

## UMA NOVA METODOLOGIA PARA SINTESE DE FILTROS DE KALMAN

**Tiago Façanha**

UFC

Departamento de Pós-graduação de Engenharia de Teleinformática

[tiagofacanha@gmail.com](mailto:tiagofacanha@gmail.com)

**José Tarcísio Costa Filho**

UFC

Departamento de Pós-graduação de Engenharia de Teleinformática

[tarcisio@deti.ufc.br](mailto:tarcisio@deti.ufc.br)

**André Luiz Carneiro**

IFCE

Departamento de Pós-graduação de Engenharia de Teleinformática

[andreluiz@cefetce.br](mailto:andreluiz@cefetce.br)

### RESUMO

O Filtro de Kalman é vastamente estudado e aplicado na solução de vários problemas, sendo o seu desenvolvimento matemático baseado em propriedades de Estimação e nas Equações Diferenciais de Riccati. Este artigo apresenta uma nova solução para problema de filtragem, independente das equações de Riccati.

**PALAVRAS CHAVES.** Filtro de Kalman. Equações Diferenciais de Riccati. Estimação. Filtros (Controle, sistemas de navegação, etc).

### ABSTRACT

The Kalman filter is widely studied and applied in solving various problems, its mathematical development based on properties of estimation and Riccati Equations. This paper presents a new solution to the filtering problem, regardless of Riccati Equations.

## 1. Introdução

A Filtragem de Kalman vem sendo aplicada em áreas tão diversas quanto: aeroespacial, navegação marítima, instrumentação de usinas nucleares, modelagem demográfica, astronomia, meteorologia, economia e indústria em geral. Este filtro é considerado por muitos um grande avanço da teoria de estimação do século vinte. Muitas realizações desde sua introdução talvez não fossem possíveis sem ele.

O filtro de Kalman é um estimador para o problema gaussiano linear quadrático. Tal problema consiste na estimação dos estados instantâneos de um sistema linear dinâmico perturbado por ruído gaussiano branco por meio de medições linearmente relacionadas aos estados e também contaminadas por ruído branco. Quando as características da perturbação e do ruído são condizentes com as suposições usadas no desenvolvimento do filtro de Kalman, ou seja, são variáveis aleatórias brancas e suas densidades espectrais são precisamente conhecidas, o filtro de Kalman consiste no processo ótimo de estimação de estados no sentido dos mínimos quadrados e da mínima variância. Entretanto, é difícil ter informações sobre as propriedades estocásticas das perturbações a priori. Neste caso, a estimação de estados baseada no critério dos mínimos quadrados pode sofrer uma degradação por causa das incertezas nas estatísticas das perturbações (**Takaba, K.**).

O Filtro de Kalman discreto é um algoritmo linear, recursivo e de variância mínima para a estimação dos estados desconhecidos de um sistema dinâmico a partir de medições discretas, corrompidas por ruído.

Este artigo propõe uma metodologia alternativa para solução do problema de filtragem, independente das equações de Riccati, e estabelecemos uma metodologia que pode ser estendida a tópicos mais avançados, viabilizando aplicações em tempo real e fornecendo estratégias de solução relevantes para sistemas dinâmicos sujeitos às incertezas no escopo das teorias de filtragem  $H_2$  (Filtro de Kalman).

Apresentaremos um exemplo didático para ilustrar as principais vantagens do novo método, que além de uma consistência algébrica subjacente possibilitar-nos a obter uma família de resultados subótimos para filtros, em alguns casos, até melhores que as obtidas via Riccati, com fortes propriedades de estabilidade numérica e matrizes bem condicionadas.

## 2. Formulação do Problema de Filtros de Kalman

Considere a descrição do sistema linear e variante no tempo exposto nas equações (1) e (2).

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k w_k \quad (1)$$

$$y_k = C_k x_k + D_k v_k \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Assumi-se que o ruído de processo,  $w_k \in \mathbb{R}^n$ , e o ruído de medida,  $v_k \in \mathbb{R}^m$ , são variáveis aleatórias independentes, brancas, de média zero e com distribuição de probabilidade gaussiana. Suas matrizes de correlação são assumidas conhecidas e são representadas por  $Q_w$  e  $R$ , respectivamente. O vetor de estados a ser estimado é  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , enquanto que  $y_k \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de medidas. É importante lembrar que o ruído de processo é usado para descrever tanto os erros ocorridos no processo quanto as incertezas no modelo de estados. As matrizes  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $C_k$  e  $D_k$  possuem dimensões adequadas e a estimativa inicial  $x_0$  é  $\bar{x}_0$ , sem perda de

generalidade.

Como já foi comentado, o filtro de Kalman é o processo ótimo de minimização do erro quadrático de estimação de estados, Já que o erro de estimação é causado pelas perturbações, construídas pelas incertezas na estimativa inicial do vetor de estados e pelos ruídos de processo e de medida, o problema consiste em determinar a estimativa  $\hat{x}_k$  do vetor de estados através do seguinte processo de otimização (Sayed, A. H.):

$$\min_{x_0, w, v} J_{H_2}(x_0, w, v) \triangleq \|x_0 - \bar{x}_0\|_{\Pi}^2 + \sum_{k=0}^K (\|w_k\|^2 + \|v_k\|^2) \quad (3)$$

Sujeito as equações (1) e (2), e sendo  $\Pi$  uma matriz definida positiva que representa a incerteza do estado inicial. O filtro de Kalman estima o vetor de estados de um processo através de um controle com realimentação de estados. Por isso, suas equações são recursivas, o que torna o processo de estimação de estados menos dispendioso em termos de esforço computacional.

Pelo fato de o filtro de Kalman ter sido vastamente estudado e aplicado em diversos problemas, o desenvolvimento matemático do processo de otimização anunciado na equação (3) é omitido. Segue abaixo, na tabela 1, um resumo das equações do filtro de Kalman utilizando as equações de Riccati.

Equações do Filtro de Kalman Discreto	
Preditor (Estimativa a priori)	$\hat{x}_{k/k-1} = A_{k-1} \hat{x}_{k-1/k-1}$
Recursão de Riccati	$P_{k/k-1} = A_{k-1} P_{k-1/k-1} A_{k-1}^T + B_{k-1} Q_w B_{k-1}^T$
Cálculo da estimativa (atualização do estado)	$\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + K_k (y_k - C_k \hat{x}_{k/k-1})$
Cálculo da covariância (atualização da covariância)	$P_{k/k} = (I - K_k C_k) P_{k/k-1}$
Ganho de Kalman	$K_k = P_{k/k-1} C_k^T (C_k P_{k/k-1} C_k^T + R)^{-1}$

Tabela 1 – Resumo das Equações do Filtro de Kalman

### 3. Metodologia Proposta

Os problemas matemáticos associados à solução do RLQ (Regulador Linear Quadrático) e filtro de Kalman são duais. Esta dualidade, bastante conhecida na literatura, é utilizada neste trabalho para deduzir as equações do filtro de Kalman a partir da síntese do controlador RLQ via uma metodologia de otimização convexa. Esta nova metodologia é uma alternativa a solução convencional baseada nas equações matriciais de Riccati, ressaltando com melhores propriedades de estabilidade numérica e de desempenho computacional. Neste sentido nas próximas seções vamos considerar o problema de controle ótimo.

#### 3.1 Condições de Otimalidade

Considerando o sistema dinâmico discreto invariante no tempo descrito abaixo, nas equações (4) e (5):

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k w_k \\ x_0 &= \xi \end{aligned} \tag{4}$$

Onde  $x_k \in \mathbb{R}^n$  e  $w_k \in \mathbb{R}^m$  são respectivamente a variável de estado e o ruído de processo,  $A_k$  e  $B_k$  são matrizes constantes com dimensões apropriadas. Defini-se a função custo:

$$J(x_k, w_k, k) = \frac{1}{2} x_N^T S x_N + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [x_k^T Q x_k + w_k^T R w_k] \tag{5}$$

sujeito a restrição descrita em (4).

onde:  $Q_{n \times n}$ ,  $R_{m \times m}$ ,  $S_{n \times n}$  são matrizes constantes de ponderação e consideraremos, sem perda de generalidade, que  $S = Q = Q^T \geq 0$  e  $R = R^T > 0$ .

As equações (4) e (5) podem ser reescritas como um problema de minimização quadrática com restrições lineares, para  $k \in K = \{0, 1, \dots, N-1\}$ :

$$\begin{aligned} \min_{w_k} & J(x_k, w_k, k) \\ \text{s.a} & x_{k+1} = A_k x_k + B_k w_k \\ & x_0 = \xi \end{aligned} \tag{6}$$

Considerando os multiplicadores Lagrange  $\lambda_{k+1}$  associados ao sistema (6) de modo que  $\lambda_0 = 0$  e  $\lambda_{k+1} = 0$  para  $k+1 \geq N$  e definimos uma função custo aumentada do sistema como:

$$J_a(x_k, w_k, x_{k+1}, \lambda_{k+1}, k) = \frac{1}{2} x_N^T Q x_N + \sum_{k=0}^{N-1} [l_k(x_k, w_k, x_{k+1}, \lambda_{k+1})] \tag{7}$$

Onde  $l_k(x_k, w_k, x_{k+1}, \lambda_{k+1})$  é o lagrangeano definido por:

$$l_k(x_k, w_k, x_{k+1}, \lambda_{k+1}) = \frac{1}{2} [x_k^T Q x_k + w_k^T R w_k] + \lambda_{k+1}^T [A_k x_k + B_k w_k - x_{k+1}] \tag{8}$$

Podemos definir o Hamiltoniano do sistema por:

$$H_k(x_k, w_k, x_{k+1}, \lambda_{k+1}) = \frac{1}{2} [x_k^T Q x_k + w_k^T R w_k] + \lambda_{k+1}^T [A_k x_k + B_k w_k] \tag{9}$$

Relacionando as equações (8) e (9), temos:

$$l_k(x_k, w_k, x_{k+1}, \lambda_{k+1}) = H_k(x_k, w_k, x_{k+1}, \lambda_{k+1}) - \lambda_{k+1}^T x_{k+1} \tag{10}$$

Verificando as condições necessárias de otimalidade, temos:

**Condição de estado:**

$$\frac{\partial H_k}{\partial \lambda_{k+1}} = x_{k+1}^* \Rightarrow x_{k+1}^* = A_k x_k^* + B_k w_k^* \tag{11}$$

$$\lambda_N^* = Q x_N \tag{12}$$

**Condição Hamiltoniano:**

$$\frac{\partial H_k}{\partial w_k} = 0 \Rightarrow w_k^* = -R^{-1} B_k^T \lambda_{k+1}^*, \quad k = 0, \dots, n-1 \tag{13}$$

**Condição Co-Estado:**

$$\frac{\partial H_k}{\partial x_k} = \lambda_k^* \Rightarrow \lambda_k^* = Qx_k + A^T \lambda_{k+1}, \quad k=1, \dots, n-1 \quad (14)$$

Visto que o problema é convexo, estas condições são necessárias e suficientes e, portanto, devido a inexistência de procedimentos de recorrência, os cálculos de  $w_k$  e  $x_k$  em (13) e (14), depende somente de  $\lambda_{k+1}$ , assim:

$$w_k^* = -R^{-1} B_k^T \lambda_{k+1}^* \quad (15)$$

$$x_k = Q^{-1} (\lambda_k^* - A^T \lambda_{k+1}^*) \quad (16)$$

$$x_N = Q^{-1} \lambda_N^* \quad (17)$$

### 3.2 Formulação Dual

Em problemas de filtragem ótima discreta envolve uma solução iterativa de uma seqüência de sistemas resultantes da discretização de um processo contínuo, representado por equações diferenciais parciais que descrevem seu comportamento dinâmico complexo. De modo geral, em intervalos de tempo menores tornam mais precisa a aproximação discreta, porém aumentam o número de variáveis de estado. Para obtenção de soluções eficientes, há a necessidade de explorar estruturas matriciais especiais.

Neste artigo entenderemos o conceito da teoria de dualidade para estabelecer relações entre estruturas algébricas resultantes de transformações duais de um conjunto de equações dinâmicas complexas em um conjunto de equações estáticas mais simples. Assim, consideraremos o seguinte problema dual:

$$\begin{aligned} \min_{\lambda_{k+1}} L(\lambda_{k+1}) \\ \text{s.a. } \nabla_{x,w} l(x_k, w_k, \lambda_{k+1}, k) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Podemos reescrever este problema dual:

$$\begin{aligned} \max_{\lambda_{k+1}} \min_{w_k, x_k} l(x_k, w_k, \lambda_{k+1}, k) \\ \text{s.a. } \lambda_{k+1} \in \mathbb{R}^n \\ x_0 = \xi \\ x_N = Q^{-1} \lambda_N^* \\ w_k^* = -R^{-1} B_k^T \lambda_{k+1}^* \\ x_k = Q^{-1} (\lambda_k^* - A^T \lambda_{k+1}^*) \end{aligned} \quad (19)$$

Onde:  $L(\lambda_{k+1}) = \min_{w_k, x_k} l(x_k, w_k, \lambda_{k+1}, k)$ .

Para reduzirmos os custos computacionais e simplificarmos o processo, propomos, dada a concavidade estrita da função  $\nabla L(\lambda_{k+1})$ , uma reformulação do problema dual dinâmico de modo a obtermos um forma quadrática estática definida no teorema a seguir.

### 3.3 Forma Quadrática Estática

**Teorema 1** – Dada a concavidade da função dual  $\nabla L(\lambda_{k+1})$  e as restrições dadas por (19), o problema dual dinâmico pode ser resolvido através da seguinte forma quadrática estática:

$$\begin{aligned} \min_{\bar{\lambda}} M(\bar{\lambda}) &= \frac{1}{2} \bar{\lambda}^T \tilde{H} \bar{\lambda} + \bar{\lambda}^T \tilde{b} + \tilde{c} \\ \text{s.a. } \bar{\lambda} &\in \mathbb{R}^{nN} \end{aligned} \quad (20)$$

Onde:  $H_{nN \times nN}$  é uma matriz simétrica bloco tridiagonal, definida positiva e formada por  $N^2$  blocos de dimensões  $n \times n$ ,  $b$  é um vetor de dimensões  $nN \times 1$ ,  $c \in \mathbb{R}$  e  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^{nN}$  dado por:

$$\bar{\lambda} = [\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_N]^T \in \mathbb{R}^{nN} \quad (21)$$

**Prova:** Para obter a forma quadrática estática da equação (20), iniciamos com a substituição das restrições dadas na equação (19) na equação (7) em seguida, expandimos os termos do somatório para os valores de  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ , conforme podemos observar abaixo:

$$\begin{aligned} l(\bar{\lambda}) &= -\frac{1}{2} \lambda_N^T Q^{-1} \lambda_N + \frac{1}{2} x_0^T Q x_0 - \frac{1}{2} \lambda_1^T B_0 R^{-1} B_0^T \lambda_1 + \lambda_1^T A_0 x_0 \\ &+ \sum_{k=1}^{N-1} \left\{ -\frac{1}{2} \lambda_k^T Q^{-1} \lambda_k + \frac{1}{2} \lambda_{k+1}^T A Q^{-1} \lambda_k + \lambda_k^T Q^{-1} A^T \lambda_{k+1} \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \lambda_{k+1}^T (B_k R^{-1} B_k^T + A_k Q^{-1} A_k^T) \lambda_{k+1} \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

Agrupando os termos segundo os vetores adjuntos, obtemos a matriz  $H$ :

$$H = \begin{bmatrix} V_1 & W & 0 & \dots & 0 \\ W^T & V_2 & W & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & W^T & V_{N-1} \end{bmatrix}$$

Ao calcular os valores de cada termo da matriz, temos:

$$V_1 = -BR^{-1}B^T - Q^{-1}$$

$$V_2 = V_1 - AQ^{-1}A^T$$

$$V_3 = V_2 - Q^{-1}$$

$$W = Q^{-1}A^T$$

$$c = \frac{1}{2} x_0^T Q x_0$$

$$b = [Ax_0 \quad 0_{nx1} \quad \dots \quad 0_{nx1}]^T$$

Portanto, a forma quadrática estática está definida:

$$\max_{\bar{\lambda}} L(\bar{\lambda}) = \frac{1}{2} \bar{\lambda}^T H \bar{\lambda} + \bar{\lambda}^T b + c$$

Visto que maximizar  $L(\bar{\lambda})$  é equivalente a minimizar  $-L(\bar{\lambda})$  na mesma região do espaço [7]. Considerando  $M(\bar{\lambda}) = -L(\bar{\lambda})$ , teremos:

$$\min_{\bar{\lambda}} M(\bar{\lambda}) = \frac{1}{2} \bar{\lambda}^T \tilde{H} \bar{\lambda} + \bar{\lambda}^T \tilde{b} + \tilde{c}$$

$$s.a \bar{\lambda} \in \mathbb{R}^{nN}$$

Onde:  $\tilde{H} = -H$ ,  $\tilde{b} = -b$  e  $\tilde{c} = -c$ .

**Observação 1:** A matriz  $\tilde{H}$  é definida positiva. Pois, por definição, temos que  $Q = Q^T \geq 0$  e  $R = R^T > 0$ , assim, como a soma de uma matriz definida positiva ( $R$ ) com uma semi-definida positiva ( $Q$ ) é uma matriz definida positiva, ao considerarmos  $\bar{V}_1 = -V_1$ , temos então que  $V_1 > 0$ . Utilizando a mesma argumentação para  $V_2 > 0$  e  $V_3 > 0$ .

**Teorema 2** – Ao considerarmos um problema de filtragem, existe uma função matricial  $P_N$ , tal que:

$$P_N = A^T \bar{H}_{11} A + Q \tag{23}$$

Para o menor valor do índice de desempenho dado por:

$$J^*(x_k, w_k, k) = \min_{w_k} J(x_k, w_k, k) = \frac{1}{2} x_0^T P_N x_0 \tag{24}$$

**Prova:** Para provar o teorema 2, necessitamos do seguinte valor ótimo de  $\bar{\lambda}^*$  dado pela equação (20):

$$\nabla_{\lambda} M(\bar{\lambda}) = \tilde{H} \bar{\lambda}^* - b = 0$$

Organizando os termos:

$$\bar{\lambda}^* = \tilde{H}^{-1} b \tag{25}$$

Na formulação matricial da equação (3.20), temos:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{H}_{11} & \bar{H}_{12} & \dots & \bar{H}_{1N} \\ \bar{H}_{21} & \bar{H}_{22} & \dots & \bar{H}_{2N} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \bar{H}_{N1} & \dots & \dots & \bar{H}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ax_0 \\ 0_{nx1} \\ \vdots \\ 0_{nx1} \end{bmatrix}$$

Ou

$$\lambda_1 = \bar{H}_{11} Ax_0, \dots, \lambda_n = \bar{H}_{N1} Ax_0 \tag{26}$$

Considerando, sem perda de generalidade,  $N = 2$ , temos:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{H}_{11} & \bar{H}_{12} \\ \bar{H}_{21} & \bar{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ax_0 \\ 0_{nx1} \end{bmatrix}$$

Portanto, temos a seguinte identidade:

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_1 & W \\ W^T & \bar{V}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{H}_{11} & \bar{H}_{12} \\ \bar{H}_{21} & \bar{H}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & I_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Assim, a equação (5) pode ser reescrita para  $N = 2$ ,  $k = 0, 1, 2$  obteremos:

$$J(x_k, w_k, k) = \frac{1}{2} x_0^T Q x_0 + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ w_o \\ w_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ w_o \\ w_1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Substituindo as restrições (19) na equação (28), temos:

$$J(x_k, w_k, k) = \frac{1}{2} x_0^T Q x_0 + \begin{bmatrix} Q^{-1}(\lambda_1 - A^T \lambda_2^T) \\ Q^{-1} \lambda_2^T \\ -R^{-1} B_0^T \lambda_1 \\ -R^{-1} B_1^T \lambda_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{-1}(\lambda_1 - A^T \lambda_2^T) \\ Q^{-1} \lambda_2^T \\ -R^{-1} B_0^T \lambda_1 \\ -R^{-1} B_1^T \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Definindo alguns termos:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} Q^{-1}(\lambda_1 - A^T \lambda_2^T) \\ Q^{-1} \lambda_2^T \\ -R^{-1} B_0^T \lambda_1 \\ -R^{-1} B_1^T \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Phi = \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix}$$

A equação:

$$J(x_k, w_k, k) = \frac{1}{2} x_0^T Q x_0 + \frac{1}{2} \Gamma^T \Phi \Gamma \quad (29)$$

Então, substituindo  $\lambda_1 = \bar{H}_{11} A x_0$  e  $\lambda_2 = \bar{H}_{21} A x_0$  na equação (29), teremos:

$$J^*(x_k, w_k, k) = \frac{1}{2} x_0^T Q x_0 + \frac{1}{2} x_0^T A^T \bar{H}_{11} (\bar{V}_1 \bar{H}_{11} - W \bar{H}_{21}) A x_0 + \frac{1}{2} x_0^T A^T \bar{H}_{21}^T (\bar{V}_2 \bar{H}_{21} + W^T \bar{H}_{11}) A x_0 \quad (30)$$

Ao considerar a matriz identidade (27) e a equação (30), temos:

$$J^*(x_k, w_k, k) = \frac{1}{2} x_0^T Q x_0 + \frac{1}{2} x_0^T A^T \bar{H}_{11} (I_{n \times n}) A x_0 + \frac{1}{2} x_0^T A^T \bar{H}_{21}^T (0_{n \times n}) A x_0 \quad (31)$$

Organizando os termos:

$$J^*(x_k, w_k, k) = \frac{1}{2} x_0^T (A^T \bar{H}_{11} A + Q) x_0 \quad (32)$$

Assim, para  $k = 0, 1, \dots, N - 1$  e estrutura citada na equação (32) permanece inalterada. Portanto, concluímos que a partir da equação (24), a matriz  $P_N$  fornece o custo mínimo, quando está definida na forma:

$$P_N = A^T \bar{H}_{11} A + Q \tag{33}$$

Então, para obtermos a matriz de ganho  $F$  em estado de regime basta fazermos  $N \rightarrow \infty$ , considerando a seguinte identidade:

$$F_k = -R^{-1} B_k^T (A^T)^{-1} [P_N - Q] \tag{34}$$

Pode-se encontrar em (Martínez J. M.) umas das alternativas para escrevermos o ganho  $F$ .

**Teoremas 3** – Considerando o valor de  $P_N$  definido pela equação (33), então a matriz de ganho em estado de regime será dado por:

$$\begin{aligned} F_k &= -R^{-1} B_k^T \underbrace{(A^T)^{-1} [P_N - Q]}_{\bar{H}_{11} A} \\ &= -R^{-1} B_k^T \bar{H}_{11} A \end{aligned} \tag{35}$$

Neste artigo, adaptamos o algoritmo de programação não linear estática, para a estrutura especial da solução da equação algébrica de Riccati, com o objetivo de reduzir o esforço computacional do problema. O desempenho do algoritmo modificado torna-o bem adaptável para aplicações de controle ótimo e filtragem, visto que nestes casos, o desempenho computacional é considerado como pré-requisito para aplicações de técnicas em otimização *on-line* com horizonte finito.

Embora o algoritmo proposto necessite da inversa da matriz Hessiana ( $\tilde{H}$ ), conforme definido na equação (25), temos que esta matriz inversa pode ser calculada *off-line* utilizando diversos métodos numéricos tais como: fatorização de House-Holder (Filho, A. A.), rotação de Givens (Filho, A. A.), fatorização de Cholesky (Campos L. E. D.) e decomposição em valores singulares (Filho, L. A. V.).

### 3.4 Proposição para Filtragem via Otimização Online

Considerando o problema de programação não linear baseado em regiões de confiança:

$$\begin{aligned} \min_{\bar{\lambda}} M(\bar{\lambda}) &= \frac{1}{2} \bar{\lambda}^T \tilde{H} \bar{\lambda} + \bar{\lambda}^T \tilde{b} + \tilde{c} \\ \text{s.a. } \|\bar{\lambda}\| &\leq \Delta, \Delta > 0 \end{aligned} \tag{36}$$

Onde :  $\tilde{H} = -H$ ,  $\tilde{b} = -b$ ,  $\tilde{c} = -c$

Através dos experimentos realizados, verificamos que para  $N$  pequeno o erro do resíduo  $\|\nabla M(\bar{\lambda})\|$  é reduzido tornando a matriz  $\tilde{H}$  melhor condicionada. Neste sentido, é possível uma redução significativa da dimensão da matriz  $\tilde{H}$ , de  $nN$  para  $nd$ , onde  $d \ll N$ , o que possibilita diminuir seu número de condição e ratifica o fato de que podemos resolver este problema de otimização convexa (20) por intervalos ao se resolver sucessivas (Laub, A.), vezes o problema (20). Por este critério, ao considerarmos  $d = 2$  com  $\hat{\lambda}^* = [\lambda_1 \ \lambda_1]^T$  teremos então o problema (36) aproximado do problema (20), assim:

$$\left( \left[ \begin{array}{cc} BR^{-1}B^T + Q^{-1} & -Q^{-1}A^T \\ -AQ^{-1} & \underbrace{BR^{-1}B^T + Q^{-1} + AQ^{-1}A^T}_{\tilde{H}} \end{array} \right] + \mu I_{2n \times 2n} \right) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax_0 \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix} \tag{37}$$

Então, é possível conseguir dominância bloco diagonal aumentando-se o valor de  $\mu$  e, por conseguinte, boas propriedades de convergência e uma maior estabilidade numérica. É claro que a relação entre os valores de  $Q$  e  $R$  na matriz  $\hat{H}$  em (37) também pode garantir dominância estrita bloco diagonal (Farias, D. P.), ou seja:

$$\sum_{k \neq j}^2 \|\hat{H}_{kk}^{-1} \hat{H}_{kj}\| < 1$$

Onde:  $\hat{H}_{kk}$ ,  $\hat{H}_{kj}$  são submatrizes ( $n \times n$ ) de  $\hat{H}$ .

Notemos que quando  $\mu \rightarrow \infty$ , ou mais especificamente,  $\mu > \max\{0, -\sigma_1\}$ , a matriz  $(\hat{H} + \mu I)$  tende para:

$$\begin{bmatrix} BR^{-1}B^T + Q^{-1} + \mu I_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & BR^{-1}B^T + Q^{-1} + AQ^{-1}A^T + \mu I_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (38)$$

Portanto, com as perturbações causadas pelo parâmetro  $\mu$ , é possível situar os autovalores de  $\bar{H}$ , dentro de uma região de confiança:

$$\bar{H} = (\hat{H} + \mu I)^{-1} \quad (39)$$

Assim, torna-se possível reduzir a dimensão do sistema e garantir soluções estáveis e bem condicionadas. Então, obtemos de forma semelhante ao teorema 3.1, o algoritmo que viabilize a obtenção de ganhos para modelos considerando a matriz Hessiana de ordem reduzida, ( $2n \times 2n$ ).

**Proposição 1** – Ao considerarmos a matriz:

$$\Theta = A + B\hat{F} \quad (40)$$

Dada a equação (39), é possível definirmos o ganho:

$$\begin{aligned} \hat{F} &= B^+[\Theta - A] \\ &= B^+[Q^{-1}(\bar{H}_{11}A - A^T\bar{H}_{21}A) - A] \end{aligned}$$

A partir de  $\Theta = Q^{-1}(\bar{H}_{11}A - A^T\bar{H}_{21}A)$  de modo que possamos através de ajustes em  $\mu$  situar os pólos da matriz  $\Theta$  numa determinada região de confiança.

**Prova:** (Nascimento, V.)

## 4. Análise e Resultados

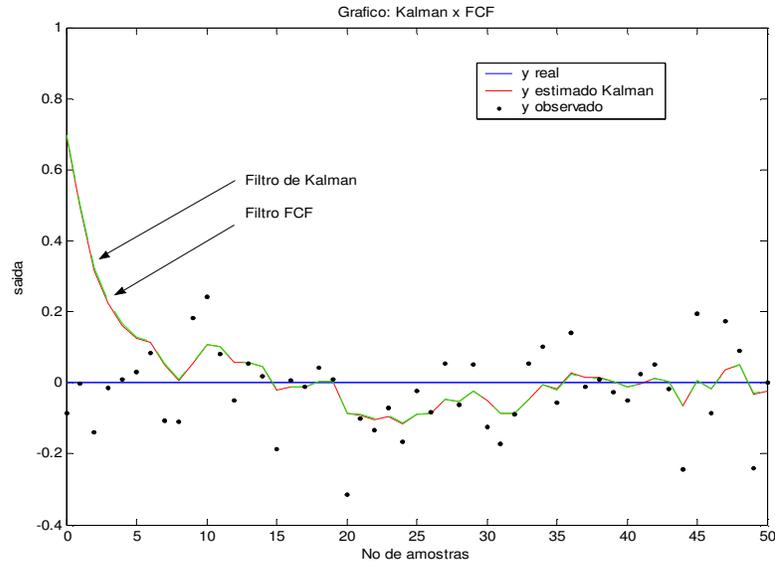
No exemplo que será considerado, analisaremos os resultados comparativos entre filtro de Kalman com abordagem tradicional e a nova metodologia

Considerando um exemplo didático, temos o seguinte sistema abaixo:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + 0.1w_k \\ y_k &= x_k + v_k \\ x_0 &= 1 \end{aligned}$$

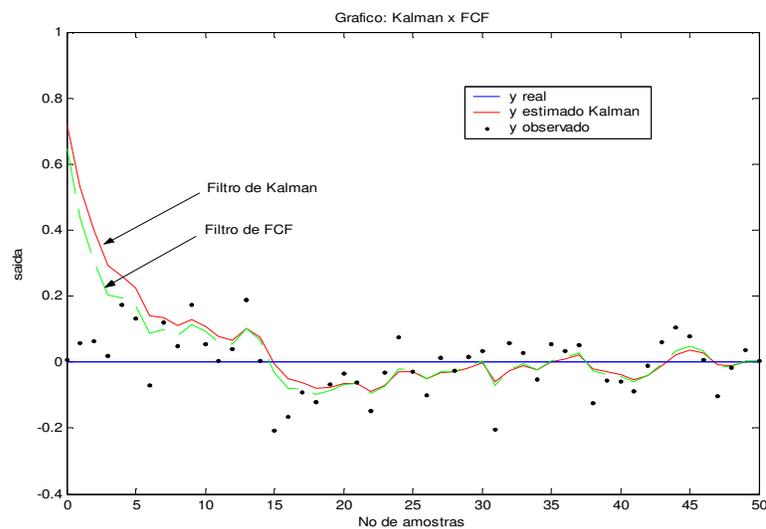
Neste caso, consideraremos a matriz  $\Pi = 1$ , com ruído  $w_k = 0$  para ver a sensibilidade do filtro  $v_k = D_k^{-1}(y_k - C_k x_k)$ .

O ruído de medição  $v_k$  é visto como ruído branco gaussiano com média zero. Na figura 1 e 2, mostraremos a simulação dos resultados para as seguintes matrizes de correlação:  $R = 0,01$  e  $Q_w = 1$ .



**Figura 1 – Erro de Estimação entre Kalman x FCF:  $\mu = 10$  e  $N_{int.} = 2$**

Na figura 1, observamos que para  $\mu = 10$  e  $N_{int.} = 2$ , temos o mesmo erro de estimação para o filtro de Kalman utilizando as Equações Matriciais de Riccati e o filtro com a nova metodologia FCF (Filtro Costa Filho). Realizou-se uma redução de condição de  $H$ , conforme o valor de  $N_{int.}$  e/ou ajustamos o valor do parâmetro  $\mu$ .



**Figura 2 – Erro de Estimação entre Kalman x FCF:  $\mu = 20$  e  $N_{int.} = 2$**

Na figura 2, observamos que para  $\mu = 20$  e  $N_{int.} = 2$ , temos uma solução com o Filtro FCF relativamente melhor do que o Filtro de Kalman convencional, onde a metodologia proposta tende mais rapidamente a seguir o sinal real. Também temos a vantagem que a nova

proposta tem uma redução computacional significativa em relação a o Filtro de Kalman baseado nas Equações de Riccati. Na tabela 2, temos uma análise do condicionamento da matriz  $H$ .

Total de iterações	Valor de $\mu$	$\begin{pmatrix} \lambda_{\max} \\ \lambda_{\min} \end{pmatrix}$	Condicionamento $H$	Ganho Kalman / FCF
$N_{\text{int.}} = 18$	$\mu = 0$	$\begin{pmatrix} 408,2343 \\ 11,8316 \end{pmatrix}$	34,5037	0,2824 / 0,2824
$N_{\text{int.}} = 2$	$\mu = 0$	$\begin{pmatrix} 272,9145 \\ 49,3077 \end{pmatrix}$	5,5349	0,1743 / 0,1743
$N_{\text{int.}} = 2$	$\mu = 10$	$\begin{pmatrix} 282,9145 \\ 59,3077 \end{pmatrix}$	4,7703	0,2782 / 0,2782
$N_{\text{int.}} = 2$	$\mu = 20$	$\begin{pmatrix} 292,9145 \\ 69,3077 \end{pmatrix}$	4,2263	0,3542 / 0,3542

Tabela 2– Análise de condicionamento de H.

## 5. Conclusão

Neste artigo, apresentamos uma nova metodologia para síntese de filtros em sistemas discretos no tempo, que possibilitam a obtenção de uma família de ganhos, com uma solução alternativa a resolução convencional via Equações Diferenciais de Riccati. A simulação ressalta as vantagens do novo método, com relação as condições de desempenho, estabilidade, e principalmente, a característica de flexibilidade no sentido de se poder obter uma família de soluções eficientes através de ajustes no parâmetro  $\mu$ .

## Referências

- Campos L. E. D.** (2008), Um Estudo sobre Fatorização de Matrizes e a Resolução de Sistemas Lineares, UNCAMP.
- Farias, D. P.** (1998), Otimização e Controle de Sistemas com Parâmetros Sujeitos a Saltos Markovianos, *Tese de Mestrado em Engenharia Elétrica*, UNCAMP.
- Filho, A. A.** (2003), Análise de Sistemas Dinâmicos. ITA.
- Filho, L. A. V.** (2004), Filtragem Ótima Robusta em Sistemas Dinâmicos. Dissertação de Mestrado da Engenharia Elétrica, UNICAMP.
- Laub, A.** (1991), Invariant subspace methods for the numerical solution of Riccati equations. *In the Riccati Equation*, Bittanti, S., A. Laub, and J. Willems, Eds, Berlin: Springer-Verlang, p. 163-196.
- Martínez J. M.; Santos S. A.** (1995), Métodos Computacionais de Otimização, *XX Colóquio Brasileiro de Matemática*, IMPA.
- Nascimento, V.** (2007), Uma Contribuição ao Controle Robusto de Sitemas Dinâmicos. Dissertação de Mestrado.
- Sayed, A. H.** (2001), A Framework for State-Space estimation with Uncertain Models, *IEEE Transaction on Automatic Control*, v. 46, n° 7, p.998-1013.
- Takaba, K.** (1996), “Studies on  $H_{\infty}$  Filtering Problems for Linear Discrete-Time Systems,” Tese de Doutorado, Kyoto University.