Coloração harmônica de $(q, q-4)$-grafos conexos

C. Linhares Sales, N. Martins, R. Sampaio

Departamento de Computação, Universidade Federal do Ceará
Campus do Pici, Bloco 910, 60455–760 Fortaleza, CE, Brazil

{linhares,nicolasam,rudini}@lia.ufc.br

Resumo

Dado um grafo simples G, uma coloração harmônica de G é uma coloração própria dos vértices tal que, para cada par de cores i e j, existe no máximo um par de vértices adjacentes com as cores i e j. O número cromático harmônico $h(G)$ é o número mínimo k tal que existe uma k-coloração harmônica de G. [Bodlaender, 1989] provou que determinar $h(G)$ é NP-difícil para cografos desconexos. Em 2007, [Asdre et al., 2007] provaram que determinar $h(G)$ é NP-Difícil mesmo para grafos conexos de intervalos e de permutação. Em 2010, [Ioannidou e Nikolopoulos, 2010] provaram que também é NP-Difícil para grafos colineares. Nesse artigo, nós obtemos um algoritmo polinomial para obter o número cromático harmônico para $(q, q-4)$-grafos, para qualquer inteiro q fixo, que são grafos tais que nenhum conjunto de no máximo q vértices induz mais do que $q-4$ diferentes P_4's.
PALAVRAS-CHAVE: coloração harmônica, algoritmo polinomial, $(q, q-4)$-grafos.
ÁREA: Teoria e Algoritmos em Grafos (TAG).

Abstract

Given a graph G, a harmonious coloring of G is a proper vertex coloring such that, for every pair of distinct colors i and j, there is at most one pair of adjacent vertices colored i and j. The harmonious chromatic number $h(G)$ is the minimum number k such that there is a harmonious k-coloring of G. [Bodlaender, 1989] proved that determining $h(G)$ is NP-hard for disconnected cographs. [Asdre et al., 2007] proved that determining $h(G)$ is NP-hard even for connected interval graphs and permutation graphs. [Ioannidou e Nikolopoulos, 2010] proved that it is NP-hard for colinear graphs. In this paper, we obtain a polimonial algorithm to obtain the harmonious chromatic number for $(q, q-4)$-graphs, for every fixed q. These are graphs for which no set of at most q vertices induces more than $q-4$ distinct P_4's.
KEYWORDS: harmonious coloring, polinomial time algorithm, $(q, q-4)$-graphs.
AREA: Graph Theory and Algorithms.

1 Introdução

Dado um grafo $G = (V, E)$, uma k-coloração c de G é uma atribuição de cores aos vértices de G, de um conjunto de cores $\{1, \ldots, k\}$, de forma que para toda aresta $uv \in E(G)$, $c(u) \neq c(v)$. Dizemos que o conjunto de vértices coloridos com a cor i forma a classe de cor c_i de c. O problema de coloração consiste em determinar o número cromático de G, $\chi(G)$, que é o menor inteiro k tal que G admite uma k-coloração.

Muitos problemas NP-difíceis em grafos, como o problema de coloração, possuem algoritmos polinomiais se o grafo de entrada pertencer a certas classes específicas, como os grafos de intervalos, grafos split, cografos ou grafos P_4-esparsos. Entretanto, o problema da coloração *completa* continua NP-completo mesmo para cografos [Bodlaender, 1989]. Uma coloração completa é uma coloração de vértices tal que para todo par de cores i e j, existe aresta $uv \in E(G)$, com $c(u) = i$ e $c(v) = j$.

Se uma k-coloração de vértices não é completa, existem duas classes de cor c_i e c_j tais que não há arestas entre seus vértices. Desta forma, podemos fundir as classes c_i e c_j em uma única classe, obtendo uma $k-1$-coloração de G. Podemos aplicar sucessivamente esse procedimento até que uma coloração completa de G seja obtida. Observe que esse procedimento também é uma estratégia de melhoria de uma coloração qualquer a fim de decrementar o número de cores utilizadas. O número acromático $\chi_a(G)$ de um grafo G, introduzido em [Harary e Hedetniemi, 1970], é o maior número k tal que G possui uma k-coloração completa.

A prova da NP-completude do problema da coloração completa para cografos, obtida por [Bodlaender, 1989], também estabelece diretamente a NP-completude para cografos de outro problema de coloração: a coloração harmônica. Uma coloração harmônica de um grafo simples G é uma coloração c dos vértices de G tal que cada par (i, j) de cores de c, existe no máximo uma aresta $uv \in E(G)$ tal que $c(u) = i$ e $c(v) = j$. Uma das motivações para o estudo de colorações harmônicas é obter um rotulamento único das arestas de um grafo a partir de uma coloração dos seus vértices. O número cromático harmônico $h(G)$ é o menor inteiro k tal que G admite uma k-coloração harmônica de seus vértices.

É fácil ver relações entre o número acromático $\chi_a(G)$ e o número cromático harmônico $h(G)$. Por exemplo [Chartrand e Zhang, 2009],

$$1 \leq \chi_a(G) \leq \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{1+8m}}{2} \right\rfloor \leq h(G) \leq n,$$

onde n e m são respectivamente o número de vértices e o número de arestas de G.

Apesar de ser NP-completo para cografos, veremos adiante que o problema da coloração harmônica é trivial para cografos conexos. Recentemente, [Asdre et al., 2007] provaram que determinar $h(G)$ é NP-Difícil mesmo para grafos conexos de intervalos, grafos de permutação e grafos *split*. Em 2010, [Ioannidou e Nikolopoulos, 2010] provaram que o problema também é NP-Difícil para grafos colineares.

Sendo difícil para classes tão simples de grafos, surge a questão sobre quais classes possuem algoritmos polinomiais para o problema da coloração harmônica. Neste artigo, nós obtemos algoritmos polinomiais para diversas classes de grafos. Dado um inteiro $q \geq 4$ fixo, dizemos que um grafo é um $(q, q-4)$-grafo se todo conjunto com q vértices induz no máximo $q-4$ diferentes P_4's (caminhos com quatro vértices). Por exemplo, $(4, 0)$-grafos são cografos, $(5, 1)$-grafos são grafos P_4-esparsos, $(6, 2)$-grafos são grafos P_4-*estensíveis* livres de C_5 e $(7, 3)$-grafos contém os grafos P_4-*leves*.

O problema clássico de coloração e outras variantes tem sido resolvidas em tempo polinomial para $(q, q-4)$-grafos. Entre essas variantes, temos o problema de k-extensão de coloração parcial do vértices de G, que consiste em determinar se a pré-coloração pode ser estendida, usando no máximo k cores, para todo o grafo [Babel et al., 2001]. Mais recentemente, um algoritmo polinomial foi desenvolvido para resolver problema de b-coloração nessa classe de grafos [Campos et al., 2010]. O problema da b-coloração consiste em determinar o maior inteiro k tal que G admite uma coloração c de seus vértices onde toda classe de cor c_i possui um vértice v que é adjacente a pelo menos um vértice em cada outra classe de cor. Observamos que os algoritmos citados usam a técnica de programação dinâmica.

Nosso principal resultado é a prova de que, fixado q e dado qualquer $(q, q-4)$-grafo conexo G como entrada, existe um algoritmo polinomial para obter uma coloração harmônica mínima de G (e consequentemente determinar $h(G)$). O algoritmo aqui apresentado não utiliza a técnica de programação dinâmica.

2 Resultados estruturais sobre $(q, q-4)$-grafos

[Babel e Olariu, 1998] definiram um grafo como $(q, q-4)$-*grafo* se nenhum conjunto com q vértices induz mais do que $q-4$ diferentes P_4's. Cografos são $(4, 0)$-grafos, ou seja, não possuem P_4's induzidos [Corneil et al., 1981]. Grafos P_4-esparsos são $(5, 1)$-grafos [Hoàng, 1985]. Estruturalmente, sabe-se que todo cografo é desconexo ou seu complemento é desconexo, e que todo grafo P_4-esparso é um cografo ou é uma *aranha*.

Dizemos que um grafo é uma *aranha* se o seu conjunto de vértices pode ser particionado em conjuntos S, C e R, onde $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ e $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ para $k = |S| = |C|$ tais que:

i. S induz um conjunto independente;

ii. C induz uma clique;

iii. Todo vértice de R é adjacente aos vértices de C e não-adjacente aos vértices de S;

iv. (a) s_i é adjacente a c_i se e só se $i = j$, para todos $1 \leq i, j \leq k$ (*aranha magra*); ou
   (b) s_i é adjacente a c_i se e só se $i \neq j$, para todos $1 \leq i, j \leq k$ (*aranha gorda*)

Podemos visualizar S, C e R respectivamente como as pernas, o corpo e a cabeça da aranha. Note que R pode ser vazio e, nesse caso, dizemos que a aranha é sem cabeça.

[Jamison e Olariu, 1995] provaram um importante resultado estrutural para grafos quaisquer, usando *grafos p-conexos*. Um grafo é *p-conexo* se, para toda partição dos vértices de G em conjuntos A e B não vazios, existe um P_4 com vértices de A e B. A versão aqui apresentada do teorema abaixo está um pouco mais simples do que o original, pois não precisaremos da noção de *componente p-conexa*.

Teorema 2.1 ([Jamison e Olariu, 1995]). *Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. Então G satisfaz um dos itens abaixo:*

(i) G é desconexo;

(ii) $\bar{G}$ é desconexo (onde $\bar{G}$ é o complemento de G);

(iii) *Existem dois subconjuntos disjuntos H_1 e H_2 de vértices de G tais que $H = H_1 \cup H_2$ induz um subgrafo p-conexo e todo vértice de $V(G) - H$ é adjacente aos vértices de H_1 e não-adjacente aos vértices de H_2. Além disso, todo P_4 induzido $w - x - y - z$ com vértices de H_1 e H_2 é tal que $x, y \in H_1$ e $w, z \in H_2$.*

Além disso, tal caracterização pode ser obtida em tempo linear no número de arestas de G.

[Jamison et al., 1995] provaram que tal caracterização pode ser obtida em tempo polinomial. [Babel e Olariu, 1998] também provaram que todo $(q, q-4)$-grafo p-conexo é uma aranha sem cabeça ou tem menos do que q vértices. Desta forma, aplicando o teorema acima sobre um $(q, q-4)$-grafo, temos diretamente o lema abaixo.

Lema 2.2. *Seja $q \geq 4$ um inteiro fixo. Dado um $(q, q-4)$-grafo $G = (V, E)$, então G satisfaz um dos itens a seguir:*

(a) *G é desconexo;*

(b) *$\bar{G}$ é desconexo;*

(c) *G é uma aranha;*

(d) *Existem dois subconjuntos disjuntos H_1 e H_2 de vértices de G tais que $H = H_1 \cup H_2$ tem menos do que q vértices e todo vértice de $V(G) - H$ é adjacente aos vértices de H_1 e não-adjacente aos vértices de H_2.*

Além disso, tal caracterização pode ser obtida em tempo linear no número de arestas de G.

Prova. Aplicando o Teorema 2.1, se G satisfaz (i) ou (ii), temos diretamente os itens (a) e (b). Suponha então que G satisfaz (iii). Como G é um $(q, q-4)$-grafo, então o subgrafo induzido por H é também um $(q, q-4)$-grafo e, como é p-conexo, temos de [Babel e Olariu, 1998] (como já explicado) que H tem menos do que q vértices (o que prova o item(d)) ou induz uma aranha sem cabeça.

Se H for uma aranha sem cabeça, temos diretamente de (iii) que H_1 é o "corpo" e H_2 são as "patas" da aranha. Como todo vértice de $V(G) - H$ é adjacente a H_1 e não adjacente a H_2, então G inteiro forma uma aranha onde $V(G) - H$ é a "cabeça", provando (c). □

3 Coloração harmônica de $(q, q-4)$-grafos

Lema 3.1. *Seja G um grafo tal que $\bar{G}$ é desconexo. Então $h(G) = n$, onde n é o número de vértices de G, e toda coloração harmônica mínima de G deve associar uma cor diferente para cada vértice.*

Prova. Seja $k > 1$ o número de componentes conexas de $\bar{G}$. Seja $(C_1, \ldots, C_k)$ uma partição de $V(G)$ que induz as componentes conexas de $\bar{G}$. Logo, para todos $1 \leq i < j \leq k$, cada vértice de C_i é adjacente a cada vértice de C_j no grafo G.

Seja c uma coloração harmônica de G. Sejam x_i e x_j vértices de C_i e C_j respectivamente. Claramente, a cor $c(x_i)$ de x_i deve ser diferente da cor $c(x_j)$ de x_j, pois x_i é adjacente a x_j. Se $|C_j| > 1$, seja y_j outro vértice de C_j. Como c é harmônica, então a cor $c(y_j)$ deve ser diferente da cor $c(x_j)$, pois senão teríamos duas arestas (x_i, x_j) e (x_i, y_j) cujas extremidades estariam coloridas com o mesmo par de cores.

Portanto, uma cor não pode ocorrer em componentes diferentes e nem pode ocorrer duas vezes na mesma componente. Ou seja, cada vértice deve ter uma cor diferente. □

No lema abaixo, observe que uma aranha gorda com $|C| = 1$ é desconexa e com $|C| = 2$ é também uma aranha magra. Por isso, podemos supor que $|C| > 2$.

Lema 3.2. *Seja G uma aranha conexa com partição (S, C, R). Se G é uma aranha magra, então $h(G) = |R| + |C| + 1$ e uma coloração harmônica mínima é obtida associando uma cor diferente para cada vértice em $R \cup C$ e associando uma mesma cor (que não apareça em $R \cup S$) para todo vértice de S. Se G é uma aranha gorda com $|C| > 2$, então $h(G) = |R| + 2|C|$ e toda coloração harmônica mínima de G deve associar uma cor diferente para cada vértice.*

Prova. Considere uma coloração harmônica de G. Como C induz uma clique, todos os seus vértices devem ter cores diferentes entre si. Como os vértices de R estão ligados aos vértices de C, então nenhuma cor de C pode ocorrer em R (e vice-versa). Se $|R| > 1$ então dois vértices de R não podem ter a mesma cor, pois são adjacentes a um mesmo vértice em C (caso contrário, a coloração não seria harmônica). Resumindo, cada vértice de $R \cup C$ deve ter uma cor diferente dos demais.

Considere agora que G é uma aranha magra. Seja s_i um vértice de S. Seja c_i o vértice de C que é adjacente a s_i. A cor de s_i não pode ser uma cor de um vértice c_j de C, pois senão (c_i, s_i) e (c_i, c_j) seriam duas arestas com o mesmo par de cores nas extremidades. Pelo mesmo motivo, a cor de s_i não pode ser uma cor de um vértice r_j de R. Portanto, deve ser uma nova cor. Assim, $h(G) \geq |R| + |C| + 1$.

Se colorirmos cada vértice de S com essa nova cor, não haverá duas arestas com o mesmo par de cores nas extremidades, pois essa nova cor aparece apenas em S e cada vértice de S está ligado a exatamente um vértice de C diferente dos demais. Ou seja, $h(G) \leq |R| + |C| + 1$.

Considere agora que G é uma aranha gorda com $|C| > 2$. Pelos mesmos motivos anteriores, os vértices de S não podem receber cores de C nem de R. Resta saber se dois vértices s_i e s_j de S podem receber a mesma cor. Como $|C| > 2$, existe um vértice c_k de C que é adjacente a s_i e s_j. Portanto, s_i e s_j devem receber cores diferentes em uma coloração harmônica. Ou seja, todos os vértices devem receber cores distintas: $h(G) = |R| + |C| + |S|$. Como $|S| = |C|$, temos o resultado. $\square$

Aplicando o Lema 2.2 sobre um $(q, q-4)$-grafo conexo G, temos a ocorrência dos itens (b), (c) ou (d), visto que G é conexo. Os dois lemas desta seção calculam o número cromático harmônico para os casos (b) e (c). Suponha então que G satisfaz o item (d). Como G é conexo, então $|H_1| > 1$ e portanto os vértices de R devem receber cores diferentes entre si em uma coloração harmônica, visto que todo vértice de R está ligado a todo vértice de H_1. Resta saber como colorir $H = H_1 \cup H_2$. Intuitivamente, como H é pequeno (tem menos do que q vértices), podemos obter todas as colorações possíveis de H em tempo constante e, a partir delas, calcular o número cromático harmônico de G. Essa é a ideia do lema abaixo.

Lema 3.3. *Seja q um inteiro fixo e seja G um grafo conexo. Suponha que existem dois subconjuntos disjuntos H_1 e H_2 de vértices de G tais que $H = H_1 \cup H_2$ tem menos do que q vértices e todo vértice de $V(G) - H$ é adjacente aos vértices de H_1 e não-adjacente aos vértices de H_2. Então, podemos obter uma coloração harmônica mínima de G em tempo linear no número de vértices.*

Prova. Seja c uma coloração harmônica de G. Seja c_H a coloração de $G[H]$ (o subgrafo de G induzido por H) induzida por c. É fácil ver que, como c é harmônica, então c_H também é harmônica (basta ver que, se não há duas arestas em G com mesmo par de cores nas extremidades, então também não há em $G[H]$). Portanto, toda coloração harmônica de G pode ser obtida de alguma coloração harmônica de $G[H]$.

Note ainda que não podem existir dois vértices x e y de $V(G) - H$ com a mesma cor em c, pois x e y possuem um vizinho em comum em H_1 e c é harmônica. Portanto, os vértices de $V(G) - H$ devem receber cores diferentes entre si.

Considere então uma coloração harmônica c_H de $G[H]$. Qual a coloração harmônica c_G de G que estende c_H e usa o menor número de cores? Seja C_H o conjunto das cores usadas em c_H. É preciso saber quais cores de C_H podem ser aproveitadas para colorir os vértices de $V(G) - H$. Como todos os vértices de $V(G) - H$ são adjacentes aos vértices de H_1, então as cores aproveitáveis são aquelas de C_H tais que nenhum vértice com essa cor é vizinho de outro vértice colorido com alguma cor que ocorra em H_1.

Resumindo, seja C_1 o conjunto das cores dos vértices de H_1 na coloração c_H. Seja X o conjunto dos vértices de H coloridos com as cores de C_1. Claramente, $H_1 \subseteq X$. Seja $Y = X \cup N(X)$, onde $N(X)$ é o conjunto dos vizinhos dos vértices em X. Seja agora C_Y o conjunto das cores dos vértices de Y na coloração c_H. Seja C_Z o conjunto das cores de C_H não usadas em Y. Ou seja, $C_Y \cup C_Z = C_H$ e $C_Y \cap C_Z = \emptyset$.

Claramente, não podemos usar nenhuma cor γ de C_Y em $V(G) - H$, pois γ é uma cor de H_1 ou já existe um vértice de H com a cor γ vizinho de algum vértice com uma cor usada em H_1. É fácil ver que podemos aproveitar as cores de C_Z em $V(G) - H$. Com isso, uma coloração harmônica c_G de G que estende c_H e usa o menor número de cores deve usar $|C_H| + \max\{|V(G)| - |H| - |C_Z|, 0\}$ cores e é obtida colorindo cada vértice de $V(G) - H$ usando cores diferentes de C_Z ou novas cores não usadas em c_H.

Como o tamanho de H é menor do que q (que é uma constante que independe do tamanho de G), podemos obter em tempo constante todas as colorações harmônicas c_H de H e calcular o número mínimo de cores em uma coloração harmônica de G que estende c_H. Tirando o mínimo, obtemos em tempo constante o número cromático harmônico de G e podemos obter em tempo linear no número de vértices uma coloração harmônica mínima de G. □

Teorema 3.4 (resultado principal)**.** *Seja q um inteiro fixo. Dado um $(q, q-4)$-grafo conexo G, podemos em tempo linear no número de arestas determinar o número cromático harmônico $h(G)$ de G e obter uma coloração harmônica mínima de G.*

Prova. Segue diretamente dos Lemas 2.2, 3.1, 3.2 e 3.3. □

Referências

[Asdre et al., 2007] K. Asdre, K. Ioannidou e S. Nikolopoulos, The harmonious coloring problem is NP-complete for interval and permutation graphs, *Discrete Applied Mathematics* **155** (2007), 2377–2382.

[Babel, 1997] L. Babel, On the P_4 structure of graphs, *Habilitationsschrift, Zentrum Mathematik, Technische Universität München* (1997).

[Babel e Olariu, 1998] L. Babel e S. Olariu, On the structure of graphs with few P_4s, *Discrete Applied Mathematics* **84** (1998), 1–13.

[Babel et al., 2001] L. Babel e T. Kloks and J. Kratochvíl and D. Kratsch and H. Muller and S. Olariu, Efficient algorithms for graphs with few $P_4's$, *Discrete Mathematics* **235** (2001), 29–51.

[Bodlaender, 1989] H. L. Bodlaender, Achromatic number is NP-complete for cographs and interval graphs, *Information Processing Letters* **31** (1989), 135–138.

[Chartrand e Zhang, 2009] G. Chartrand e P. Zhang, *Chromatic Graph Theory* [Capítulo 13], CRC Press (2009).

[Corneil et al., 1981] D. Corneil, H. Lerchs e L. K. Stewart, Complement reducible graphs, *Discrete Applied Mathematics* **3** n.3 (1981), 163–174.

[Corneil et al., 1984] D. Corneil, Y. Perl e L. K. Stewart, Cographs: recognition, applications and algorithms, *Congressus Numerantium* **43** (1984), 249–258.

[Harary e Hedetniemi, 1970] F. Harary e S. Hedetniemi, The achromatic number of a graph, *J. Combin. Theory* **8** (1970) 154–161.

[Hoàng, 1985] C. Hoàng, Perfect graphs, *PhD thesis, School of Computer Science, McGill University, Montreal* (1985).

[Ioannidou e Nikolopoulos, 2010] K. Ioannidou e S. Nikolopoulos, Harmonious Coloring on Subclasses of Colinear Graphs *WALCOM: Algorithms and Computation: 4th International Workshop* (2010)

[Jamison e Olariu, 1992] B. Jamison e S. Olariu, A tree representation for P_4-sparse graphs, *Discrete Applied Mathematics* **35** (1992), 115–129.

[Jamison et al., 1992] B. Jamison e S. Olariu, Recognizing P_4-sparse graphs in linear time, *SIAM Journal on Computing* **21** (1992), 381–406.

[Jamison e Olariu, 1995] B. Jamison e S. Olariu, P-components and the homogeneous decomposition of graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **8** (1995), 448–463.

[Jamison et al., 1995] B. Jamison e S. Olariu, Linear-time optimization algorithms for P_4-sparse graphs, *Discrete Applied Mathematics* **61** (1995), 155–175.

[Babel et al., 2001] L. Babel and T. Kloks and J. Kratochvl and D. Kratsch and H. Muller and S. Olariu, Efficient algorithms for graphs with few P4's, *Discrete Mathematics* **235**:23 (2001), 29–51.

[Campos et al., 2010] V. Campos and C. Linhares Sales and A. Maia and R. Sampaio, *b*-Coloração de Grafos com poucos P4's, (2010), manuscrito.