

## REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO VIA OTIMIZAÇÃO CONVEXA

**José Tarcisio Costa Filho**

Universidade Federal do Ceará - UFC  
Departamento de Engenharia de Teleinformática - DETI  
jtcosta@ufc.br

**André Luíz Sampaio de Alencar**

Universidade Federal do Ceará - UFC  
Departamento de Engenharia de Teleinformática – DETI  
alencarandre85@gmail.com

### ABSTRACT

The linear quadratic (LQ) regulator problem, based on symmetrical and positive definite solutions of algebraic Riccati equation (ARE), can be efficiently solved since 1960s, what, in a way, discouraged the development of alternative methods to solve it. In this way, this paper presents a new solution to the LQ problem with no employment of ARE and set a methodology that can be extended to more advanced topics, enabling on-line optimization applications and providing relevant solutions strategies for dynamic systems subject to uncertainties in the scope of optimal control theory.

**KEYWORDS.** LQ Theory, Riccati Equations, Nonlinear Optimization, Duality

### RESUMO

O problema do regulador linear quadrático (LQ), baseado em soluções simétricas e definidas positivas da Equação Algébrica de Riccati (ARE), pode ser resolvido eficientemente desde os anos 60, o que de certo modo, veio a desencorajar o desenvolvimento de métodos alternativos à solução do mesmo. Neste sentido, esse trabalho apresenta uma nova solução para o problema LQ sem o emprego da ARE, e estabelece uma metodologia que pode ser estendida à tópicos mais avançados, viabilizando aplicações de otimização *on-line* e fornecendo estratégias de solução relevantes para sistemas dinâmicos sujeitos à incertezas no escopo da teoria de controle ótimo.

**PALAVRAS-CHAVE.** Teoria LQ, Equações Riccati, Otimização não Linear, Dualidade

## 1. Introdução

Dentre as equações matriciais não-lineares mais estudadas e utilizadas por matemáticos e engenheiros encontram-se as equações de Riccati. De um modo geral, o termo “equação de Riccati” pode significar uma classe de matrizes: quadráticas, algébricas, diferenciais ou a diferenças finitas, dos tipos simétricas ou não-simétricas, surgida no estudo de sistemas dinâmicos contínuos ou discretos no tempo (Tamariz, A. D. R., 2005). A solução das mesmas desempenha um papel fundamental na teoria do controle moderno e no processamento de sinais (Lancaster P., 1995), pois consiste em uma importante ferramenta em problemas de dupla condição de contorno como, por exemplo, o problema do regulador linear quadrático (LQR - Linear Quadratic Regulator), o controle robusto, o filtro de Kalman, estimação de estado e de parâmetros de sistemas, modelagem de séries temporais multivariáveis e em muitos outros ramos da matemática aplicada (Bittanti, S., 1991; Lancaster P., 1995; Tamariz, A. D. R., 2005).

Haja vista a importância prática de tais equações, diversos métodos numéricos que diferem em precisão, estabilidade numérica, custos de implementação computacional e eficiência, têm sido propostos para a solução das mesmas (Laub, A, 1991), como, por exemplo, os métodos de Newton (Blackburn, T. R., 1968; Hammarling, S. J., 1982), dos subespaços invariantes (Laub, A, 1991) e, mais recentemente, estratégias via desigualdades lineares matriciais (LMIs -Linear Matrix Inequalities) (Stoorvogel, A. A., 1998), redes neurais artificiais (Tamariz, A. D. R., 2005) e o Método Costa Filho (MCF) (Costa Filho, J. T., 1997; Nascimento, V. A., 2007; Souza, V. M., 2002).

O problema do regulador linear quadrático (LQR), baseado em soluções simétricas e definidas positivas das equações de Riccati, pode ser resolvido eficientemente desde os anos 60, o que de certo modo, veio a desencorajar o desenvolvimento de métodos alternativos à solução do mesmo. Neste sentido, esse artigo apresenta uma nova solução para o problema, independente das ARE (Equações Algébricas de Riccati), e estabelece uma metodologia que pode ser estendida à tópicos mais avançados, viabilizando aplicações tempo real e fornecendo estratégias de solução relevantes para sistemas dinâmicos sujeitos à incertezas no escopo da teoria de controle ótimo.

Ao final do artigo, apresentaremos exemplos para ilustrar as principais vantagens do novo método, que consistem em se obter uma família de ganhos que possam viabilizar trajetórias de estado ou controle ótimos equivalentes ou até melhores que as obtidas via Riccati. Com boas propriedades de convergência, estabilidade numérica e matrizes bem condicionadas. Para maiores detalhes históricos e/ou teóricos acerca das equações de Riccati e do controle LQR as seguintes referências podem ser consultadas (Anderson B., 1990; Athans, M., 1966; Benner, P., 1997; Bittanti, S., 1996; Lancaster P., 1995; Sielawa, J. R., 1997).

## 2. Formulação do Problema de Controle Ótimo Discreto

Nesta seção, será revisto o método clássico de resolver o problema de controle ótimo linear quadrático (LQ)

$$\text{Minimizar } J(x_k, u_k) = \frac{1}{2} x_N^T S x_N + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k] \quad (1)$$

$$\text{Sujeito a : } x_{k+1} = A x_k + B u_k, \quad k \in K = \{0, \dots, N-1\} \quad (2)$$

$$x_0 = \xi$$

As variáveis a serem otimizadas  $x_1, \dots, x_N \in R^n$  e  $u_0, \dots, u_{N-1} \in R^m$ , são respectivamente as variáveis de estado e de controle do sistema dinâmico linear discreto. Os dados do problema são:  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times m}$ ,  $x_0 \in R^n$  e as matrizes  $Q \in R^{n \times n}$ ,  $R \in R^{m \times m}$ ,  $S \in R^{n \times n}$ . que ponderam, respectivamente, as variáveis de estado, controle e

estado final  $x_N$ . Será considerado, sem perda de generalidade, que as matrizes  $S$ ,  $Q$  e  $R$  são simétricas e definidas positivas.

O problema de controle ótimo é gerar uma seqüência de vetores  $u_k^* = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1})$  que minimiza a função custo  $J(x_k, u_k)$  sujeito a restrição (2).

## 2.1 Condições de Otimalidade

O problema de controle ótimo descrito pelas equações (1) e (2) pode ser resolvido pelo emprego de vetores de co-estado  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N \in R^n$  associados à restrição (2) de modo que  $\lambda_0 = 0$  e  $\lambda_{k+1} = 0$  para  $k+1 > N$ . Neste sentido, seja a função custo aumentada:

$$J_a(x_k, u_k, x_{k+1}, \lambda_{k+1}) = \frac{1}{2} x_N^T S x_N + \sum_{k=0}^{N-1} [l_k(x_k, u_k, x_{k+1}, \lambda_{k+1})] \quad (3)$$

onde  $l_k(x_k, u_k, x_{k+1}, \lambda_{k+1})$  é o Lagrangeano definido por:

$$l_k(x_k, u_k, x_{k+1}, \lambda_{k+1}) = \frac{1}{2} \{ x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k \} + \lambda_{k+1}^T \{ A x_k + B u_k - x_{k+1} \} \quad (4)$$

pode-se reescrever (4) como:

$$l_k(x_k, u_k, x_{k+1}, \lambda_{k+1}) = H_k(x_k, u_k, \lambda_{k+1}) - \lambda_{k+1}^T x_{k+1} \quad (5)$$

onde a função Hamiltoniana é definida por:

$$H_k(x_k, u_k, \lambda_{k+1}) = \frac{1}{2} \{ x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k \} + \lambda_{k+1}^T \{ A x_k + B u_k \} \quad (6)$$

Pode-se obter as condições necessárias de otimalidade como:

$$\frac{\partial H_k}{\partial \lambda_{k+1}} = x_{k+1}^* = A x_k^* + B u_k^* \quad (7)$$

$$\frac{\partial H_k}{\partial x_k} = \lambda_k^* \Rightarrow \lambda_k^* = Q x_k^* + A^T \lambda_{k+1}^* \quad (8)$$

$$\frac{\partial H_k}{\partial u_k} = 0 \Rightarrow R u_k^* + B^T \lambda_{k+1}^* \Rightarrow u_k^* = -R^{-1} B_k^T \lambda_{k+1}^* \quad (9)$$

$$x_N^* = S^{-1} \lambda_N^* \quad (10)$$

Para este problema convexo, as condições necessárias de otimalidade são também suficientes.

## 3. Metodologia Proposta

Nesta seção será apresentado um método muito eficiente para resolver (1) e (2) estendendo o conceito da teoria de dualidade para estabelecer relações entre estruturas algébricas resultantes de transformações duais de um conjunto de equações dinâmicas complexas em um conjunto de equações estáticas mais simples. Este método apresenta aspectos computacionais significativos para a síntese de controladores ótimos, uma vez que leva em conta a vantagem de se explorar estruturas matriciais especiais.

### 3.1 Formulação Dual

Um aspecto importante dos problemas de otimização convexa com restrições é que tais problemas podem ser transformados em problemas duais os quais, em muitos casos, são mais fáceis de resolver.

Seja o problema dual:

$$\max_{\lambda_{k+1}} L(\lambda_{k+1}) \tag{11}$$

$$s.a. (7), (8), (9), (10) \tag{12}$$

onde:  $L(\lambda_{k+1}) = \min_{u_k, x_k} J_a(x_k, u_k, x_{k+1}, \lambda_{k+1})$ .

A solução dual pode ser obtida numericamente por técnicas do tipo gradiente (Avriel, M. 1996; Vilmar, A.N., 2007), entretanto é computacionalmente dispendioso, pois envolve uma grande quantidade de cálculos (Vilmar, A.N., 2007).

Para se reduzir os custos computacionais e simplificar o processo de obtenção da solução dual, tirando vantagem de estruturas matriciais especiais, propõe-se, dada a concavidade estrita da função  $L(\lambda_{k+1})$ , uma reformulação do problema dual dinâmico de modo a se obter um forma quadrática estática definida na proposição a seguir.

**Proposição 1** – *Dada a concavidade da função dual  $L(\lambda_{k+1})$  e as restrições dadas por (12), o problema dual dinâmico pode ser resolvido através da seguinte forma quadrática estática:*

$$\min_{\bar{\lambda}} M(\bar{\lambda}) = \frac{1}{2} \bar{\lambda}^T \tilde{H} \bar{\lambda} + \bar{\lambda}^T \tilde{b} + \tilde{c} \tag{13}$$

$$s.a. \bar{\lambda} \in R^{nN}$$

onde:  $H_{nN \times nN}$  é uma matriz simétrica bloco tridiagonal, definida positiva e  $b$  é um vetor de dimensões  $nN \times 1$ ,  $c \in R$  e  $\bar{\lambda} \in R^{nN}$  dado por:

$$\bar{\lambda} = [\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_N]^T. \tag{14}$$

**Demonstração:** *Para obter a forma quadrática estática da equação (13), iniciamos com a substituição das restrições dadas na equação (12) na equação (3), em seguida, realizando algumas manipulações algébricas obtêm-se:*

$$\begin{aligned} L(\bar{\lambda}) = & -\frac{1}{2} \lambda_N^T Q^{-1} \lambda_N + \frac{1}{2} x_0^T Q x_0 - \frac{1}{2} \lambda_1^T B R^{-1} B^T \lambda_1 + \lambda_1^T A x_0 \\ & + \sum_{k=1}^{N-1} \left\{ -\frac{1}{2} \lambda_k^T Q^{-1} \lambda_k + \frac{1}{2} \lambda_{k+1}^T A Q^{-1} \lambda_k + \frac{1}{2} \lambda_k^T Q^{-1} A^T \lambda_{k+1}^T \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \lambda_{k+1}^T (B R^{-1} B^T + A Q^{-1} A^T) \lambda_{k+1} \right\} \end{aligned} \tag{15}$$

Desenvolvendo o somatório para  $k = \{1, \dots, N-1\}$ , obtêm-se  $M(\bar{\lambda})$  como dado em (13), onde  $H$  é uma matriz bloco tridiagonal, simétrica e definida negativa (a função dual a ser maximizada é côncava) com dimensão  $nN \times nN$  e com blocos matriciais de dimensões  $n \times n$  dada por:

$$H = \begin{bmatrix} V_1 & W & 0 & \cdots & 0 \\ W^T & V_2 & W & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & W^T & V_3 \end{bmatrix}$$

onde:

$$V_1 = -BR^{-1}B^T - Q^{-1}, \quad V_2 = V_1 - AQ^{-1}A^T, \quad V_3 = V_2 - Q^{-1}, \quad W = Q^{-1}A^T$$

$$c = \frac{1}{2}x_0^T Qx_0, \quad b = [Ax_0 \quad 0_{nx1} \quad \cdots \quad 0_{nx1}]^T$$

A matriz  $H$  é definida negativa. A demonstração é baseada no fato de que  $V_1, V_2, V_3$  são definidas negativas e no lema de Schur conforme mostrado em (Vilmar, A.N., 2007).

O problema dual é então definido:

$$\max_{\bar{\lambda}} L(\bar{\lambda}) = \frac{1}{2} \bar{\lambda}^T H \bar{\lambda} + \bar{\lambda}^T b + c. \tag{16}$$

Visto que maximizar  $L(\bar{\lambda})$  é equivalente a minimizar  $-L(\bar{\lambda})$  na mesma região do espaço (Basar T., 1995) e considerando-se  $M(\bar{\lambda}) = -L(\bar{\lambda})$ , o problema (16) pode ser reescrito como :

$$\begin{aligned} \min_{\bar{\lambda}} M(\bar{\lambda}) &= \frac{1}{2} \bar{\lambda}^T \tilde{H} \bar{\lambda} + \bar{\lambda}^T \tilde{b} + \tilde{c} \\ \text{s.a. } \bar{\lambda} &\in R^{nV} \end{aligned} \tag{17}$$

onde:  $\tilde{H} = -H$ ,  $\tilde{b} = -b$  e  $\tilde{c} = -c$ .

Portanto, a proposição (1) está demonstrada.

### 3.2 Novo Algoritmo para Equação Algébrica de Riccati

Nesta seção serão propostos teoremas para se obter uma solução alternativa e eficiente em relação à solução clássica da equação recursiva algébrica matricial de Riccati (ARE). A equação bem conhecida de Riccati, descrita a seguir, é obtida através da solução do TPBVP (Two Point Boundary Value Problem). O TPBVP é uma característica intrínseca do problema LQ.

Uma importante característica do problema LQ é que se o sistema dinâmico (1) é completamente controlável e invariante no tempo, com matrizes Q e R constantes, então a ARE é invariante no tempo para o horizonte infinito, ou seja, quando  $N \rightarrow \infty$  e sua solução é dada por (Naidu D. S., 2002):

$$P_N = A^T P_N A + Q - A^T P_N B [B^T P_N B + R]^{-1} B^T P_N A \tag{18}$$

com a função de custo mínimo:

$$J^*(x_0) = \frac{1}{2} x_0^T P_N x_0 \tag{19}$$

**Teorema 1** – Ao considerarmos o problema LQ, existe uma função matricial  $P_N$ , tal que:

$$P_N = A^T \bar{H}_{11} A + Q. \tag{20}$$

Para o menor valor da função custo dada por:

$$J^*(x_k, u_k) = \min_{u_k} J(x_k, u_k) = \frac{1}{2} x_0^T P_N x_0. \quad (21)$$

**Demonstração:** Para provar o teorema 1, necessitamos do seguinte valor ótimo de  $\bar{\lambda}^*$  dado pela equação (17):

$$\nabla_{\lambda} M(\bar{\lambda}) = \tilde{H} \bar{\lambda}^* - b = 0. \quad (22)$$

Organizando os termos:

$$\bar{\lambda}^* = \tilde{H}^{-1} b. \quad (23)$$

De acordo com a equação acima, temos:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{H}_{11} & \bar{H}_{12} & \dots & \bar{H}_{1N} \\ \bar{H}_{21} & \bar{H}_{22} & \dots & \bar{H}_{2N} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \bar{H}_{N1} & \dots & \dots & \bar{H}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ax_0 \\ 0_{nx1} \\ \vdots \\ 0_{nx1} \end{bmatrix}$$

ou seja:

$$\lambda_1 = \bar{H}_{11} Ax_0, \dots, \lambda_N = \bar{H}_{N1} Ax_0. \quad (24)$$

Considerando, sem perda de generalidade,  $N=2$ , temos:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{H}_{11} & \bar{H}_{12} \\ \bar{H}_{21} & \bar{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ax_0 \\ 0_{nx1} \end{bmatrix}.$$

Portanto, temos a seguinte identidade:

$$\begin{bmatrix} -V_1 & -W \\ -W^T & -V_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{H}_{11} & \bar{H}_{12} \\ \bar{H}_{21} & \bar{H}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & I_{n \times n} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Assim, a equação (1) pode ser reescrita para  $N=2$  ( $k=0,1,2$ ), resultando em:

$$J^*(x_k, u_k) = \frac{1}{2} x_0^T Q x_0 + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u_o \\ u_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u_o \\ u_1 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Substituindo as restrições em (12) na equação (26), temos:

$$J(x_k, u_k) = \frac{1}{2} x_0^T Q x_0 + \begin{bmatrix} Q^{-1}(\lambda_1 - A^T \lambda_2^T) \\ Q^{-1} \lambda_2^T \\ -R^{-1} B_0^T \lambda_1 \\ -R^{-1} B_1^T \lambda_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{-1}(\lambda_1 - A^T \lambda_2^T) \\ Q^{-1} \lambda_2^T \\ -R^{-1} B_0^T \lambda_1 \\ -R^{-1} B_1^T \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Definindo alguns termos:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} Q^{-1}(\lambda_1 - A^T \lambda_2^T) \\ Q^{-1} \lambda_2^T \\ -R^{-1} B_0^T \lambda_1 \\ -R^{-1} B_1^T \lambda_2 \end{bmatrix} \quad e \quad \Phi = \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix}.$$

A equação (26) pode ser escrita como:

$$J(x_k, u_k) = \frac{1}{2} x_0^T Q x_0 + \frac{1}{2} \Gamma^T \Phi \Gamma. \quad (27)$$

Então, substituindo  $\lambda_1 = \bar{H}_{11}Ax_0$  e  $\lambda_2 = \bar{H}_{21}Ax_0$  na equação (27) e efetuando algumas manipulações algébricas, teremos:

$$J^*(x_k, u_k) = \frac{1}{2}x_0^T Qx_0 + \frac{1}{2}x_0^T A^T \bar{H}_{11}^T (-V_1 \bar{H}_{11} - W \bar{H}_{21}) Ax_0 + \frac{1}{2}x_0^T A^T \bar{H}_{21}^T (-V_2 \bar{H}_{21} - W^T \bar{H}_{11}) Ax_0 \quad (28)$$

Ao considerar a identidade (25) e a equação (28), temos:

$$J^*(x_k, u_k) = \frac{1}{2}x_0^T Qx_0 + \frac{1}{2}x_0^T A^T \bar{H}_{11}^T (I_{n \times n}) Ax_0 + \frac{1}{2}x_0^T A^T \bar{H}_{21}^T (0_{n \times n}) Ax_0. \quad (29)$$

Organizando os termos:

$$J^*(x_k, u_k) = \frac{1}{2}x_0^T (A^T \bar{H}_{11} A + Q)x_0 \quad (30)$$

Assim, para  $k = 0, 1, \dots, N-1$  e estrutura citada na equação (30) permanece inalterada. Portanto, concluímos que a partir da equação (21), a matriz  $P_N$  fornece o custo mínimo, quando está definida na forma:

$$P_N = A^T \bar{H}_{11} A + Q. \quad (31)$$

Portanto, o teorema 1 está demonstrado.

Este trabalho foi originalmente proposto por Costa Filho em (Costa Filho, J. T., 1997) e desenvolvido por Souza (Souza, V. M., 2002) via métodos dos pontos interiores, LMIs e programação semidefinida. Em (Vilmar, A.N., 2007), o algoritmo de programação não linear estática é adaptado para a estrutura especial da solução da equação algébrica de Riccati, com o objetivo de reduzir o esforço computacional do problema. O desempenho do algoritmo modificado torna-o bem adaptável para aplicações de controle ótimo e filtragem, visto que nestes casos, o desempenho computacional é considerado como pré-requisito para aplicações de técnicas em otimização on-line com horizonte finito.

Embora o algoritmo proposto necessite da inversa da matriz Hessiana ( $\tilde{H}$ ), conforme definido na equação (23), temos que esta matriz inversa pode ser calculada off-line utilizando diversos métodos numéricos tais como: fatorização de House-Holder (Boyd, S., 1988), rotação de Givens (Boyd, S., 1988), fatorização de Cholesky (Blackburn, T. R., 1968) e decomposição em valores singulares (Boyd, S., 1994).

### 3.3 Síntese de Controlador LQ via Otimização não Linear

Nesta seção, propomos um novo algoritmo para o projeto de sistema de controle LQ em malha fechada através de soluções bem condicionadas e numericamente estáveis. Com este algoritmo, os parâmetros livres (matrizes de ponderação de estado e de controle) podem ser fixados (sem a necessidade de ajustes exaustivos) e um parâmetro escalar é usado como instrumento para adequar o sistema de controle às condições de desempenho e de estabilidade. Neste sentido, particularmente, é bastante desejável a determinação de uma matriz de ganho constante de realimentação de estado  $F \in R^{m \times n}$  para o controle dado pela seguinte equação:

$$u_k = Fx_k \quad (32)$$

de forma que os autovalores da matriz:

$$A_f = A + BF \quad (33)$$

sejam alocados numa região.

A idéia chave para a obtenção de  $F$  resulta da aplicação dos procedimentos descritos a seguir. Através dos experimentos realizados, verificamos que para  $N$  pequeno o erro do resíduo

$\|\nabla M(\bar{\lambda})\|$  é reduzido tornando a matriz  $\tilde{H}$  melhor condicionada. Neste sentido, é possível uma redução significativa da dimensão da matriz  $\tilde{H}$ , de  $nN$  para  $nd$ , onde  $d \ll N$ , o que possibilita diminuir seu número de condição e ratifica o fato de que podemos resolver este problema de otimização convexa (13) por intervalos, ao se resolver sucessivas vezes o problema (34) descrito a seguir.

Uma estratégia para regularizar o problema definido em (13) é proposta através dos seguintes procedimentos:

**Procedimento 1** - Construir um problema equivalente ao original de tal forma que a matriz Hessiana  $\tilde{H}$  tenha número de condição aceitável.

Seja o problema modificado:

$$\begin{aligned} \min_{\bar{\lambda}} M(\bar{\lambda}) &= \frac{1}{2} \bar{\lambda}^T \tilde{H} \bar{\lambda} + \bar{\lambda}^T \tilde{b} + \tilde{c} \\ \text{s.a. } \|\bar{\lambda}\| &\leq \Delta, \Delta > 0 \end{aligned} \tag{34}$$

onde :  $\tilde{H} = -H, \tilde{b} = -b, \tilde{c} = -c$

Contrariamente ao problema (13), o problema modificado sempre tem solução, uma vez que as quadráticas são funções contínuas e a região factível em (34) é uma bola fechada, portanto, um compacto de  $R^{nN}$ . Recentemente, tem-se empregado (34) com uma forma de regularizar o problema de minimizar uma quadrática sem restrições, quando  $\tilde{H}$  é muito mal condicionada e a solução exata de (13) carece de sentido por ser extremamente sensível aos erros dados ou ao arredondamento. Por outro lado, o problema (34) é bem condicionado se  $\Delta$  não é grande. Portanto, substituir (13) por (34) representa um certo sacrifício em termos do erro no resíduo do sistema, mas normalmente compensado por uma maior estabilidade numérica. A estrutura especial do problema (34) proporciona caracterizações dos minimizadores muito mais poderosas que no caso geral de minimização irrestrita.

**Teorema 2** - Se  $\lambda^*$  é solução de (34), então  $\lambda^*$  é solução da equação:

$$(\tilde{H} + \mu I)\lambda^* = -\tilde{b}$$

$$\text{com } \mu \geq 0, \mu(\lambda^{*T} \lambda^* - \Delta^2) = 0 \text{ e } (\tilde{H} + \mu I) \geq 0.$$

**Demonstração:** Ver (Martínez, J. M., 1994).

**Procedimento 2:** Resolver sucessivamente o problema de malha aberta por intervalos.

Através dos experimentos realizados, verificamos que para  $N$  pequeno e  $x_0$  próximo da solução, o erro no resíduo do sistema:

$$(\tilde{H} + \mu I)\lambda^* = -\tilde{b} \tag{35}$$

é reduzido, tornando a matriz melhor condicionada. Em geral, quando a matriz  $H$  aumenta de dimensão em função de  $N$ , seu número de condição também aumenta. Neste sentido, é possível uma redução significativa da dimensão da matriz  $H$  de  $nN$  para  $nd$  onde  $d \ll N$ , diminuindo seu número de condição.

Pelos procedimentos anteriores, ao considerarmos  $d = 2$  com  $\hat{\lambda}^* = [\lambda_1 \quad \lambda_2]^T$  teremos então o problema (34) aproximado ao problema (13), de modo que:

$$\left( \begin{array}{cc} BR^{-1}B^T + Q^{-1} & -Q^{-1}A^T \\ -AQ^{-1} & \underbrace{BR^{-1}B^T + Q^{-1} + AQ^{-1}A^T}_{\tilde{H}} \end{array} \right) + \mu I_{2n \times 2n} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax_0 \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Então, é possível conseguir dominância bloco diagonal aumentando-se o valor de  $\mu$  e, por conseguinte, boas propriedades de convergência e uma maior estabilidade numérica. Note que se  $\mu \gg \max\{0, -\sigma_1\}$ , onde  $\sigma_1$  é o menor autovalor de  $\tilde{H}$  é possível situar os autovalores de  $\bar{H} = (\tilde{H} + \mu I)^{-1}$ , dentro de uma determinada região.

Para os valores de  $\lambda_1 = \bar{H}_{11}Ax_0$  e  $\lambda_2 = \bar{H}_{21}Ax_0$  as matrizes  $\bar{H}_{11}$  e  $\bar{H}_{21}$  podem ser obtidas através de fatorizações. Substituindo  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  na equação (8) para  $k = 1$ , temos:

$$x_1 = Q^{-1}\lambda_1 - A^T\lambda_2 \therefore x_1 = Q^{-1}(\bar{H}_{11} - A^T\bar{H}_{21})Ax_0 \quad (37)$$

Desta forma, podemos definir a matriz de ganho  $F$  a partir da equação (37), ou seja:

$$A_f = Q^{-1}(\bar{H}_{11} - A^T\bar{H}_{21})A \quad (38)$$

Portanto, podemos por meio de  $U$  alocar os pólos da matriz  $A_f$  numa determinada região. Através do seguinte teorema obtêm-se  $F$ .

**Teorema 3** - Dado  $A_f = Q^{-1}(\bar{H}_{11} - A^T\bar{H}_{21})A$ , então existe  $F$ , a solução de (33) se e somente se

$$U_1^T(BF) = 0 \quad (39)$$

onde

$$B = [U_0 \ U_1] \begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

com a matriz  $U = [U_0 \ U_1]$  ortogonal e  $Z$  não singular. Então  $F$  é dado explicitamente por:

$$F = Z^{-1}U_0^T(A_f - A) \quad (41)$$

**Demonstração:** Consideremos que  $B$  tem posto completo. Isto implica na existência da decomposição em (40). De (33),  $F$  deve satisfazer:

$$BF = A_f - A \quad (42)$$

e pré-multiplicando por  $U^T$  temos as seguintes equações:

$$\left. \begin{array}{l} ZF = U_0^T(A_f - A) \\ 0 = U_1^T(A_f - A) \end{array} \right\} \quad (43)$$

do qual (39) e (41) seguem diretamente.

**Comentário:** A equação (41) implica que  $F$  existe se e somente se  $\mathfrak{R}\{A_f - A\} \subset \mathfrak{R}\{B\} \equiv \mathfrak{R}\{U_0\}$ , onde  $\mathfrak{R}\{\cdot\}$  é o espaço range. Para a decomposição em (40) de  $B$ , pode-se utilizar, por exemplo, decomposição por valores singulares (SVD) (Golub, G. H.,

1989), em que  $Z = \Sigma V'$ , onde  $\Sigma = diagonal\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$  é uma matriz positiva e  $V$  é uma matriz ortogonal. Um outro método de fatorização que pode ser empregado é a decomposição QR (Ortega, J. M., 1989; Golub, G. H., 1989) e, neste caso,  $Z$  é uma matriz triangular superior.

Na tabela abaixo, é mostrado a comparação dos algoritmos para a solução do problema de controle ótimo  $LQ$  e da nova proposta para o sistema dinâmico descrito em (1).

<u>Solução clássica</u>	<u>Nova proposta</u>
$u_k = K_c x_k$	$u_k = F x_k$
$K_c = -(B'P_N B + R)^{-1} B'P_N A$	$F = Z^{-1} U'_0 (A_f - A)$
$P_N = A' [P_N - P_N B (B'P_N B + R)^{-1} B'P_N] A + Q$	$A_f = Q^{-1} (\bar{H}_{11} - A' \bar{H}_{21}) A$

Tabela 1 - Algoritmos para o regulador linear quadrático

#### 4. Análise e Resultados

Para ilustrar a aplicação da metodologia de otimização proposta para o projeto de controladores em malha fechada, considerando um sistema de dinâmico bem estudado em (Kirk, 1970). O objetivo aqui é mostrar que certos requisitos de desempenho podem ser obtidos com uma escolha adequado do parâmetro . Para isso, os resultados obtidos com a nova proposta são comparados com o controle ótimo  $LQ$  via ARE.

Seja sistema de dinâmico discreto invariante no tempo:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0,9974 & 0,0539 \\ -0,1078 & 1,1591 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0,0013 \\ 0,0539 \end{bmatrix} u_k, \quad x_0 = [2 \quad 1]^T$$

A função custo associada a ser minimizada é:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [0,25x_1^2(k) + 0,05x_2^2(k) + 0,05u^2(k)]$$

As Fig. 1 e 2 mostram as trajetórias de controle  $u(k)$  e as de estados  $x_1(k)$  e  $x_2(k)$  e respectivamente do sistema dinâmico, usando o algoritmo do regulador linear quadrático via ARE e a novo algoritmo sem considerar os procedimentos 1 e 2. Pode-se verificar a equivalência entre os algoritmos, tanto na coincidência de valores para os custos dual e primal, conforme a Tabela 2, quanto na superposição das trajetórias de controle e de estado.

Custo via RIC (Primal)	38,3350
Custo via Novo Método (Dual)	<b>38,3350</b>

Tabela 2 – Comparação de Funções custos

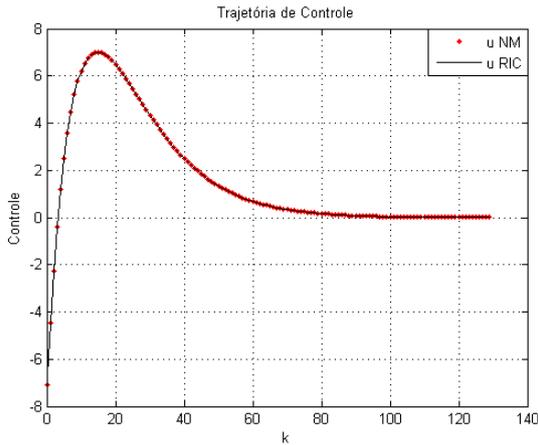


Figura 1- Comparativo das trajetórias de controle

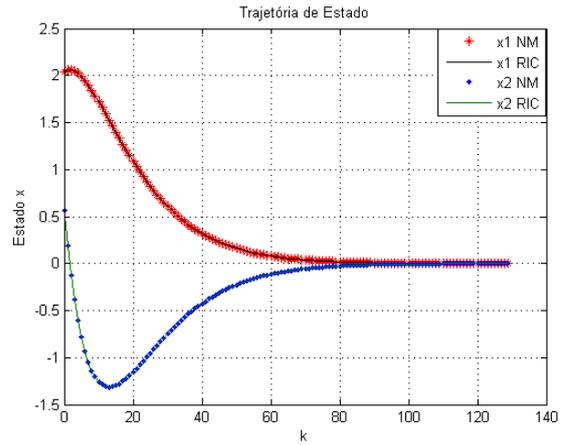


Figura 2- Comparativo das trajetórias de estado

Para  $N = 2$  e  $\mu > \max\{0, -\sigma_1\}$ , são apresentados os resultados mais eficientes se comparados aos obtidos via ARE. Através destes resultados é possível verificar que um melhor desempenho do controlador em malha fechada pode ser obtido com o ajuste do parâmetro  $\mu$ . Este resultado era esperado, pois o condicionamento da matriz  $\tilde{H}$  se torna melhor com o emprego dos os procedimentos 1 e 2, possibilitando uma adequada alocação de pólos do sistema em malha fechada e por conseqüência a geração de toda uma família de ganhos para uma variação em torno de uma vizinhança de  $\mu = 2,7$ .

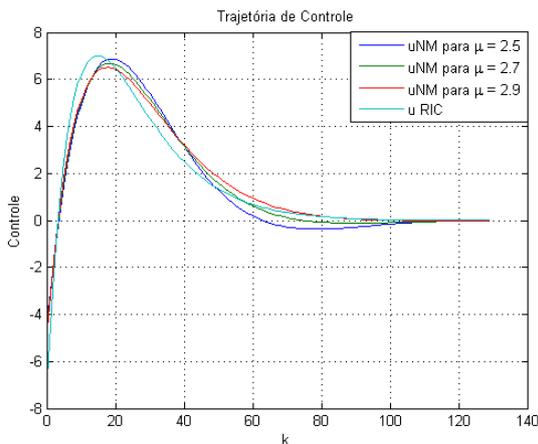


Figura 3 – Variável de Controle

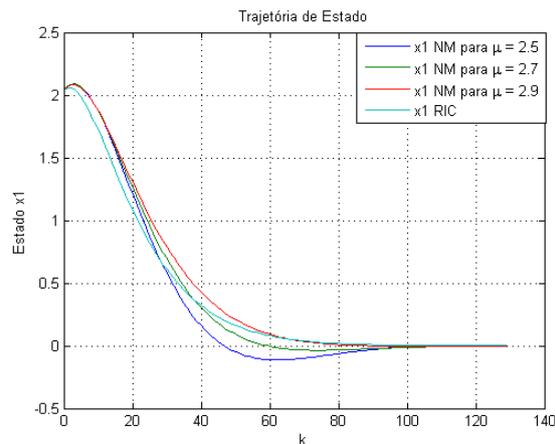


Figura 4 – Variável de Estado

## 5. Conclusão

Neste trabalho, apresentamos uma perspectiva de projetos práticos de controle ótimo de sistemas dinâmicos multivariáveis lineares e invariantes no tempo, através do emprego de uma metodologia de otimização e controle. Esta metodologia é muito atraente em virtude da simplicidade algébrica de cálculo, da dimensão reduzida do sistema de equações lineares e da possibilidade de uso de métodos numéricos com boas propriedades de estabilidade e precisão numérica. O projetista pode utilizar, além das matrizes de ponderação de estado e de controle, o fator de ajuste  $\mu$  como parâmetros de projeto, conforme ilustrado. Este fator de ajuste, atuando com um grau extra de liberdade, permite variar a matriz de ganho de realimentação, assegurando que os valores singulares mínimo e máximo da matriz de transferência de malha respeitem as condições de desempenho e da estabilidade para toda a classe de plantas reais associada ao modelo, ao mesmo tempo em que se mantém o bom condicionamento das matrizes computadas. Esta nova metodologia pode ser facilmente estendida para problemas de controle robusto  $H_2$  e  $H_\infty$ .

## Referências

- Anderson B.;** Moore, J. B. Optimal Control: Linear Quadratic Methods. Engle-wood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1990.
- Athans, M.;** Falb, P. Optimal Control, McGraw-Hill, New York, 1966.
- Avriel, M.;** Golany, B. Mathematical Programming for Industrial Engineers, Marcel Dekker, Inc., 1996.
- Basar T.;** Bernhard P.,  $H_\infty$  Optimal Control and Related Minimax Design Problems, Birkhäuser, NJ, 1995.
- Benner, P.;** Laub, A.J.; Mehrmann, V. Benchmarks for the numerical solution of algebraic Riccati equations, In: Control Systems Magazine, IEEE, v. 17, n.5, p.18 - 28, 1997.
- Bittanti, S.** History and Prehistory of the Riccati Equation, In: IEEE Control and Decision Conference, 35th, Proceedings, p.1599-1604, Kobe, 1996.
- Bittanti, S.;** Laub, A. and Willems, J.C. eds. The Riccati Equation, Springer Verlag, 1991.
- Blackburn, T. R.** "Solution of the algebraic matrix Riccati equation via Newton-Raphson iteration," AIAA J., v. 6, n. 5, p. 951-953, 1968.
- Boyd, S.;** Ghaoui, L. E.; Feron, E.; Balakrishnan, V., Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.
- Boyd, S.;** Balakrishnan, V.; Kabamba, P. On computing the  $H_\infty$  norm of a transfer matrix, In: Proceedings of the American Control Conference, Atlanta, Georgia, v. 3, p. 2412-2417, 1988.
- Costa Filho, J. T.** Uma Contribuição ao Controle Ótimo de Alto Desempenho. Tese submetida ao Departamento de Engenharia de Eletricidade da UFMA para concurso de Professor Titular na área de Automação e Controle, 1997.
- Golub, G. H.;** Van Loan, C. F., Matrix Computations, Johns Hopkins University Press, 1989.
- Hammarling, S. J.** Newton's method for solving the algebraic Riccati equation. NPL Report DITC 12/82, National Physical Laboratory, Teddington, Middle-sex, U. K., 1982.
- Lancaster P.;** Rodman L. Algebraic Riccati Equations, Oxford University Press, 1995.
- Laub, A.** Invariant subspace methods for the numerical solution of Riccati equations. In The Riccati Equation, Bittanti, S., A. Laub, and J. Willems, eds, Berlin: Springer-Verlag, p. 163-196, 1991.
- Martínez, J. M.,** Local Minimizers of Quadratic Functions on Euclidean Balls and Spheres, SIAM Journal on Optimization 4, 1994.
- Naidu, D. S.,** Optimal Control Systems, Electrical Engineering Textbook Series, 2002.
- Nascimento, V. A.;** Costa Filho, J. T. A Nice Method for Linear Quadratic Regulator Problem, 6th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications, UNESP, 2007
- Ortega, J. M.,** Introduction to Parallel and Vector Solution of Linear Systems, Plenum Press. 1989.
- Kirk, D.** Optimal Control Theory, Prentice-Hall, 1970.
- Sielawa, J. R.** Desenvolvimento e Aplicações das Equações de Riccati em Sistemas Estruturais, Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, ITA, SP, 1997.
- Souza, V. M.** Projeto de Controlador Robusto via Otimização Convexa, Dissertação de Mestrado em Engenharia de Eletricidade, UFMA, 2002.
- Stoorvogel, A. A. e Saberi, A.** The discrete-time algebraic Riccati equation and linear matrix inequality, Linear Algebra Appl., v. 274, n. 3, p. 317-365, 1998.
- Tamariz, A. D. R.** Modelagem Computacional de Dados e Controle Inteligente no Espaço de Estado, Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica e Computação, Unicamp, 2005.
- Vilmar, A.N.** Uma Contribuição ao Controle Robusto de Sistemas Dinâmicos Multivariáveis, Dissertação de Mestrado em Engenharia de Teleinformática, UFC, CE, 2007.