# Modelos de otimização para o Problema de Roteamento de Veículos com *Cross-Docking*

**Fernando Afonso Santos**[1,2]
**Alexandre Salles da Cunha**[2]

[1]Universidade Federal de Itajubá
Rua São Paulo, 377 - Bairro Amazonas - Itabira - MG, CEP 35900-373
fernandosantos@unifei.edu.br

[2]Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos, 6627 - Pampulha - Belo Horizonte - MG CEP 31270-901
acunha@dcc.ufmg.br

**RESUMO**

O problema de roteamento de veículos está entre os mais estudados na área de Pesquisa Operacional. Diferentes variações deste problema foram estudadas, dada a sua grande importância econômica. Este artigo apresenta uma variação recente para o problema de roteamento de veículos, denominada problema de roteamento de veículos com *Cross-Docking*. São propostos dois modelos de programação linear obtidos ao formular o problema utilizando fluxos em rede. Entre os resultados obtidos observa-se que os modelos propostos permitem solucionar na otimalidade o problema para instâncias de pequeno porte, até 30 vértices, além de obter soluções viáveis e calcular valores de relaxação linear para instâncias maiores.

**PALAVRAS CHAVE. Problema de Roteamento de Veículos, Otimização em Redes, *Cross-Docking***

**ABSTRACT**

The vehicle routing problem is among the most studied problems in Operational Research. Different variations of this problem were studied due to its large economic importance. This paper presents a work to deal with a recent variation of the vehicle routing problem, named vehicle routing problem with Cross-Docking. Two linear programming models are proposed to solve this problem using network flow. Considering the results is observed that the proposed models allow optimality in solving the problem for small size instances, up to 30 nodes, and also to obtain feasible solutions and to calculate linear relaxation values for larger instances.

**KEYWORDS. Vehicle Routing Problem, Network Optimization, Cross-Docking**

## 1. Introdução

O Problema de Roteamento de Veículos (PRV) foi inicialmente proposto por Dantzig e Ramser (1959) e devido à sua grande importância econômica é um dos problemas mais estudados da área de Pesquisa Operacional. A solução deste problema envolve uma elevada complexidade computacional, uma vez que o PRV está na classe dos problemas NP-Completos.

O PRV consiste em atribuir rotas a uma frota de veículos para que estes atendam a demanda de um determinado grupo de consumidores. Diversas variações deste problema surgiram ao longo do tempo para contemplar diferentes cenários de roteamento, assim, é possível encontrar na literatura os PRV capacitado e não-capacitado, com e sem janelas de tempo, problemas de coleta e entrega simultâneas, entre outros. Além destes, existem também versões que consideram características dinâmicas e estocásticas do problema, o aproximando dos cenários reais de roteamento.

Alguns números permitem mensurar a importância econômica deste problema. Segundo King e Mast (1997) os custos de distribuição de mercadorias nos Estados Unidos pode chegar a 30% do valor de um produto. Avaliando o PRV em um contexto regional, pesquisas indicam que serviços com transporte representam 2,53% do Produto Interno Bruto (PIB) do Brasil Fraga (2007). Isto mostra que a qualidade das soluções deste problema está diretamente relacionada a uma grande economia financeira.

Por este motivo, estudos em diferentes áreas além do PRV procuram por alternativas para aumentar a eficiência em sistemas de distribuição das mercadorias. Uma estratégia que obteve destaque na última década foi a utilização de armazéns de *Cross-Docking* nos sistemas de distribuição.

*Cross-Docking* é um conceito de gestão de distribuição de mercadorias no qual os itens são levados dos fornecedores até armazéns onde são imediatamente organizados e despachados de acordo com as demandas dos consumidores, sem a necessidade de realizar o inventário de tais itens no centro de distribuição. Caso haja a necessidade de permanência de itens nos armazéns, isto ocorre apenas por um curto período, normalmente menor do que 24 horas Yu e Egbelu (2008).

No *Cross-Docking* é possível que as mercadorias coletadas passem por um processo denominado consolidação, que consiste em prepará-las e despachá-las aos consumidores conforme suas necessidades. Assim, ao utilizar esta estratégia é possível minimizar custos com estoques e tornar o processo de distribuição das mercadorias centralizado e mais organizado. A figura 1 é adaptada de de Oliveira e Pizzolato (2002) e ilustra um esquema básico de funcionamento de um *Cross-Docking*.

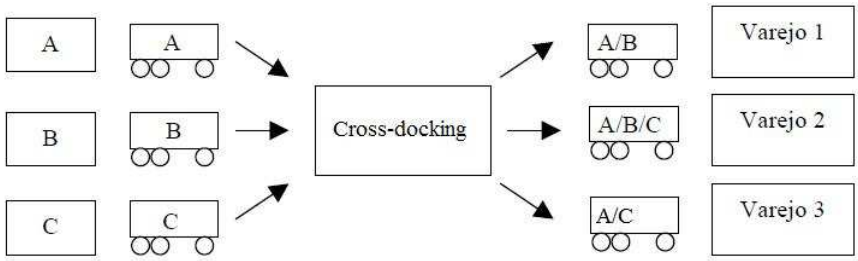



Figura 1: Esquema básico de funcionamento de um *Cross-Docking*

O grande benefício apresentado ao utilizar a estratégia de *Cross-Docking* na distribuição de mercadorias é a dinamicidade com a qual elas passam pelos centros de distribuição.

Assim, é possível usufruir de toda a estrutura disponível nestas unidades, sem a necessidade de custos de estocagem, que são um dos grandes responsáveis pelo aumento nos custos de distribuição de mercadorias.

Já a maior dificuldade apresentada para adotar a estratégia de *Cross-Docking* é que existe a necessidade de uma maior organização e sincronização da cadeia de suprimentos (*Supply Chain Management*), uma vez que a indisponibilidade ou o excesso de um determinado produto pode trazer problemas ainda maiores aos envolvidos, sejam fornecedores, consumidores ou o próprio armazém de *Cross-Docking*.

Um fator relevante a ser considerado é o custo envolvido com a utilização do *Cross-Docking*. Há custos relacionados à implantação de um novo armazém, à sua manutenção, além de outros necessários para realizar a troca de mercadorias entre os veículos. Todos estes custos devem ser considerados antes da implantação de um armazém de *Cross-Docking* no sistema de distribuição.

A importância da utilização de armazéns de *Cross-Docking* na distribuição de mercadorias pode ser comprovada através de trabalhos na literatura que utilizaram esta estratégia. Companhias de mercado global tais como tais como Wal Mart Gue (2001), UPS Forger (1995) e Toyota Witt (1998) são apenas algumas entre as que publicaram implementações de sucesso de *Cross-Docking* em seus sistemas de distribuição Yu e Egbelu (2008).

O PRV com *Cross-Docking* surge da integração do PRV com a necessidade de realizar o *scheduling* das mercadorias no *Cross-Docking*. Neste problema, os vértices são divididos em dois conjuntos distintos: fornecedores e consumidores. Os fornecedores são aqueles que ofertam mercadorias que são demandadas pelos consumidores. Os veículos devem primeiro coletar as mercadorias nos fornecedores para depois entregá-las aos consumidores. Por este ser um problema recente na literatura, poucas são as contribuições existentes e este trabalho busca contribuir nesta area apresentando dois modelos matemáticos que permitam sua solução.

## 2. Trabalhos Relacionados

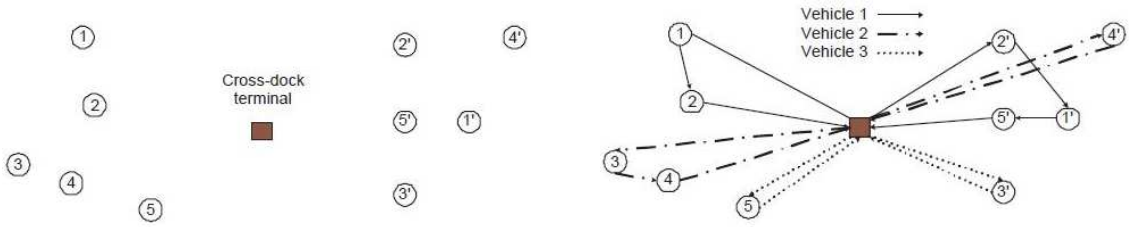
Muito tem se estudado nos últimos anos sobre a estratégia de *Cross-Docking*, dada a sua importância para a distribuição de mercadorias e a sua grande difusão entre empresas de grande e médio porte. Há uma grande diversidade entre os trabalhos e prova disto são os meios de publicação utilizados para a divulgação dos resultados. Os trabalhos são apresentados na área de logística, gestão de materiais, transportes, *scheduling*, entre outras. Esta grande diversidade é justificada pela complexidade envolvida na implementação de um sistema de *Cross-Docking*. São necessários estudos que vão desde o planejamento até sua operação.

Quanto ao planejamento é necessário definir o formato e o posicionamento do *Cross-Docking* em uma determinada área geográfica, para que sua localização privilegie tanto a entrega das mercadorias pelos fornecedores, quanto seu recebimento pelos consumidores. Neste contexto se destacam os trabalhos de Apte e Viswanathan (2000) e Bartholdi e Gue (2004).

Quanto à operação, a gestão da cadeia de suprimentos (*Supply Chain Management*) envolvendo fornecedores, consumidores e o *Cross-Docking* é um dos temas mais estudados. Um outro problema comum na operação dos armazéns de *Cross-Docking* é o *scheduling*, que consiste em definir arranjos para as mercadorias nas docas (*docks*) de modo que sua distribuição possa ser otimizada. Em Yu e Egbelu (2008) é proposta uma solução para este problema, no entanto, este trabalho foca apenas as atribuições no armazém, não fazendo referência ao transporte das mercadorias fora do *Cross-Docking*.

Para melhorar a eficiência na distribuição de mercadorias, uma alternativa ainda pouco explorada na literatura mas que tem muito a contribuir é a integração entre o roteamento de veículos e o *scheduling* das mercadorias envolvida no *Cross-Docking*. Conforme mencionado anteriormente, existe uma diversidade de trabalhos que abordam apenas o PRV, e também existem na literatura aqueles que tratam apenas do *scheduling* no *Cross-Docking*, no entanto, a integração de ambas estratégias na otimização da distribuição de mercadorias ainda é um tema com poucas pesquisas envolvidas.

Ao estudar este problema de maneira integrada, o PRV deverá ser solucionado para definir as rotas dos veículos aos fornecedores e consumidores a fim de coletar e distribuir as mercadorias, mas o processo de consolidação existente no *Cross-Docking* será também considerado, aumentando a complexidade desta abordagem. As figuras 2 e 3 a seguir foram retiradas de Wen et al. (2008) e permitem visualizar melhor este problema através de ilustrações.




(a) Caracterização dos fornecedores, consumidores e armazém de *Cross-Docking*

(b) Solução obtida para o problema

Figura 2: Caracterização do PRV com *Cross-Docking*

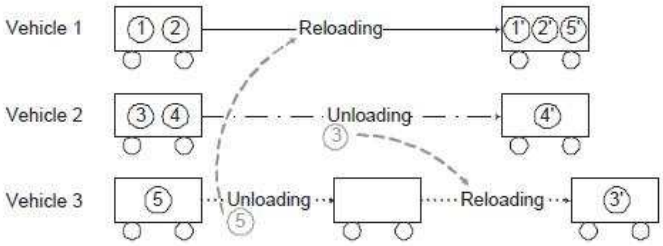



Figura 3: Exemplo da etapa de consolidação

Na figura 2(a) o conjunto de vértices $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ representa os fornecedores do sistema de *Cross-Docking*, enquanto no conjunto $\{1', 2', 3', 4', 5'\}$ estão os consumidores. O exemplo indica uma separação geográfica entre os fornecedores e os consumidores, mas ista não é uma premissa para que esta estratégia seja utilizada. No exemplo, observe que os vértices fornecedores deve ser visitados antes dos vertices consumidores.

O PRV utilizando *Cross-Docking* consiste em alocar rotas aos veículos para que visitem todos os fornecedores tendo o *Cross-Docking* como ponto de partida e retorno. Assim que as ofertas forem coletadas, devem ser distribuidas a todos os consumidores, devendo os veículos retornar ao *Cross-Docking* finalizando a distribuição. A figura 2(b) apresenta uma solução para o exemplo proposto.

Um dos fatores responsáveis pelo aumento da complexidade do PRV utilizando *Cross-Docking* é ilustrado na figura 3. Além de definir o roteamento dos veículos para coletar as ofertas dos fornecedores, quando estes retornam ao armazém do é realizada a etapa de consolidação. Considerando este exemplo, existe uma dependência entre as cargas dos veículos 1 e 3, e também dos veículos 3 e 2. Na consolidação, existe a troca das cargas entre os veículos antes que eles partam para atender aos consumidores.

O estudo do PRV com *Cross-Docking* é recente na literatura. O primeiro trabalho a abordar este assunto foi proposto por Lee et al. (2006). O autor destaca que embora a importância do *Cross-Docking* na gestão da cadeia de suprimentos seja um consenso entre as empresas, estudos relacionados ao roteamento de veículos integrado ao *scheduling* nos *Cross-Docking* ainda não foram conduzidos.

Neste trabalho os autores assumem que existe apenas um centro de distribuição no *Cross-Docking* e considera o horizonte de planejamento para um dia de trabalho, sendo que no início do dia todos os veículos estão no *Cross-Docking*. Os veículos são capacitados e devem coletar as mercadorias disponíveis nos fornecedores e retornar ao armazém para depois entregá-las aos consumidores. O processo de consolidação só pode ser iniciado após todos os veículos coletarem as mercadorias nos fornecedores e retornarem ao *Cross-Docking*. Para a solução é proposto um modelo de programação inteira, mas devido ao tamanho das instâncias a serem solucionadas, foi apresentada uma heurística baseada em busca Tabu para obter soluções aproximadas.

Além de Lee et al. (2006), o trabalho de Wen et al. (2008) também propõe contribuições para o PRV com *Cross-Docking*. No entanto, diferentes particularidades do problema são consideradas, como a existência de janelas de tempo para o atendimento dos fornecedores e consumidores, e principalmente a relaxação da restrição que força a presença de todos os veículos no para que o processo de consolidação seja iniciado.

Embora existam trabalhos apliquem técnicas de otimização em sistemas de *Cross-Docking*, a literatura disponível ainda demanda pesquisas que contribuam nesta área. Em particular, o roteamento de veículos integrado ao processo de consolidação no *Cross-Docking* conta com poucas contribuições, sendo um tema de pesquisa recente na literatura.

## 3. Definição do problema

O PRV com *Cross-Docking* abordado nos trabalhos de Lee et al. (2006) e Wen et al. (2008) considera que os consumidores podem demandar mercadorias vindas de diferentes fornecedores. Para solucionar problemas de grande e médio porte ambos os trabalhos apresentaram soluções heurísticas, uma vez que através de técnicas de otimização exata isto não seria possível, dada a complexidade computacional envolvida.

Este trabalho considera um caso particular do PRV com *Cross-Docking*, onde cada fornecedor apresentará oferta de uma única mercadoria, enquanto cada consumidor demandará mercadoria de apenas um fornecedor. Deste modo será possível fazer um mapeamento de *um-para-um* entre fornecedores e consumidores, sendo que cada vértice será visitado apenas uma vez.

Uma outra característica particular a este trabalho surge ao considerar custos na manipulação das mercadorias no *Cross-Docking*. Sabe-se que a carga/descarga das mercadorias demanda recursos como mão-de-obra e máquinas que têm um custo associado. Entre os trabalhos que abordam o PRV com *Cross-Docking* estes custos não são considerados. Procurando melhor representar a realidade existente na distribuição das mercadorias este trabalho introduz os custos de carga/descarga das mercadorias no *Cross-Docking*, fato que introduz complexidade ao problema, aumentando o desafio na obtenção de soluções.

No PRV com *Cross-Docking* considera-se que a garagem dos veículos tem a mesma localização do armazém de *Cross-Docking*. Os veículos partem da garagem, visitam todos os fornecedores para coletar as mercadorias e retornam para realizar o processo de consolidação no *Cross-Docking*. Para concluir a distribuição, os veículos partem para entregar as mercadorias aos consumidores retornando à garagem ao final das entregas.

## 4. Formulação matemática

Para modelar o PRV copm *Cross-Docking* considera-se uma rede de distribuição composta por um conjunto de fornecedores $F = \{1, 2, .., N\}$, um de consumidores $C = \{1', 2', .., N'\}$, onde $|F| = |C|$, além do armzém de *Cross-Docking*/garagem. O problema é representado por um grafo $G = (V, A)$ onde $V = F \cup C \cup \{0, 0'\}$ sendo 0 o vértice que representa o armazém de *Cross-Docking* e $0'$ uma copia artificial deste armazém. O conjunto $A = \{(i, j), i, j \in F\} \cup \{(i, j), i, j \in C\} \cup \{(0, j), j \in \{F \cup C\}\} \cup \{(i, 0'), i \in \{F \cup C\}\}$, sendo o custo para atravessar uma aresta $(i, j) \in A$ e dado por $c_{ij}$.

É definido também um conjunto de encomendas a serem distribuídas na rede, representado por uma função bijetiva $E : F \times C$ que associa cada vértice $f \in F$ a um único vértice $c \in C$. Cada encomenda $(f, c) \in E$ está associada a um peso $p_{(f,c)}$ e apresenta um custo para carga/descarga no *Cross-Docking* dado por $c_{(f,c)}$. Para a distribuição das mercadorias tem-se disponível um conjunto de veículos $K$ todos com capacidade $P$. Todos os veículos da frota devem ser utilizados no roteamento.

O problema de otimização consiste em definir o esquema de alocação e roteamento dos veículos para realizar com o minimo custo a distribuição das mercadorias, sendo que todas devem ser coletadas nos fornecedores e passar pelo *Cross-Docking*, antes de serem entregues aos respectivos consumidores. No Cross-docking nao e possível armazenar mercadorias, apenas trocá-las de veículos pagando-se um determinado custo.

Foram propostos dois modelos de fluxo em redes para solucionar este problema. Em ambos utiliza-se o artifício de concentrar *commodities* no vértice 0 que serão fluídas na rede, tendo como vértice final o depósito artificial $0'$, modelando assim as rotas dos veículos. O termo '*commodity*' foi preferido para descrever os modelos de fluxo ao invés de 'mercadoria' (comumente usado) para não sobrepor ao conceito da mercadoria física que deve ser entregue do fornecedor ao consumidor. No primeiro modelo o vértice 0 concentra uma commodity para cada veículo, enquanto no modelo 2 existirá no vértice 0 uma *commodity* para cada vértice fornecedor e consumidor. As duas subseções a seguir descrevem com detalhes estes modelos.

### 4.1. Modelo 1

Define-se um conjunto de *commodities* $Q$, sendo $|Q| = |K|$, e associa-se cada *commodity* $q \in Q$ a um veículo $k \in K$. Um vértice $i \in F \cup C$ deve receber uma unidade da *commodity* $q \in Q$ se, e somente se, o correspondente veículo $k \in K$ visita este vértice em sua rota. Neste caso, esta *commodity* deverá ser entregue do vértice 0 a $i$ utilizando-se os arcos apropriados da rede.

A oferta de cada mercadoria $q \in Q$ estará no intervalo de $[2, |F \cup C| + 2]$ unidades no vértice 0 e cada vértice $i \in F \cup C$ apresenta uma demanda unitaria de mercadoria que poderá ser satisfeita por qualquer $q \in Q$. Além disto, o depósito artificial $0'$ apresentará uma demanda de 2 unidades de cada mercadoria $q \in Q$, sendo que 1 unidade deve vir através dos vértices fornecedores e 1 unidade através dos consumidores. Como não existem arcos entre os vértices de $F$ e $C$, o fluxo de uma mercadoria na rede representará a rota de um veículo que sairá e retornará ao *Cross-Docking*.

A seguir são apresentadas as variáveis de decisão utilizadas no modelo, bem como a formulação de programação linear.

$$f_{ij}^q = \text{ Fluxo no arco } (i,j) \text{ correspondente à } \textit{commodity } q$$

$$x_{ij}^q = \begin{cases} 1 - \text{ O arco } (i,j) \text{ é ativado no fluxo da } \textit{commodity } q \\ 0 - \text{ Caso contrário} \end{cases}$$

$$y_i^q = \begin{cases} 1 - \text{ O vértice } i \text{ recebe uma unidade da } \textit{commodity } q \\ 0 - \text{ Caso contrário} \end{cases}$$

$$u_{(f,c)}^q = \begin{cases} 1 - \text{ A mesma } \textit{commodity } q \text{ é entregue aos vértices } f \in F \text{ e } c \in C \\ 0 - \text{ Caso contrário} \end{cases}$$

$$Min \sum_{(i,j)\in A} \sum_{q\in Q} c_{ij} x_{ij}^q + \sum_{(f,c)\in E} c_{(f,c)} (1 - \sum_{q\in Q} u_{(f,c)}^q)$$

$$\sum_{f\in F} f_{0f}^q = \sum_{f\in F} y_f^q + 1 \qquad \forall q \in Q \tag{1}$$

$$\sum_{c\in C} f_{0c}^q = \sum_{c\in C} y_c^q + 1 \qquad \forall q \in Q \tag{2}$$

$$\sum_{j\in\Gamma_i^+} f_{ij}^q - \sum_{h\in\Gamma_i^-} f_{hi}^q = -y_i^q \qquad \forall i \in V - \{0,0'\}, \forall q \in Q \tag{3}$$

$$\sum_{q\in Q} y_i^q = 1 \qquad \forall i \in V - \{0,0'\} \tag{4}$$

$$f_{ij}^q \leq |V| x_{ij}^q \qquad \forall (i,j) \in A, \forall q \in Q \tag{5}$$

$$\sum_{j\in\Gamma_i^+} x_{ij}^q + \sum_{h\in\Gamma_i^-} x_{hi}^q = 2y_i^q \qquad \forall i \in V - \{0,0'\}, \forall q \in Q \tag{6}$$

$$\sum_{f\in F} y_f^q P_{(f,c)} \leq P \qquad \forall q \in Q \tag{7}$$

$$\sum_{c\in C} y_c^q P_{(f,c)} \leq P \qquad \forall q \in Q \tag{8}$$

$$y_f^q + y_c^q \leq u_{(f,c)}^q + 1 \qquad \forall q \in Q, \forall (f,c) \in E \tag{9}$$

$$y_f^q + y_c^q \geq 2u_{(f,c)}^q \qquad \forall q \in Q, \forall (f,c) \in E \tag{10}$$

As restrições (1) e (2) determinam que a quantidade de cada *commodity* $q \in Q$ deve sair de 0 para atender os fornecedores e consumidores, respectivamente, que serão atendidos pelo veículo $k \in K$ correspondente, além da demanda do depósito artificial $0'$. Em (3) estão as restrições de conservação de fluxo, enquanto as restrições (4) determinam que um vértice deve receber exatamente uma *commodity*, o que seria o mesmo que dizer que ele deve ser visitado exatamente por um veículo no roteamento. Em (5) e (6) estão as restrições de acoplamento, que asseguram que o fluxo da *commodity* $q \in Q$ passará por um arco somente se ele estiver ativo na rota do veículo $k \in K$. Por outro lado estas restrições também definem que se o fluxo de uma *commodity* passar por um arco, este deve ser selecionado para o roteamento. As desigualdades (7) e (8) impõem que a carga total a ser coletada/entregue pelos vértices que recebem uma *commodity* não exceda a capacidade do veículo associado àquela rota. Finalmente as restrições (9) e (10) definem os valores das variáveis de decisão que modelam as trocas das mercadorias no *Cross-Docking*, caso ocorram.

### 4.2. Modelo 2

Este modelo se caracteriza por um fluxo *multi-commodity* na rede, sendo definido um conjunto de *commodities* $Q$ cuja cardinalidade é dada pela soma do número de fornecedores e consumidores, $|Q| = |F| + |C|$. Cada vértice $i \in F \cup C$ será associado a uma *commodity* apresentando a demanda de 1 unidade, enquanto o armazém artificial $0'$ apresentará demanda de 1 unidade de todas as *commodities* $q \in Q$. Assim, serão ofertadas 2 unidades de cada *commodity* no vértice 0, sendo que a demanda de cada vértice será atendida por exatamente uma rota $k \in K$, que é associada a um veículo na solução.

Para a formulação foram definidas as seguintes variáveis de decisão:

$$f_{ij}^{qk} = \text{Fluxo da } \textit{commodity } q \text{ no arco } (i,j) \text{ associada à rota } k$$

$$x_{ij}^{k} = \begin{cases} 1 - \text{ O arco } (i,j) \text{ é ativado na rota } k \text{ para o fluxo de alguma } \textit{commodity} \\ 0 - \text{ Caso contrário} \end{cases}$$

$$y^{qk} = \begin{cases} 1 - \text{ A rota } k \text{ está associada ao fluxo da } \textit{commodity } q \\ 0 - \text{ Caso contrário} \end{cases}$$

$$u_{(f,c)}^{k} = \begin{cases} 1 - \text{ As demandas dos vértices } f \in F \text{ e } c \in C \,|\, (f,c) \in E \\ \quad\;\; \text{são atendidas pela rota de mesmo índice } k \\ 0 - \text{ Caso contrário} \end{cases}$$

As variáveis de decisão acima são as mesmas definidas no modelo da seção 4.1, exceto pela variável $f_{ij}^{qk}$ que representa o fluxo das *commodities* por rotas. Para esta formulação, utiliza-se o predicado $g(q)$ que determina se um dado vértice apresenta ou não demanda para a *commodity* $q \in Q$. Deste modo, a formulação de fluxo *multi-commodity* é dada pelo modelo que segue.

$$Min \sum_{k=1}^{K} \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}^{k} + \sum_{(f,c)\in E} c_{(f,c)} (1 - \sum_{k=1}^{K} u_{(f,c)}^{k})$$

$$\sum_{f\in F} f_{0f}^{qk} = 2y^{qk} \qquad \forall q \in Q, \forall k = \{1,..,K\} \qquad (11)$$

$$\sum_{c\in C} f_{0c}^{qk} = 2y^{qk} \qquad \forall q \in Q, \forall k = \{1,..,K\} \qquad (12)$$

$$\sum_{j\in\Gamma_i^+} f_{ij}^{q} - \sum_{h\in\Gamma_i^-} f_{hi}^{q} = \begin{cases} -y^{qk}, \text{ se } i = g(q) \\ 0 \quad\;\; , \text{ c. c.} \end{cases} \qquad \forall i \in \{F \cup C\}, \forall q \in Q, \forall k \qquad (13)$$

$$\sum_{k=1}^{K} y^{qk} = 1 \qquad \forall q \in Q \qquad (14)$$

$$\sum_{f\in F} x_{0f}^{k} = 1 \qquad \forall k = \{1,..,K\} \qquad (15)$$

$$\sum_{c\in C} x_{0c}^{k} = 1 \qquad \forall k = \{1,..,K\} \qquad (16)$$

$$\sum_{q\in Q} f_{ij}^{qk} \leq |V| x_{ij}^{k} \qquad \forall (i,j) \in A, \forall k = \{1,..,K\} \qquad (17)$$

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{j\in\Gamma_i^+} x_{ij}^{k} + \sum_{k=1}^{K} \sum_{h\in\Gamma_i^-} x_{hi} = 2 \qquad \forall i \in V - \{0, 0'\} \qquad (18)$$

$$\sum_{q \in Q} y^{qk} P_{(g(q),c)} \leq P \qquad \forall k = \{1,..,K\} \tag{19}$$

$$\sum_{q \in Q} y^{qk} P_{(f,g(q))} \leq P \qquad \forall k = \{1,..,K\} \tag{20}$$

$$y^{fk} + y^{ck} \leq u_{(f,c)} + 1 \qquad \forall k = \{1,..,K\}, \forall (f,c) \in E \tag{21}$$

$$y^{fk} + y^{ck} \geq 2u_{(f,c)} \qquad \forall k = \{1,..,K\}, \forall (f,c) \in E \tag{22}$$

Assim como no modelo anterior, a função objetivo é dada pela soma dos custos dos arcos atravessados nas $|K|$ rotas e também os custos daquelas mercadorias que foram trocadas durante o processo de consolidação no *Cross-Docking*. Quanto às restrições, as igualdades $(11)$, $(12)$ e $(14)$ impõem que o fluxo de cada *commodity* ofertado pelo vértice 0 deve ser de 2 unidades para exatamente uma rota e 0 para as demais. As restrições de conservação de fluxo nos vértices fornecedores e consumidores estão representadas em $(13)$ e asseguram que o balanco de fluxo nestes vértices será $-1$ apenas quando a *commodity* for demandada pelo vértice para exatamente uma rota, e 0 nos demais casos.

As equações $(15) - (18)$ são restrições de acoplamento e têm a finalidade de garantir que um arco estará na solução se, e somente se, o fluxo de alguma *commodity* fluir pelos vértices em suas extremidades. Para isto, as igualdades $(15)$, $(16)$ e $(18)$ determinam, respectivamente, que deve haver um arco saindo do vértice 0 para algum fornecedor, outro arco de 0 para algum consumidor, e entre estes vértices, se existir um arco entrando deverá existir outro saindo. A restrição de capacidade dos veículos associados às rotas está presente nas restrições $(19)$ e $(20)$ para as rotas de fornecedores e de consumidores, respectivamente. Por fim, as desigualdades $(21)$ e $(22)$ verificam a troca de mercadorias no *Cross-Docking* para computar o respectivo custo na função objetivo.

Os dois modelos apresentados nesta seção para a solução do PRV com *Cross-Docking* utilizam diferentes abordagens de fluxo em redes. Para avaliar o comportamento destes modelos a próxima seção apresenta alguns resultados obtidos ao solucionar instâncias do problema utilizando ambas as formulações.

## 5. Resultados

Devido ao PRV com *Cross-Docking* ainda contar com poucas contribuições científicas, não há disponível um conjunto de instâncias que sirva de *benchmark* para a realização dos experimentos. Nos trabalhos de Lee et al. (2006) e Wen et al. (2008) os modelos e heurísticas propostos são testados através de instâncias reais, fornecidas pelas indústrias envolvidas na distribuição das mercadorias. No entanto, estas informações não foram publicadas e não estão disponíveis para realizar experimentos.

Para testar os modelos foi necessário gerar um conjunto de instâncias que representem um sistema de distribuição de mercadorias com *Cross-Docking* conforme descrito na seção 3. O formato das instâncias se baseia no conhecido *benchmark* de Solomon para o PRV que consiste em um conjunto de instâncias com 101 vértices distribuidos no plano euclideano, sendo que o vértice 0 é o depósito. A distância entre dois pares quaisquer de vértices é dada pela sua distância euclideana no plano.

Algumas adaptações foram necessárias para gerar instâncias para o PRV com *Cross-Docking* baseando-se nas instâncias de Solomon. A primeira foi a divisão dos vértices do grafo em dois grupos: fornecedores $(F)$ e consumidores $(C)$, sendo que $|F| = |C|$. A partir das coordenadas do eixo *x* do plano euclideano é feita a separação entre fornecedores (primeira metade dos vértices) e consumidores (demais vértices). O vértice 0 passa a ser o armzém de *Cross-Docking* e sua cópia artificial $(0')$ apresenta as mesmas coordenadas

no plano. Como as instâncias geradas têm de 10 a 50 vértices, estes foram escolhidos aleatoriamente entre os 100 das instâncias de Solomon.

Foi definida uma função bijetiva $E : F \times C$ que mapeia as mercadorias ofertadas por cada fornecedor a um consumidor, lembrando que a quantidade ofertada deve ser exatamente a mesma demandada para que não existam sobras no armazém. O mapeamento foi feito ao fixar um fornecedor a partir do primeiro e escolhendo-se aleatoriamente um consumidor, até que todos os pares $(f,c) \in E$ sejam estabelecidos. O custo de troca das mercadorias no Cross-Docking e definido como a distância média entre todos os vértices de cada instância.

O primeiro experimento avalia o desempenho dos modelos na obtenção de soluções ótimas. Para solucionar os modelos utiliza-se o pacote de otimização CPLEX, atribuindo-se um limite de tempo de 180 minutos para cada problema. A tabela 1 mostra os resultados para cada modelo, considerando adaptações das instâncias c101, r101 e rc101 do *benchmark* de Solomon. Caso a solução encontrada no intervalo de tempo especificado não seja ótima, apresenta-se o GAP da solução entre parênteses. O símbolo '$-$' é mostrado na tabela quando nenhuma solução é encontrada para a instância em 180 minutos.

| | c101 | | r101 | | rc101 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\|F\|+\|C\|$ | modelo 1 | modelo 2 | modelo 1 | modelo 2 | modelo 1 | modelo 2 |
| 10 | 323.8* | 323.8* | 344.7* | 344.7* | 372.1* | 372.1* |
| 20 | 404.3* | 407.3 (11.8%) | 373.8* | 373.8 (5.6%) | 401.9* | 428.2 (10.2%) |
| 30 | 417.7* | - | 455.0* | - | 474.6* | - |
| 40 | 496.4 (8.6%) | - | 520.9 (5.13%) | - | 552.8 (12.1%) | - |
| 50 | 540.0 (21.6%) | - | 545.5 (10.9%) | - | 599.5 (12.9%) | - |

Tabela 1: Solução PRV com *Cross-Docking* utilizando-se os modelos de fluxo

A execução do algoritmo Branch-and-Bound do CPLEX utilizando o modelo 1 apresentou melhores resultados, quando comparado ao mesmo algoritmo baseado no modelo 2, no que diz respeito a qualidade dos limites primais obtidos dentro do limite de tempo estabelecido. Através do modelo 2 foi possível solucionar apenas instâncias de pequeno porte, sendo que na otimalidade são obtidos resultados apenas para instâncias de 10 vértices. Para 30 ou mais vértices nenhuma solução foi encontrada dentro do limite de tempo. Já o modelo 1 permite obter soluções para instâncias de pequeno e médio porte, embora soluções ótimas sejam encontradas apenas para as instâncias com até 30 vértices.

Como não foi possível obter soluções ótimas para instâncias com mais de 30 vértices através dos algoritmos Branch-and-Bound que empregam diretamente as formulações apresentadas, sugere-se o uso de técnicas de Decomposição (por exemplo Decomposição de Dantzig-Wolfe ou Relaxação Lagrangeana) e de algoritmos específicos para resolver as reformulações resultantes a fim de obter melhores soluções. Neste contexto, os valores de limites duais são úteis em diversos algoritmos. Por este motivo, o próximo experimento foi conduzido para verificar o desempenho dos modelos em calcular valores de relaxação linear. Na tabela 2 se encontram os resultados obtidos para os modelos 1 e 2, considerando as mesmas instâncias do experimento anterior.

Os valores de relaxação linear do modelo 2 são superiores aqueles obtidos pelo modelo 1 para todas as instâncias. A justificativa para este fato está nas restrições de acoplamento de ambos os modelos, uma vez que as restrições $(17)$ do modelo 2 são mais apertadas que as restrições $(5)$ do modelo 1. No entanto, mesmo os valores de relaxação linear do modelo 2 ainda são distantes dos valores das soluções primais apresentados na tabela 1.

| | c101 | | r101 | | rc101 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\|F\|+\|C\|$ | modelo 1 | modelo 2 | modelo 1 | modelo 2 | modelo 1 | modelo 2 |
| 10 | 145.3 | 203.0 | 163.7 | 229.3 | 134.7 | 233.1 |
| 20 | 173.5 | 239.0 | 217.4 | 279.8 | 180.3 | 271.3 |
| 30 | 165.0 | 229.9 | 263.4 | 327.6 | 227.5 | 282.4 |
| 40 | 205.7 | 260.7 | 306.6 | 365.5 | 286.7 | 333.2 |
| 50 | 213.3 | 267.2 | 358.0 | 407.6 | 364.8 | 407.7 |

Tabela 2: Soluções de relaxação linear do PRV com *Cross-Docking*

A aproximação destes limites demanda o uso de técnicas de otimização específicas, como relaxações e decomposições.

## 6. Considerações finais

O PRV com *Cross-Docking* é um promissor problema de pesquisa, dada a relevância econômica da distribuição de mercadorias para as empresas. Este trabalho apresenta um estudo para este problema onde a quantidade de fornecedores e consumidores é a mesma, e a mercadoria ofertada por um fornecedor é demandada por exatamente um consumidor, existindo um mapeamento de *um-para-um* entre estes vértices. Além disto, uma nova característica é introduzida neste trabalho, que são os custos de carga/descarga das mercadorias no *Cross-Docking*.

São propostos dois modelos de programação matemática baseados em fluxo em redes. No primeiro modelo define-se uma *commodity* para cada veículo, enquanto no segundo existirá uma *commodity* para cada vértice da rede. Estes modelos foram solucionados utilizando o pacote de otimização CPLEX e dos resultados pode-se concluir que o primeiro modelo apresenta melhor desempenho ao calcular soluções ótimas para o problema, enquanto os resultados do segundo modelo são melhores quanto aos valores de relaxação linear.

Como não foi possível obter soluções ótimas para instâncias com mais de 30 vértices ao solucionar os modelos diretamente com o CPLEX, no estágio atual da pesquisa está sendo estudada uma formulação que aplica a decomposição de Dantzig-Wolfe através de um modelo de cobertura de conjuntos para obter melhores resultados. Os resultados da relaxação linear deste novo modelo são mais fortes, apresentando GAPs próximos aos 5% daquelas soluções ótimas conhecidas. O próximo passo deste trabalho será a implementação de um algoritmo Branch-and-Price para obter soluções ótimas de instâncias maiores do que as conhecidas.

## Referências

**M. Uday Apte e S. Viswanathan**, Effective cross docking for improving distribution efficiencies, *International Journal of Logistics: Research and Applications*, 3:291–302, 2000.

**John J. Bartholdi e Kevin R. Gue**, The best shape for a crossdock, *Transportation Science*, 38(2):235–244, 2004, ISSN 1526-5447, doi: http://dx.doi.org/10.1287/trsc.1030.0077.

**G.B. Dantzig e J.H. Ramser**, The truck dispatching problem, *Management Science*, 6: 80–91, 1959.

**Patrícia Fernandes de Oliveira e Nélio Domingues Pizzolato**, Eficiência da distribuição através da prática do cross docking, *ENEGEP - Encontro Nacional de Engenharia de Produção*, 2002.

**Gary Forger**, Ups starts world's premiere cross-docking operation, *Modern Materials Handling*, páginas 36–38, 1995.

**M.C.P Fraga**, Uma metodologia híbrida: Colônia de formigas – Busca Tabu – Reconexão por caminhos para resolução do problema de roteamento de veículos com janela de tempo, Master's thesis, CEFET–MG, Dissertação de mestrado 2007.

**Kevin R. Gue**, Cross-docking: Just-in-time for distribution, Teaching Notes-Naval Postgraduate School – Monterey, CA, May 2001.

**G.F. King e C.F Mast**, Excess travel: Causes, extent and consequences, *Transportation Research Record*, páginas 126–134, 1997.

**Young Hae Lee, Jung Woo Jung, e Kyong Min Lee**, Vehicle routing scheduling for cross-docking in the supply chain, *Computers and Industrial Engineering*, 51(2):247–256, 2006, ISSN 0360-8352.

**Min Wen, Jesper Larsen, Jean Clausen, Jean-François Cordeau, e Gilbert Laporte**, Vehicle routing with cross-docking, *Journal of Operational Research Society*, 2008, ISSN 0160-5682, doi: 10.1057/jors.2008.108.

**Clyde E. Witt**, Crossdocking: Concepts demand choice, *Material Handling Engineering*, 53:44–49, 1998.

**Wooyeon Yu e Pius J. Egbelu**, Scheduling of inbound and outbound trucks in cross docking systems with temporary storage, *European Journal of Operational Research*, 184(1):377–396, January 2008.