número de processadores utilizados é mostrado na Tabela 1.

Tabela 1: Tempo gasto com número de processadores.

Número de processadores	***Tempo total (s)***
1	210,2
2	111,6
3	77,3
4	62,8

A partir dos tempos totais obtidos e dos tempos das partes paralelizada e seqüencial do código em análise, pode-se calcular o fator de aceleração e eficiência, mostrados nas Figuras 8 e 9.

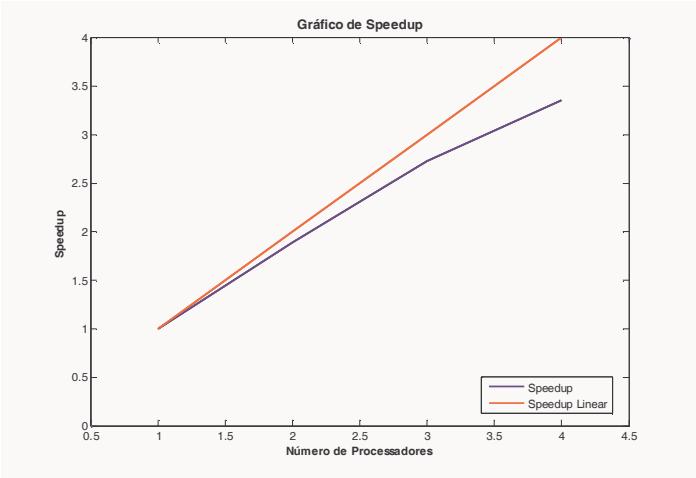

Figura 8: Fator de aceleração do algoritmo paralelo.

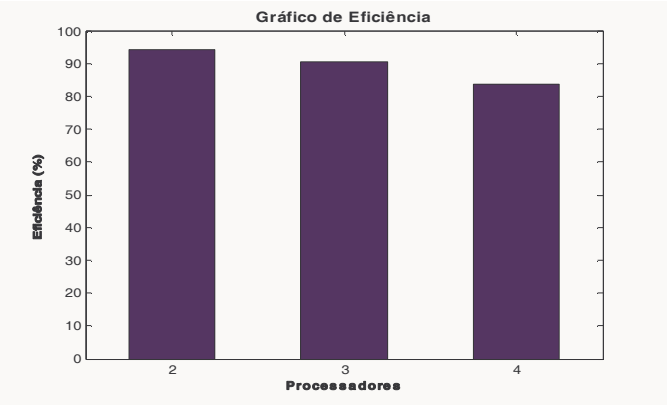

Figura 9: Eficiência do algoritmo paralelo.

Observa-se que o algoritmo paralelo apresenta uma eficiência superior a 80% para quatro processadores, além de um fator de aceleração significativo, sendo necessário, porém, o mesmo estudo com um número maior de processadores.

5.2 – Estudo de caso 2: Sistema Elétrico Brasileiro – 4 subsistemas

A simulação anterior foi ampliada para o SEB completo, utilizando para isto 4 reservatórios equivalentes de energia, representando os subsistemas sul, Sudeste/Centro-oeste, Norte e Nordeste. Simulou-se para apenas três cenários de afluência, utilizando séries de baixa, média e alta afluências, quando considerada a média de afluência anual.

O tempo computacional total, utilizando 4 processadores foi de aproximadamente 30 horas. Para a simulação final foi escolhido o pior cenário. O gráfico de geração total hídrica e térmica é observado na Figura 10.

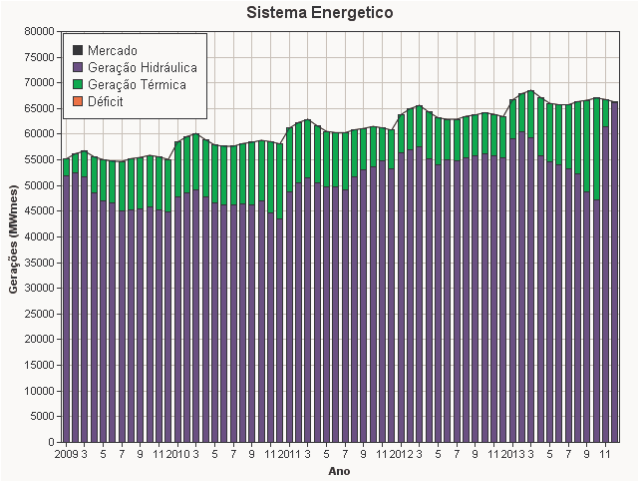

Figura 10: Geração hidráulica e térmica do SEB.

Ressalta-se que o problema completo ainda demanda um alto tempo computacional, motivo da utilização de apenas três cenários de afluências.

6. Conclusão e Trabalhos Futuros

Neste trabalho foram realizados testes de utilização da PDE com modelagem das funções de custo futuro utilizando algoritmo de fechos convexos para o Sistema Elétrico Brasileiro completo.

O sistema computacional desenvolvido apresentou resultado relevante quando utilizado para resolução do problema de planejamento energético considerando dois subsistemas.

Considerando quatro subsistemas, o tempo computacional ainda se apresenta muito elevado. Para viabilizar a utilização da metodologia proposta para o SEB representado por quatro subsistemas em um tempo satisfatório, utilizando os 72 cenários da série histórica de afluências. O presente trabalho deve ser estendido para um número maior de processadores. Para tanto, pode-se utilizar um cluster com maior número de processadores. Adicionalmente deve ser analisada a possibilidade de paralelização de outros trechos do código, tal como o algoritmo de fechos convexos.

Adicionalmente, para redução do esforço computacional propõe-se a utilização de técnicas de amostragem eficiente do espaço de estados, excluindo os estados operativos que não são atingidos em estágios específicos.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq - Brasil.

Referências

Arvanitidis, N. V & Rosing, J., (1970), *"Composite representation of a multireservoir hydroelectric power system"*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems PAS-89, pages 319-326.

Barber, C. B.; Dobkin, D. P.; Huhdanpaa, H., (1996) *"The Quickhull Algorithm for Convex Hulls"*. ACM Trans. Math. Software, 22, 4.

Bellman, R., (1957). *Dynamic Programming*, Princeton – Princeton University Press.

Benders, J. F., (1962) *"Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems"*. Numerisch Mathematik, 4.

Cervellera, C.; Chen, V. C. P. ; Wen, A., (2006). *"Optimization of a large-scale water reservoir network by stochastic dynamic programming with efficient state space discretization"*. European Journal of Operational Research. Vol. 171, pages 1139-1151.

Cormen, T. H., (2001). *Introduction to Algorithms.* 2nd Edition, Cambridge, The MIT Press.

Dias, B. H.; Marcato, A. L. M.; Souza, R. C., Soares, M. P.; Silva Jr, I. C.; Oliveira, E. J.; Brandi, R. B. S.; and Ramos, T. P.; (2010), *"Stochastic Dynamic Programming Applied to Hydrothermal Power Systems Operation Planning Based on the Convex Hull Algorithm"*, Mathematical Problems in Engineering vol.2010.

Fortunato, L. A. M., Neto, A. and Alencar, T. (1990). *Introdução ao Planejamento da Expansão e Operação de Sistemas de Produção de Energia Elétrica*, Niterói – EDUFF.

Grama, A., Gupta, A., Kumar, V. e Karypis, G. (2003). *Introduction to Parallel Computing.* Addisson Wesley, 2 edition.

Grygier, J. C., Stendinger, J. R.; (1985) *"Algorithms for Optimizing Hydropower System Operation "*. Water Resource Research, Vol 21, No. 1, pages 1-10.

Hipel, K. W., McLeod, A. I., (1994) *Time Series Modeling of Water Resources and Environmental Systems*. Amsterdan, The Netherlands: Elsevier.

Kligerman, A. S., (1992) *Operação Ótima de Subsistemas Hidrotérmicos Interligados Utilizando Programação Dinâmica Estocástica Dual*. Dissertação de Mestrado, Unicamp.

Maceira, M., Terry, L., Costa, F., Damázio, J., Melo, A., (2002) *"Chain of optimization models for setting the energy dispatch and spot price in the brazilian system"*. XIV Power Systems Computation Conference, June, Spain.

Maceira, M. E. P., Damázio, J. M., (2004) *"The use of PAR(p) model in the stochastic dual dynamic programming optimization scheme used in the operation planning of the Brazilian hydropower system"*. International Conference os Probabilistic Methods Applied to Power Systems, September, Iowa.

Mondal, M. S., Wasimi, S. A., (2006) *"Generating and forecasting monthly flows of the ganges river with par model"*. Journal of Hydrology.

Ni, E.; Guan, X.; Li, R., (1999). *"Scheduling Hydrothermal Power System with Cascaded and Head-Dependent Reservoir"*. IEEE Trans. Power Systems. Vol 14, No. 3, pages 1127 - 1132.

Pereira, M. V. F., (1989) *"Optimal stochastic operation of large hidro-electric systems"*. Electrical Power and Energy Systems, vol.11.

Pereira, M. V. F., Pinto, L. M. V. G. (1985) *"Stochastic Optimization of a multireservoir hydroelectric"*. Electrical Power and Energy Systems, vol. 11.

Pinto, R. J.; Duarte, V. S.; Maceira, M. E. P.; *"Metodologia para Aplicação de Processamento Distribuído no Planejamento da Expansão e Operação"*; X SEPOPE, Florianópolis, SC, Brasil, Maio, 2006.

Pinto, R. J.; Duarte, V. S.; Maceira, M. E. P.; Borges, C. L. T.; Falcão, D. M.; Aveleda, A. A.; Hinrichsen, A. C. P. A.; *"Metodologia para Aplicação de Processamento Distribuído no Planejamento da Expansão e Operação"*; XXXIX SBPO, pp. 548-558, Fortaleza, CE, Brasil, Agosto, 2007.

Qhull, biblioteca em C++, disponível em http://www.qhull.com. Acesso em 10 de jan. 2009.

Silva, E. L.; (2001) *Formação de Preço em Mercados de Energia Elétrica,* Editora Sagra Luzzatto.

Silva, E. L. e Finardi, E. C., (2003) *"Parallel Processing Applied to the Planning of Hydrothermal Systems"*. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, vol. 14, no. 8.

Terry, L. A.; Pereira, M. V. F.; Neto, T. A. A.; Silva, L. F. C. e Sales, P. R. H.; (1986) "Brazilian national hydrothermal electrical generating system", *Interfaces*, 1986.

Wilkinson, B., Allen, M. (2005). *Parallel Programming: techniques and applications using networked workstations and parallel computers.* Pearson Prentice Hall, 2nd edition.

Zambelli, M.; Siqueira, T. G.; Cicogna, M.; e Soares, S., (2006) *"Deterministic versus stochastic models for long term hydrothermal scheduling"*. IEEE Power Engineering Society General Meeting.