

**DESENVOLVIMENTO DE UM TESTE DE HIPÓTESES PARA UM MODELO
HÍBRIDO DE RISCOS COMPETITIVOS DEPENDENTES E PROCESSOS DE
RENOVAÇÃO GENERALIZADOS**

First Author

Ricardo José Ferreira

UFPE, Av. Acadêmico Hélio Ramos, s/n, Cidade Universitária, Recife-PE, CEP:50740-530
rickhardo@gmail.com

Second Author*

Márcio Moura

UFPE, Av. Acadêmico Hélio Ramos, s/n, Cidade Universitária, Recife-PE, CEP:50740-530
marciocmoura@gmail.com

Third Author

Paulo Renato Alves Firmino

UFRPE, Rua Dom Manoel de Medeiros, s/n, Dois Irmãos, Recife – PE, CEP 52171-900
praf62@yahoo.com

Fourth Author*

Enrique Andrés López Droguett

UFPE, Av. Acadêmico Hélio Ramos, s/n, Cidade Universitária, Recife-PE, CEP:50740-530
ealopez@uol.com.br

Fifth Author

Edgar Braga

FIR, Av. Engenheiro Abdias de Carvalho, nº 1678, Madalena, Recife-PE, CEP:50720-635
edgar_braga@hotmail.com

RESUMO

Banco de Dados de Confiabilidade (BDC) são capazes de fornecer uma quantidade enorme de informações em sistemas diferentes. A Análise da Confiabilidade surge como uma importante ferramenta para o tratamento de informações sobre distribuições de tempo de vida, que decorrem de BDC. Assim, a análise de confiabilidade pode ser realizada através de alguns mecanismos probabilísticos como concorrentes Riscos (CR). modelos CR as relações entre falhas críticas e manutenção preventiva, que competem entre si para provocar a interrupção do sistema. Uma das desvantagens do CR não está tratando a natureza da reparação efectuada, que é tratada por meio de modelos como um conhecido como Processo de Renovação Generalizado (GRP), que não é capaz de modelar a relação entre os riscos que CR faz. Este trabalho o objetivo de estudar as falhas críticas, manutenção preventiva e tipo de reparo realizado por meio de um modelo baseado em um CR e GRP. Um teste de hipótese é desenvolvido para analisar a adaptação do modelo aos dados.

Palavras chave: Riscos Competitivos, Processos de Renovação Generalizados, Testes de Hipóteses.

ABSTRACT

Reliability Databases (RDB) are able to provide a huge amount of information on different systems. Reliability analysis emerges as an important tool for treating information about life time distributions which stem from RDB. Thus, reliability analysis can be accomplished through some probabilistic mechanisms such as Competing Risks (CR). CR models the relationships between critical failures and preventive maintenance which compete with each other to cause system stoppage. One of the disadvantages of CR is not treating the nature of repair performed which is handled by models as one known as Generalized Renewal Process (GRP) which is not capable to

model the relationship between risks as CR does. This paper the aim at studying critical failures, preventive maintenance and type of repair performed by using a model based upon a CR and GRP. A hypothesis test is developed to analyze the adjustment of the model to data.

Keywords: Competing Risks, Generalized Renewal Processes, Hypothesis Test.

1. Introdução

A utilização de Bancos de Dados de Confiabilidade (BDC) possui um importante papel no cenário de indústrias de grande porte. Isso se deve ao fato dessas estarem sempre em busca de uma melhor confiabilidade em seu processo como um todo para um melhor desempenho na produção de seu produto final, reduzindo custos e aumentando o atendimento no mercado. Fragola (1996) apresenta uma perspectiva histórica sobre o desenvolvimento de tais bancos desde os anos 50, onde se nota uma evolução natural dos mesmos de acordo com as necessidades que vem surgindo.

A quantidade de análises possíveis a partir de um BDC permite o uso de diversas metodologias para obtenção de métricas de interesse resultando em uma gama de informações valiosas para sistemas sob análise. Uma das metodologias mais usadas se refere à análise de confiabilidade através de métodos probabilísticos.

Uma maneira de realizar a análise de confiabilidade de um equipamento/sistema por ferramentas probabilísticas é conhecida como Riscos Competitivos (RCs). Como pode ser visto em Crowder (2001), tal metodologia utiliza-se do princípio de que qualquer evento que aconteça com o sistema em estudo pode ser relacionado com diversas causas. Em outras palavras, há diversos riscos competindo para ser responsável pelo acontecimento de um evento naquele sistema. A definição do sistema deve ser feita de maneira que a ocorrência seja singular, ou seja, apenas no sistema.

Em particular, é de interesse conseguir relacionar as possíveis falhas de um sistema com seu causador. Tais causadores são conhecidos como causa de uma falha que é acionada por um mecanismo de falha. Problemas dessa natureza estão constantemente presentes na literatura como apresentado em Lindqvist (2006), Lindqvist, Stove *et al.* (2005) entre outros. Além disso, a relação entre as diversas causas de uma falha pode dar-se de maneira independente ou dependente.

Dentre os modelos existentes, o mais conhecido, desenvolvido por Cooke (1993), é chamado de Random Signs Censoring (RSC) que tem como princípio modelar falhas críticas e manutenções preventivas através de um tipo de sinal que possa ser emitido pelo sistema em questão.

Um outro modelo que expande o RSC é conhecido como modelo de alerta do reparo (do inglês – Repair Alert Model – RA) o qual é apresentado em Lindqvist, Stove *et al.* (2005). Tal modelo é capaz de analisar a capacidade de reflexo da equipe de manutenção através de uma função conhecida como função de alerta de reparo.

Analisando o cenário em discussão, é perceptível ainda uma possível expansão dos modelos de RCs dedicados mais a qualidade de manutenções. Isso porque RCs não levam em consideração a natureza da manutenção realizada. Recomenda-se Doyen e Gaudoin (2006) para uma melhor discussão.

A análise da natureza de manutenções é tratada na literatura através de processos estocásticos pontuais. Ao se realizar uma manutenção em determinado sistema/equipamento, espera-se que o mesmo possa voltar tão bom quanto novo. Para esse caso, a manutenção é denominada de manutenção perfeita e é modelado por processos estocásticos pontuais de Renovação. Ainda, é comum ocorrer situações onde a manutenção realizada leva o equipamento/sistema a um estado de tão ruim quanto antes da falha, conhecido como manutenção mínima. Tal tipo de manutenção é modelado por Processos Não-Homogêneo de Poisson. Em geral, o que se nota após uma manutenção é que o estado do equipamento não é perfeito, porém não é mínimo. A esse estado intermediário dá-se o nome de manutenção

imperfeita. Diversos modelos capazes de representar tais estados foram sendo desenvolvidos ao longo do tempo.

Como uma tentativa de trabalhar um modelo de RCs com um modelo de análise da qualidade de manutenções, Langseth e Lindqvist (2003) apresentam o uso do modelo de alerta de reparo junto com o modelo BP. Com relação à aplicabilidade de tais modelos, Langseth e Lindqvist (2005) desenvolvem um teste de hipóteses específico, utilizando técnicas de Estatística Não-Paramétrica, para verificar se o modelo desenvolvido em Langseth e Lindqvist (2003) é aplicável.

Considerando um modelo conhecido como Processos de Renovação Generalizados (PRG), esse trabalho busca apresentar o uso conjunto do modelo de alerta de reparo com o PRG para uma melhor abordagem de problemas de dependência de riscos com a análise da qualidade de um reparo efetuado.

Para verificar a adequacidade dos dados ao modelo, desenvolve-se aqui um teste de hipóteses baseado no teste desenvolvido por Langseth e Lindqvist (2005) utilizando conceitos de Estatística não paramétrica. Segundo Wasserman (2006) análises paramétricas são usadas quando se assume que a população em questão pode ser modelada através de distribuições de probabilidade paramétricas. Caso isso não se aplique à população em questão, o uso da estatística não-paramétrica é feito para auxiliar na construção de uma regra de decisão através da estatística do teste.

Uma base de dados do OREDA (do inglês Offshore REliability DAta) – o qual descreve um sistema de compressor de uma instalação marítima – é utilizada para a verificação da adequacidade do modelo proposto. Tal etapa é importante para a correta aplicação e interpretação dos resultados possíveis fornecidos pelo modelo proposto. Esse banco está relacionado diretamente ao interesse em se estudar BDCs de refinarias no cenário nacional.

O trabalho está organizado como segue. A Seção 2 fala brevemente da teoria de Riscos Competitivos e modelos de reparos, além da teoria de testes de hipóteses. A Seção 3 contextualiza o desenvolvimento de um teste de hipóteses e as funções de interesse do modelo proposto. A Seção 4 apresenta os resultados encontrados. Por fim, a Seção 5 apresenta as conclusões.

2. Fundamentação Teórica

A Seção 2.1 apresenta a contextualização de riscos competitivos enquanto que a Seção 2.2 trata de modelos de reparos. A Seção 2.3 apresenta uma discussão sobre testes de hipóteses.

2.1. Riscos Competitivos

O conceito de Riscos Competitivos pode ser ilustrado de diversas formas, assim como visto na introdução deste trabalho. Maiores detalhes de como ilustrar uma situação de Riscos Competitivos podem ser encontrados em Bedford e Cooke (2002), Cooke (1996a), entre outros.

São passadas nesse trabalho apenas as definições mais comentadas usadas no contexto de RC's e frequentemente utilizadas no desenvolvimento dos modelos, incluindo o proposto aqui.

Definição 1: *Seja um sistema em estudo definida por um tempo de operação T . Seja Y definido como o tempo de ocorrência de um evento durante o tempo de observação desse sistema. Defina ainda como X o tempo de falha e Z como o tempo de manutenção preventiva. Logo, $Y = \min(X, Z)$ é considerado como o mínimo entre o tempo de dois riscos competitivos em relação à unidade em estudo. É importante definir ainda como $J (= 1, 2, \dots, k)$ como a causa do evento que ocorreu.*

Por conveniência Y é considerado nesse trabalho como o tempo entre eventos (sendo X o tempo entre falhas e Z o tempo entre manutenções preventivas). Ainda, nesse trabalho se leva

em consideração que se têm apenas dois tipos de riscos competindo entre si – falhas críticas e manutenções preventivas.

É conveniente ainda apresentar algumas funções que são introduzidas a partir de RCs na seguinte definição.

Definição 2: Dado que $Y = \min(X, Z)$, a probabilidade dada por $P(X < Z, X \leq t)$ e representada por $F_X^*(t)$ é conhecida como sub-distribuição de X pois estuda o evento “tempo da falha crítica acontece antes do tempo de uma manutenção” e “tempo da falha crítica é menor ou igual a um tempo t ”. Analogamente define-se $P(Z < X, Z \leq t)$ como sub-distribuição de Z , sendo representada por $F_Z^*(t)$.

Definição 3: Considera-se a probabilidade dada por $P(X < Z, X > t)$ como sendo a sub-confiabilidade (ou sub-sobrevivência) de X e a mesma é representada por $R_X^*(t)$. Analogamente, $P(Z < X, Z > t)$ representa a sub-confiabilidade de Z , sendo representada por $R_Z^*(t)$.

Essas funções possuem características próprias e diferentes das propriedades de distribuições de probabilidades clássicas. Bedford e Cooke (2002), Lindqvist, Stove *et al.* (2005), Crowder (2001) e outros autores descrevem detalhadamente tais características.

Tratando falhas críticas do sistema em estudo como um risco (diga-se X), a sua classificação se dá quando o sistema deixa de realizar sua função satisfatoriamente. Com isso uma manutenção corretiva se torna necessária para reativar o sistema. No caso de manutenções preventivas (diga-se Z), sua realização se dá quando o sistema ainda desempenha sua função principal, mas de maneira parcial resultando em um estado de falha degradada. Tal classificação pode ser percebida pela Figura 1.

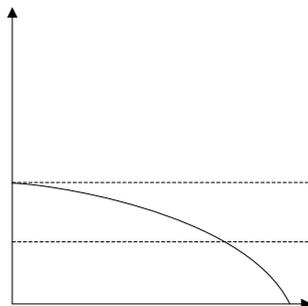


Figura 1 – Representação de falhas críticas e manutenções preventivas para um cenário de riscos competitivos em relação a função desempenho $d(t)$.

Com as principais definições apresentadas, pode-se apresentar os principais modelos que tratam das situações de Riscos Competitivos. Tais situações de RCs vem sendo tratado pela literatura com o passar do tempo, se dando destaque as principais diferenças entre riscos independentes e dependentes. Aos poucos, modelos foram surgindo para cada situação e os mesmos apresentam aplicações em cenários específicos. Bedford e Cooke (2002) apresentam alguns modelos para as duas situações, enquanto que já na década de 90, Cooke (1993) apresenta um importante modelo dependente.

Ainda na década de 90, Cooke (1996b) apresentou um modelo de riscos dependentes conhecido como Random Signs Censoring e já brevemente discutido em Cooke (1993).

Por se tratar de um modelo aplicável a uma situação frequente de RC dependentes, o RSC é usado como referência para o desenvolvimento de outro importante modelo de RC que tratam do mesmo tipo de situação. Um modelo conhecido como modelo de alerta de

reparo (do inglês *Repair alert model* – modelo RA) foi criado a partir do modelo RSC com o principal diferencial em torno de uma função conhecida como função de alerta de reparo responsável por modelar a capacidade de alerta da equipe de manutenção. Com esse modelo, tem-se a capacidade de analisar a eficiência da equipe de manutenção através dessa característica. Maiores detalhes em Langseth e Lindqvist (2003).

Independente do tipo de modelo de RC utilizado, algumas funções são de constante uso no estudo das relações entre os riscos. Algumas delas estão apresentadas na definição 3 e além daquelas, é importante observar a função densidade conjunta do par (Y,J)

As funções de interesse fornecidas pelo modelo IPRA que se referem ao par de observações (Y,J), que correspondem à função densidade de probabilidade, função de distribuição acumulada e funções sub-confiabilidade e sub-distribuição.

De acordo com cada modelo, as respectivas funções podem ser definidas acerca do interesse das análises em questão.

A partir dessas funções, as métricas de interesse podem ser obtidas para a análise do sistema em questão. Entretanto, além de avaliar o impacto da manutenção preventiva sobre os tempos de falhas do sistema, é interessante estudar a qualidade das manutenções realizadas. Tal estudo se baseia na metodologia de processos estocásticos pontuais. Em particular, esse trabalho trata de uma classe desses modelos conhecida como modelos de idade virtual. Dentre estes, o Processo de Renovação Generalizado é discutido a seguir.

2.2.Modelos de Idade Virtual: Processo de Renovação Generalizado

A análise de dados de falha e de manutenção pode ser feita por diversas metodologias dentre as quais riscos competitivos que foram apresentados na Seção anterior. Como já dito, tais análises respondem apenas como se dá o comportamento dos dados para funções que consideram uma manutenção realizada como perfeita. Tal cenário não retrata a realidade da maneira mais adequada, pois dificilmente uma manutenção consegue retornar um sistema ao estado de tão bom quanto novo. A situação mais encontrada reflete o sistema retornando da manutenção pior que novo, porém melhor que antes da falha.

A discussão nesse trabalho sobre PRG é baseada em Moura, Droguett *et al.* (2007) onde, além da apresentação do modelo em si, os autores apresentam um método de estimação bayesiana para os parâmetros de interesse.

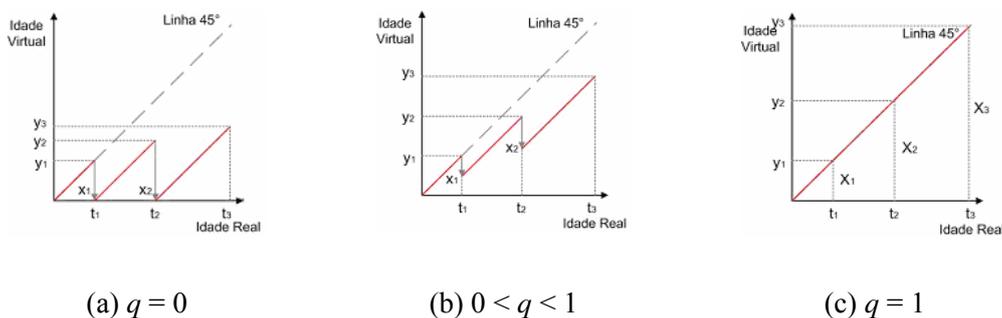


Figura 2 - Relação entre idade virtual e idade real

A idade virtual x_i representa a redução na idade real do sistema promovida pela i -ésima ação de manutenção e está diretamente relacionada com o parâmetro q . Os valores assumidos por este parâmetro possibilitam a representação dos tipos de manutenções citadas o que pode ser feito da seguinte maneira:

- $q = 0$: corresponde a uma manutenção perfeita, já que a idade virtual x_i é sempre anulada após a i -ésima ação de manutenção;

- $0 < q < 1$: corresponde a uma manutenção imperfeita, já que x_i é uma fração da idade real t_i ;
- $q = 1$: corresponde a uma manutenção mínima, já que x_i é exatamente igual à idade real t_i .

Outros valores para o parâmetro q são também possíveis, como $q < 0$ e $q > 1$ que correspondem a “manutenção melhor” e a “manutenção pior”, respectivamente. Porém, valores realísticos para o parâmetro q estão no intervalo entre 0 e 1, inclusive, uma vez que para $q < 0$ seria necessário assumir que ocorrem mudanças no projeto ou substituição de componentes por outros melhores do que eram quando novos, por exemplo. Além disso, $q > 1$ significa supor que a manutenção age de forma contrária ao objetivo de retornar o equipamento a uma condição melhor do que estava antes de ser reparado.

Kijima, M. e Sumita, N. (1986) propuseram dois tipos de modelos de idade virtual (para outros modelos veja Guo, Ascher *et al.* (2001)). O primeiro deles (Equação 1) é comumente chamado de modelo Kijima tipo I e consiste fundamentalmente na ideia que a manutenção atua apenas nas falhas que ocorrem no intervalo de exposição imediatamente anterior a manutenção. Deste modo, sendo t_1, t_2, \dots tempos sucessivos entre falhas, a idade virtual do sistema sofre incrementos proporcionais com o tempo:

$$x_i = x_{i-1} + q \cdot h_i = qt_i, \quad \text{Equação 1}$$

onde h_i é o tempo entre a ocorrência da $(i-1)$ -ésima e a i -ésima falha.

Já o modelo Kijima tipo II (Equação 2) assume que a manutenção atua com o objetivo de recuperar o sistema das falhas decorrentes de todos os intervalos anteriores de exposição desde o início da operação do sistema. Neste modelo, a idade virtual sofre incrementos proporcionais durante todo o intervalo de exposição acumulado:

$$x_i = q(h_i + x_{i-1}) = q(q^{i-1}h_1 + q^{i-2}h_2 + \dots + h_i). \quad \text{Equação 2}$$

Desta forma, o modelo Kijima Tipo I supõe que a i -ésima manutenção não pode remover todos os danos ocorridos até a i -ésima falha, somente reduzindo a idade adicional h_i . Já o modelo Kijima Tipo II supõe que na i -ésima manutenção, a idade virtual esteve acumulada em $x_{i-1} + h_i$. Assim, a i -ésima manutenção removerá os danos acumulados devido às falhas ocorridas durante o último intervalo de exposição assim como nos intervalos precedentes.

Independente do modelo Kijima utilizado, é possível avaliar o i -ésimo tempo t_i entre a $(i-1)$ e i -ésima falha através da função de distribuição acumulada condicionada na idade virtual x_{i-1} , como segue:

$$F(t_i | x_{i-1}) = P(T \leq t_i | T > x_{i-1}) = \frac{P(x_{i-1} < T \leq t_i)}{P(T > x_{i-1})} = \frac{F(t_i + x_{i-1}) - F(x_{i-1})}{1 - F(x_{i-1})} \quad \text{Equação 3}$$

onde $F(\cdot)$ é a função de distribuição acumulada do tempo até a primeira falha e $t_i + x_{i-1}$ representa o tempo acumulado até o i -ésimo tempo entre falhas.

O modelo de PRG utilizado nesse trabalho faz uso da metodologia desenvolvida no modelo Kijima tipo I.

O modelo proposto faz uso do PRG juntamente com o modelo IPRA de RCs, resta analisar se esse modelo é aplicável a uma determinada amostra. Tal análise pode ser realizada pela aplicação de um teste de hipóteses. Na próxima Seção discutem-se conceitos básicos sobre a teoria de testes de hipóteses.

2.3. Testes de Hipóteses

Antes de apresentar as funções de interesse e o desenvolvimento de um teste de hipóteses para o modelo proposto, uma breve discussão sobre a teoria de testes de hipóteses é apresentada nessa Seção a qual é baseada em Mood, Graybill *et al.* (1974).

A teoria dos testes de hipóteses é parte integrante da Inferência Estatística e está inteiramente relacionada à teoria de estimação. A idéia é testar determinada afirmação a respeito dos parâmetros da distribuição conjunta das observações, utilizando a informação trazida por X_1, K, X_n .

De forma geral, considere o seguinte problema: seja X_1, K, X_n uma amostra aleatória de uma distribuição com parâmetro θ desconhecido. Deseja-se testar se determinada afirmação $H_0 : \theta \in \Theta_0$ é válida ou se uma afirmação alternativa $H_1 : \theta \in \Theta_1$ é válida. Tais expressões são denominadas de hipóteses nulas e alternativas respectivamente com $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$. Se Θ_0 é unitário, a hipótese nula é dita ser simples, caso contrário, afirma-se que a hipótese nula é composta.

Deseja-se criar uma regra de decisão, ou seja, quer-se definir uma região $R \subset R^n$ tal que

- Se $(X_1, K, X_n) \in R$, rejeita-se H_0 ;
- Se $(X_1, K, X_n) \notin R$, não se rejeita H_0 .

R é denominado de região crítica do teste. Definir a regra de decisão equivale a definir R . Na regra de decisão, podem-se cometer dois tipos de erro.

Rejeitar a hipótese nula quando a mesma é verdadeira (ou seja, $\theta \in \Theta_0$ enquanto que o teste indica $\theta \in \Theta_1$).

Não rejeitar a hipótese nula quando a mesma é falsa (ou seja, $\theta \in \Theta_1$ enquanto que o teste indica que $\theta \in \Theta_0$).

Esses erros são conhecidos como erros Tipo I e II, respectivamente.

Quando a distribuição de probabilidade da população em estudo é conhecida, os testes de hipóteses envolvidos são denominados como paramétricos. Em tais testes, as hipóteses envolvidas apenas tratam parâmetros populacionais.

Entretanto, existem diversos casos em que a distribuição da população de interesse é desconhecida. Testes conhecidos como não-paramétricos podem ser efetuados com o objetivo de verificar a qualidade do ajuste de uma distribuição a uma população de interesse (testes de ajuste – Kolmogorov-Smirnov, Qui-quadrado, entre outros).

Wasserman (2006) descreve uma técnica conhecida como Bootstrap a qual se utiliza de geração de B amostras com reposição em relação à amostra de interesse. Em se tratando de Bootstrap paramétrico é usado quando se tem que a amostra em questão pode ser modelada por um modelo paramétrico, sendo suas replicações baseadas nos parâmetros desse modelo.

Ainda, tanto em estudos paramétricos como em estudos não-paramétricos, pode-se construir uma regra de decisão através do p -value. O p -value pode ser interpretado como a probabilidade de se observar o efeito observado, dado que a hipótese nula é verdadeira.

Nesse trabalho desenvolve-se uma estatística de teste no qual se verifica a aplicabilidade do modelo proposto (IPRA+PRG) ao banco de dados em estudo, onde a distribuição da estatística do teste é estudada através de Bootstrap paramétrico.

Após o uso de Bootstrap paramétrico, analisa-se o p -value para verificar se o modelo é adequado, assumindo que o mesmo o é.

Visto os conceitos da metodologia de Riscos Competitivos e sua capacidade analítica de tempos de falha e manutenções preventivas – cenário representativo de riscos competitivos dependentes – e da metodologia de PRG como modelo de idade virtual, além de uma breve discussão sobre testes de hipóteses, é preciso apresentar como se dá o funcionamento conjunto de tais metodologias. A apresentação das funções de interesse e de um teste de hipóteses capaz de verificar a aplicabilidade do modelo proposto está presente na próxima Seção.

3. Modelo Proposto: Hibridismo entre Riscos Competitivos Dependentes e Processo de Renovação Generalizado

3.1. Funções de Interesse

Basicamente, as funções de interesse são apresentadas na Seção 2.1, mas devido a manutenções agora serem imperfeitas, essas funções sofrem influências dos parâmetros representativos dos modelos de idade virtual.

Quando se trata da pdf para o tempo até a primeira falha, esta se comporta da mesma maneira apresentada na Equação 4.

$$f(y, j) = h(y)(1-r)^{1-j} \exp(-H(y))^{1-j} r^j Ie(H(y))^j \tag{Equação 4}$$

onde a função $Ie(H(y))$ é conhecida como integral exponencial e é definida por

$Ie(t) = \int_t^\infty \frac{\exp(-u)}{u} du$ e o parâmetro r representa probabilidade de ocorrer uma manutenção preventiva antes de uma falha crítica ($r = P(Z < X)$).

Entretanto, a pdf a partir da segunda falha (ou manutenção) se torna condicionada à qualidade da manutenção realizada. Dessa maneira, de acordo com a definição de probabilidade condicionada apresentada em Yañez, Joglar *et al.* (2002), a pdf condicional é apresentada da seguinte forma:

$$f((y_n, j_n) | w_{n-1}) = \frac{\partial}{\partial y_n} \left(1 - \frac{R(y_n, j_n)}{R(w_{n-1})} \right) = \frac{1}{R(w_{n-1})} \left(-\frac{\partial}{\partial y_n} R(y_n, j_n) \right) = \frac{f(y_n, j_n)}{R(w_{n-1})} \tag{Equação 5}$$

onde $w_{n-1} = q \sum_{i=1}^{n-1} y_i$ representa a idade virtual do sistema em questão. Note-se que a pdf condicional depende da pdf no tempo atual e da função de confiabilidade no (n-1) –ésimo tempo de falha (vale ressaltar que as pdf's estudadas para esse modelo satisfazem as propriedades de uma pdf; esse processo de verificação foi realizado via aproximação de integrais Monte Carlo devido à complexidade das funções envolvidas). Tendo em vista que essas funções foram apresentadas anteriormente, a equação acima fornece:

$$f((y_n, j_n) | w_{n-1}) = \frac{(1-r)h(y_n) \exp(-H(y_n)) + rh(y_n) Ie(H(y_n))}{\exp(-H(w_{n-1})) - rH(w_{n-1}) Ie(H(w_{n-1}))} \tag{Equação 6}$$

A apresentação das funções de interesse aqui tem como objetivo demonstrar como se dá a influência do PRG sobre o modelo IPRA. Como foco principal do presente trabalho, a Seção seguinte busca desenvolver um teste de hipóteses e sua estatística para verificar se o modelo proposto é aplicável ao banco de dados desejado.

3.2. Teste para Verificação de Aplicabilidade do Modelo Proposto (IPRA + PRG)

Para o desenvolvimento de um teste de hipóteses capaz de verificar se o modelo é aplicável ou não ao banco de dados em estudo, considere como ponto inicial a discussão presente em Langseth e Lindqvist (2005). Tal discussão é em parte recorrente do caso onde manutenções são perfeitas.

Considerando o caso onde se tem manutenções imperfeitas, a estatística do teste é diferenciada pelo tratamento de manutenções ser feito por PRG nesse trabalho. Nesse

trabalho, a estatística é desenvolvida considerando que as manutenções são modeladas via PRG.

Inicialmente, as hipóteses a serem testadas são:

H_0 : O modelo IPRA+PRG é aplicável;

H_1 : O modelo IPRA+PRG não é aplicável

Os cálculos envolvidos para se estimar $\phi(t)$ fazem uso dos conceitos do PRG considerando a estrutura teórica de $\phi(t)$ apresentada em Cooke (1996b) adicionando um condicionamento do tempo à idade virtual do sistema da seguinte forma:

$$\hat{\phi}^*(t) = \frac{P(Z < X, Z > t | Z > t_{n-1})}{P(Z < X, Z > t | Z > t_{n-1}) + P(Z > X, X > t | Z > t_{n-1})} \tag{Equação 7}$$

onde $t_{n-1} = q \sum_{i=0}^{n-1} y_i$ como já definido na Seção anterior.

Usufruindo da definição de probabilidade condicionada, podem-se obter as seguintes expressões para as probabilidades acima:

$$R_Z^*(t | t_{n-1}) = P(Z < X, Z > t | Z > t_{n-1}) = \frac{P(Z < X, Z > t, Z > t_{n-1})}{P(Z > t_{n-1})} = \frac{P(Z < X, Z > t)}{P(Z > t_{n-1})} = \frac{R_Z^*(t)}{R_Z(t_{n-1})}$$

$$R_X^*(t | t_{n-1}) = P(X < Z, X > t | X > t_{n-1}) = \frac{P(X < Z, X > t, X > t_{n-1})}{P(X > t_{n-1})} = \frac{P(X < Z, X > t)}{P(X > t_{n-1})} = \frac{R_X^*(t)}{R_X(t_{n-1})}$$

O desenvolvimento acima ajuda a definir $\phi^*(t)$ como

$$\phi^*(t) = \frac{\frac{R_Z^*(t)}{R_Z(t_{n-1})}}{\frac{R_X^*(t)}{R_X(t_{n-1})} + \frac{R_Z^*(t)}{R_Z(t_{n-1})}} \tag{Equação 8}$$

Conhecendo a forma funcional das funções presentes na Equação 8 é possível realizar a estimativa de $\phi^*(t)$. As funções $R_Z^*(t)$ e $R_X^*(t)$ podem ser estimadas dos dados como os estimadores $\{\#x > t\}$ e $\{\#z > t\}$ que representam o número de ocorrências de falhas e manutenções preventivas após t respectivamente. No caso das funções $R_Z(t_{n-1})$ e $R_X(t_{n-1})$, faz-se o uso dos limites de Peterson apresentados por Peterson (1975). Ou seja,

$$R_X^*(t) + R_Z^*(t) \leq R_X(t) \leq R_X^*(t) + (1-r) \tag{Equação 9}$$

$$R_X^*(t) + R_Z^*(t) \leq R_Z(t) \leq R_Z^*(t) + r \tag{Equação 10}$$

Para a estimativa não-paramétrica, $\phi^*(t)$ pode ser estimado pelos estimadores paramétricos de forma $\{\#x > t\}$, $\{\#z > t\}$, $\{\#U > t\}$ e $\{\#W > t\}$, resultando em:

$$\hat{\phi}^*(t) = \frac{\frac{\{\#z > t\}}{\{\#W > t_{n-1}\}}}{\frac{\{\#x > t\}}{\{\#U > t_{n-1}\}} + \frac{\{\#z > t\}}{\{\#W > t_{n-1}\}}} \tag{Equação 11}$$

onde U e W são valores estimados da Equação 9 e da Equação 10, respectivamente. Com isso, é possível realizar a estimativa do valor da estatística do teste a qual é apresentada na próxima Seção junto com o resultado do teste de hipóteses.

4. Apresentação dos Resultados

4.1 Caso de Aplicação

Os dados estudados nesse trabalho se referem um sistema de compressão de uma instalação offshore. Tais dados estão presentes em Langseth e Lindqvist (2005) tal como uma breve descrição de suas características.

Os dados são apresentados no Anexo I onde se tem 3 colunas onde a primeira representa o tempo entre ocorrências, a segunda o mecanismo da falha e a terceira a severidade da falha – crítica ou degradada. A depender da severidade, um tipo de risco é identificado. Quando a severidade da falha é de natureza crítica, o risco correspondente é uma falha crítica enquanto que a severidade de natureza degradada tem como risco correspondente uma manutenção preventiva.

4.2 Apresentação dos Resultados

Para realizar os cálculos referentes à estatística de teste, métodos de integração numérica foram usados devido à complexidade de algumas funções envolvidas.

De acordo com os dados contidos no Anexo I e a partir de um teste de aderência verificando que os dados de falha seguem uma distribuição Weibull com parâmetros $\hat{\alpha} = 279,3201$ e $\hat{\beta} = 0,5731$ além do parâmetro de rejuvenescimento $\hat{q} = 0,0096$ – todos estimados a partir dos dados - a estatística do teste é calculada de acordo com o algoritmo apresentado no Anexo II. O software utilizado é o R 2.9.2.

A estatística do teste é calculada através de resoluções computacionais para a integral apresentada a seguir:

$$\Delta = \int_0^{\infty} |v(u; \hat{r}) - v(u; \hat{r})| \exp(-u) du \tag{Equação 12}$$

O resultado da estatística calculado da amostra é de $\Delta = 0,1259$. A distribuição não-paramétrica da estatística, diga-se $\hat{f}^{(B)}(\delta)$, é utilizada para se realizar inferências formais considerando o modelo. A Figura 3 apresenta $\hat{f}^{(B)}(\delta)$ com um $B = 200$. A distribuição de bootstrap fornece que $P^{(B)}(\Delta > 0,1259 | H_0) = 0,455$; sendo assim, a hipótese nula não é rejeitada: o modelo IPRA + PRG define uma classe apropriada de modelos para representar esse banco de dados (podendo-se considerar um nível de significância de até 45,5%). Em uso de um modelo híbrido, destaca-se o modelo proposto por Langseth e Lindqvist (2005) o qual é testado ao mesmo banco de dados apresentado aqui e apresenta um p-value de 25%. As diferenças entre os modelos estão no uso de diferentes modelos para a análise da qualidade das manutenções (IPRA + PRG – proposto – versus IPRA + BP – existente) que por consequência afeta na maneira de se analisar a estatística do teste por envolver funções diferentes.

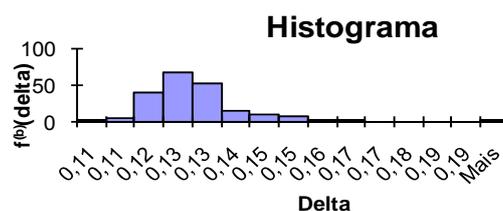


Figura 3 – Densidade aproximada para a estatística do teste via bootstrap.

A partir dos resultados obtidos, o alto *p-value* apresentado demonstra a adequação do modelo proposto ao banco de dados estudado. Ou seja, os dados referentes a tempos de eventos do equipamento offshore podem ser analisados pelo modelo proposto tornando possível análises envolvendo métricas de confiabilidade e a qualidade das manutenções realizadas. Tais métricas de confiabilidade e qualidade são estudadas através das funções estudadas e ainda estão em desenvolvimento tanto algébrico como computacional, sendo assunto para trabalhos futuros.

5. Conclusões

Esse trabalho mostrou a importância do uso de técnicas para análise de confiabilidade em equipamentos/sistemas com uso industrial. Riscos Competitivos são utilizados para realizar tais análises já que são capazes de analisar tempos de interesse e seus causadores, relacionando-os. É realizada então a modelagem da relação existente entre falhas críticas e manutenções preventivas a partir de um modelo conhecido como IPRA considerando a existência de dependência entre essas duas variáveis.

Além disso, o presente trabalho apresentou a importância da modelagem da natureza de manutenções realizadas, característica ausente na análise de RCs. Processos estocásticos pontuais são utilizados para tal modelagem e um modelo conhecido como Processos de Renovação Generalizados é utilizado na relação estudada aqui.

O PRG mostra-se capaz de analisar a natureza de manutenções atribuindo diferentes classificações de acordo com a condição que o equipamento/sistema retorne após a manutenção. Isso é feito através de um parâmetro conhecido como fator de rejuvenescimento onde o mesmo torna possível o cálculo da idade virtual do equipamento considerada como a idade do equipamento influenciada pelas manutenções.

Entretanto, PRG não trata a relação entre os eventos e seus causadores. O uso de PRG juntamente com IPRA mostra-se capaz de realizar os dois tipos de análise descritos anteriormente com mais riqueza nas informações obtidas. As informações, tanto para análise de confiabilidade via RCs como para a natureza das manutenções via PRG, são extraídos de BDCs.

Em particular, esse trabalho tratou de dados referentes a um equipamento *offshore* contendo tempos de paradas e seus causadores – falhas críticas ou manutenções preventivas. Antes de extrair qualquer tipo de informação dos dados a partir do modelo proposto, é preciso saber se o modelo é adequado ao banco de dados utilizado. Para isso, um teste de hipótese foi desenvolvido para verificar a aplicabilidade do modelo IPRA + PRG aos dados.

Durante o desenvolvimento do teste de hipóteses, a construção de uma estatística de teste é necessária, tendo esta que ser capaz de representar alguma informação capaz de auxiliar na regra de decisão. Usando estimadores paramétricos e não paramétricos para o cálculo dessa estatística, a regra de decisão é baseada no uso de bootstrap paramétrico (com geração de uma amostra de tamanho 200) para a identificação de uma pdf aproximada para a estatística.

Após a aplicação do teste desenvolvido, o valor da estatística amostrado dos dados indicou fortes evidências de não rejeição da hipótese nula, ou seja, o modelo IPRA + GRP mostra adequado para modelagem dos dados em questão. Ainda, é importante destacar a margem de rejeição capaz de ser determinada devido a um *p-value* obtido de 0,545. Em outras palavras, mesmo a margem para se rejeitar a aplicabilidade do modelo seja grande, rejeita-se a hipótese nula apenas quando essa margem é maior que 54,5%.

Apesar do desenvolvimento de um teste de hipóteses capaz de verificar a aplicabilidade do modelo proposto, tal modelo apresenta estimadores como na Equação 8 que não tiveram suas propriedades analisadas (como consistência e suficiência). Ainda, o tamanho da amostra gerada por bootstrap paramétrico ($B = 200$) pode ser mais bem explorado aumentando o mesmo para resultados mais precisos.

Espera-se em trabalhos futuros tratar os estimadores e suas propriedades além de se trabalhar com uma amostra de bootstrap maior. O estudo da função de verossimilhança tal como sua estimativa de acordo com os resultados obtidos, além das funções de distribuição e confiabilidade e também são de interesse, já que o interesse principal no desenvolvimento do modelo híbrido proposto recai sobre a análise de confiabilidade.

6. Referências Bibliográficas

- Bedford, T. e M. R. Cooke. Reliability Databases in Perspective. IEEE Transactions on Reliability, v.51, n.3, 294-310. 2002.
- Brown, M. e F. Proschan. Imperfect Repair. Journal of Applied Probability, v.20, n.851-859. 1983.
- Cooke, M. R. The total time on test statistic and age-dependent censoring. Statistics and Probability Letters, v.18, n.307-312. 1993.
- _____. The design of reliability data bases, part I: review of standard design concepts. Reliability Engineering and System Safety, v.51, n.137-146. 1996a.
- _____. The design of reliability data bases, part II: competing risks and data compression. Reliability Engineering and System Safety, v.51, n.209-223. 1996b.
- Crowder, M. J. Classical Competing Risks. London: Chapman and Hall/CRC Press. 2001
- Doyen, L. e O. Gaudoin. Imperfect Maintenance in a Generalized Competing Risk Framework. Journal of Applied Probability, v.43, n.825-839. 2006.
- Fragola, J. R. Reliability and risk analysis data base development: an historical perspective. Reliability Engineering and System Safety, v.51, n.125-136. 1996.
- Guo, R., H. Ascher, *et al.* Toward Practical and Synthetical Modelling of Repairable Systems. Economic Quality Control, v.16, n.2, 147-182. 2001.
- Kijima, M. e N. Sumita. A useful generalization of renewal theory: counting process governed by non-negative Markovian increments. Journal of Applied Probability, v.23, n.71-88. 1986.
- _____. A useful generalization of renewal theory: counting processes governed by non-negative Markovian increments. Journal of Applied Probability, v.23, n.1, 71-88. 1986.
- Krivtsov, V. A Monte Carlo approach to modelling and estimation of the generalized renewal process in repairable system reliability analysis., University of Maryland, Maryland, 2000.
- Langseth, H. e B. H. Lindqvist. A maintenance model for components exposed to several failure mechanisms and imperfect repair: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., v.7. 2003 (Series on Quality)
- _____. Competing risks for repairable systems: A data study. Journal of Statistical Planning and Inference, v.136, n.5, 1687-1700. 2005.
- Lindqvist, B. H. On Statistical Modelling and Analysis of Repairable Systems. Statistical Science, v.21, n.532-551. 2006.
- Lindqvist, B. H., B. Stove, *et al.* Modelling of dependence between critical failure and preventive maintenance: The repair alert model. Journal of Statistical Planning and Inference, v.136, n.5, 1701-1717. 2005.
- Mood, A. M., F. A. Graybill, *et al.* Introduction to the theory of Statistics. New York: McGraw-Hill. 1974
- Moura, M. C., E. L. Droguett, *et al.* Avaliação Bayesiana da Eficácia da Manutenção via Processo de Renovação Generalizado. Pesquisa Operacional, v.27, n.3, 569-589. 2007.
- Peterson, A. V. Bounds for a joint distribution function with fixed sub-distribution functions: Application to competing risks. Proceedings of National Academy of Sciences, v.73, n.11-13. 1975.
- Wasserman, L. All of Nonparametric Statistics. New York: Springer. 2006
- Yañez, M., F. Joglar, *et al.* Generalized renewal process for analysis of repairable systems with limited failure experience. Reliability Engineering and System Safety, v.77, n.167-180. 2002.