

PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO EM EMPRESAS MOVELEIRAS VIA OTIMIZAÇÃO ROBUSTA

Douglas José Alem^a, Reinaldo Morabito^b

^a Universidade Federal de São Carlos – Departamento de Engenharia de Produção
Rodovia João Leme dos Santos (SP-264), Km 110, Sorocaba, SP 18052-780

^b Universidade Federal de São Carlos – Departamento de Engenharia de Produção
Rodovia Washington Luís (SP-310), Km 235, São Carlos, SP 13565-905
{douglas,morabito}@ufscar.br

ABSTRACT

In this paper, we develop robust optimization models to the combined lot-sizing and cutting-stock problem that arises in small-scale industries, considering that demands are uncertain parameters. Differently from the stochastic programming models, the robust optimization models treat uncertain parameters as bounded random variables in a given interval, and the optimization problem lies on a worst-case perspective. Numerical tests showed that it is possible to obtain robust solutions without overly sacrificing optimal values or service levels. Moreover, numerical evidence indicated the importance in choosing representative budgets of uncertainty in order to avoid very conservative solutions.

KEYWORDS Combined lot-sizing and cutting-stock problem. Robust optimization. Furniture industry. Applications to the Industry.

RESUMO

Nesse trabalho, são desenvolvidos modelos de otimização robusta para o problema combinado de dimensionamento de lotes e corte de estoque típico de empresas moveleiras, considerando que as demandas não são valores conhecidos com certeza. Diferentemente dos modelos baseados em programação estocástica, os modelos de otimização robusta consideram que os parâmetros incertos são variáveis aleatórias limitadas num suporte estabelecido *a priori* e otimizam o problema numa perspectiva de pior caso intervalar. Os resultados numéricos indicam que é possível obter soluções robustas sem sacrificar demais os valores ótimos e os níveis de serviço. Ainda, comprovou-se a importância de utilizar *budgets* de incertezas representativos, de modo a evitar soluções muito conservadoras.

PALAVRAS CHAVE Problema combinado de dimensionamento de lotes e corte de estoque. Otimização robusta. Empresas Moveleiras. Aplicações à indústria.

1. Introdução

Nesse trabalho, é estudado um problema de planejamento da produção típico de empresas moveleiras, que consiste em dimensionar lotes de produtos num sistema de produção que envolve um estágio fundamental de corte de peças. Na literatura científica, tal problema é conhecido como o *problema combinado de dimensionamento de lotes e corte de estoque* e é observada em indústrias de papel e móveis (Gramani e França, 2006; Ghidini et al. 2007; dos Santos 2008; Poltroniere et al. 2008; Gramani et al. 2009). A principal motivação em combinar os dois problemas é permitir que as decisões relacionadas ao dimensionamento de lotes e ao processo de corte de estoque possam ser determinadas conjuntamente e, com isso, melhorar alguma medida de desempenho do processo.

Em geral, assume-se o conhecimento completo sobre as informações necessárias no planejamento da produção (como custos, demandas, tempos de processamento e preparação) para simplificar a modelagem do problema. Na prática, entretanto, alguns dados (demandas futuras, custos, retornos, etc.) podem não existir no momento em que os problemas são resolvidos, fazendo com que seja necessário utilizar métodos de previsão, que estão sujeitos a erros. Para corroborar com essa hipótese, considere uma empresa moveleira de pequeno porte que não possui um histórico organizado dos pedidos dos clientes e nem das ordens de produção efetivadas. Desta maneira, utilizar métodos de previsão para estimar as demandas futuras, em geral, não é possível.

Nesse contexto, propõe-se utilizar técnicas de otimização robusta para lidar com as incertezas inerentes do planejamento da produção em empresas moveleiras de pequeno porte. Em linhas gerais, a otimização robusta (Ben-Tal e Nemirovski, 2000) preocupa-se em desenvolver modelos e métodos para que as soluções sejam factíveis para quaisquer realizações das variáveis aleatórias dentro de um conjunto convexo dado *a priori* e violações das restrições não são toleradas. Essa metodologia, assim como a programação estocástica, é denominada *proativa*. Uma diferença bastante evidenciada entre essa metodologia e a programação estocástica é que a primeira não necessita do conhecimento da distribuição de probabilidade do parâmetro incerto, enquanto a segunda precisa.

O estudo está organizado da seguinte maneira. No Capítulo 2, é apresentado um modelo determinístico de dimensionamento de lotes e corte de estoque voltado para empresas de móveis. A formulação robusta equivalente para incorporar as demandas incertas é desenvolvida no Capítulo 3. O Capítulo 4 apresenta os experimentos numéricos realizados para analisar o modelo robusto. As considerações finais e algumas perspectivas de trabalhos futuros são discutidas no Capítulo 5.

2. Um Modelo Geral de Dimensionamento de Lotes e Corte de Estoque

Nessa seção, é apresentada uma simples extensão da formulação matemática do problema combinado de dimensionamento de lotes e corte de estoque CLC apresentado no trabalho de Gramani et al. (2009). Diferentemente da formulação matemática original, no modelo estendido é permitido atraso na produção (inclusive no último período do horizonte de planejamento) e utilização de hora-extra, os quais são penalizados na função objetivo com os respectivos custos.

Sejam os conjuntos $\mathcal{I}$ de produtos (guarda-roupas, cômodas, criados-mudo, camas, etc.) e $\mathcal{P}$ das peças que compõem os produtos que devem ser produzidas de acordo com um conjunto $\mathcal{J}$ de padrões de corte, de modo a atender a demanda ao longo de um conjunto $\mathcal{T}$ de períodos do horizonte de planejamento. Esses conjuntos são indexados por i , p , j , e t , respectivamente. A Tabela lista a notação usada na formulação matemática do problema.

O modelo matemático inteiro-misto a seguir objetiva determinar um plano de produ-

<i>Dados de Entrada</i>	
c_{it}	custo de produção do produto i no período t .
h_{it}^+	custo de estoque do produto i no período t .
h_{it}^-	custo de atraso do produto i no período t .
w_{jt}	custo de desperdício de material ao se cortar o padrão de corte j no período t .
s_{it}	custo de preparar a máquina para produzir o produto i no período t .
o_t	custo de hora-extra no período t .
a_{pj}	número de vezes que a peça p aparece no padrão de corte j .
r_{pi}	número de peças p que compõem o produto i .
d_{it}	demanda do produto i no período t .
C_t	capacidade regular no período t .
C_t^E	capacidade extra no período t .
I_{it}^{max}	estoque máximo permitido do produto i no período t .
v_i	tempo de produção do produto i .
M	número suficientemente grande.
<i>Variáveis de Decisão</i>	
O_t	hora-extra utilizada no período t .
X_{it}	quantidade de produto i produzido no período t .
I_{it}^+	quantidade de produto i em estoque ao final do período t .
I_{it}^-	quantidade de produto i em atraso ao final do período t .
Y_{jt}	frequência do padrão de corte j no período t .
Z_{it}	variável binária que vale 1 se produto i for produzido no período t .

Tabela 1: Notação matemática do modelo matemático CLC1.

ção de móveis a um custo mínimo, a partir do processamento de padrões de corte pré-selecionados, de modo a atender a demanda e satisfazer as restrições do processo produtivo. A seguir, a primeira formulação matemática do problema combinado de dimensionamento de lotes e corte de estoque CLC1 é detalhada.

- a) A *função objetivo* (1) consiste em minimizar o custo total de produção, estoque, atraso, preparação, perda de material e hora-extra. O primeiro termo em (1) é o custo total incorrido na produção, estoque, atraso e preparação. O segundo termo representa o custo de desperdício de material. O último termo é o custo devido à utilização de hora-extras.

$$\text{Minimizar } \psi = \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{t \in \mathcal{T}} (c_{it}X_{it} + h_{it}^+I_{it}^+ + h_{it}^-I_{it}^- + s_{it}Z_{it}) + \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{t \in \mathcal{T}} w_{jt}Y_{jt} + \sum_{t \in \mathcal{T}} o_tO_t. \quad (1)$$

- b) As *restrições de balanceamento de estoque* (2) fazem o balanço de toda a produção de móveis. Sem perda de generalidade, assume-se que os níveis de estoque e atraso no início do horizonte de planejamento são nulos, i.e., $I_{i0}^+ = I_{i0}^- = 0$, $i \in \mathcal{I}$. É possível ainda proibir o atraso no último período do horizonte de planejamento, impondo-se que $I_{iT}^- = 0$.

$$X_{it} + I_{i,t-1}^+ + I_{it}^- = d_{it} + I_{it}^+ + I_{i,t-1}^-, \quad i \in \mathcal{I}, \quad t \in \mathcal{T}. \quad (2)$$

- c) As *restrições de balanceamento de peças* (3) forçam o balanço de peças necessárias para montar os produtos. Note que essas restrições de acoplamento são as únicas que integram ambas as decisões relacionadas ao dimensionamento de lotes X_{it} e ao corte de estoque Y_{jt} .

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} a_{pj} Y_{jt} \geq \sum_{i \in \mathcal{I}} r_{pi} X_{it}, \quad p \in \mathcal{P}, \quad t \in \mathcal{T}. \quad (3)$$

- d) As *restrições de estoque* (4) limitam o máximo estoque de móveis permitido e o mínimo estoque de móveis requerido. Nesse caso, o mínimo estoque é zero, mas quantidades positivas podem ser consideradas, dependendo da política da empresa (por exemplo, estoque de segurança).

$$0 \leq I_{it}^+ \leq I_{it}^{max}, \quad i \in \mathcal{I}, \quad t \in \mathcal{T} \quad (4)$$

- e) As *restrições de capacidade* (5) indicam que o tempo total de produção dos móveis deve ser inferior à soma das capacidades regular e extra. Pode-se também adotar outra unidade de capacidade de produção, como a área total cortada em metros quadrados, por exemplo.

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} v_i X_{it} \leq C_t + O_t, \quad t \in \mathcal{T} \quad (5)$$

- f) As *restrições de hora-extra* (6) limitam a utilização da hora-extra em cada período. Pode-se considerar a capacidade extra como uma fração da capacidade regular, i.e., $C_t^E = f \cdot C_t$, com $f \in [0, 1]$.

$$0 \leq O_t \leq C_t^E, \quad t \in \mathcal{T}. \quad (6)$$

- g) As *restrições de preparação* (7) indicam que pode haver produção do produto i no período t somente se a linha de produção estiver preparada, i.e., se a variável de preparação Z_{it} for 1.

$$X_{it} \leq M Z_{it}, \quad i \in \mathcal{I}, \quad t \in \mathcal{T}. \quad (7)$$

- h) O conjunto de restrições (8), (9), (10) e (11) refere-se ao domínio das variáveis de decisão.

$$X_{it} \geq 0, \quad i \in \mathcal{I}, \quad t \in \mathcal{T} \quad (8)$$

$$I_{it}^- \geq 0, \quad i \in \mathcal{I}, \quad t \in \mathcal{T} \quad (9)$$

$$Y_{jt} \geq 0, \quad j \in \mathcal{J}, \quad t \in \mathcal{T} \quad (10)$$

$$Z_{it} \in \{0, 1\}, \quad i \in \mathcal{I}, \quad t \in \mathcal{T}. \quad (11)$$

Nesse trabalho, as variáveis relacionados aos padrões de corte, Y_{jt} , são considerados números não-negativos reais, mas é possível impor restrições de integralidade sobre as mesmas para se obter apenas quantidades inteiras. Vários trabalhos da literatura excluem a restrição de integralidade sobre tais variáveis na tentativa de obter um modelo de otimização mais tratável computacionalmente, como em Nonas e Thorstenson (2008) e Gramani et al. (2009).

Se a condição $I_{iT}^- = 0$, $\forall i \in \mathcal{I}$ não for imposta, pode-se mostrar que o modelo *CLC1* é factível para qualquer exemplar, propriedade especialmente importante para assegurar a factibilidade dos modelos de otimização robusta.

3. Modelos de Otimização Robusta

Para aplicar a metodologia de otimização robusta ao *CLC1* com demanda incerta, reescreve-se a restrição (2), pois a mesma apresenta uma igualdade, que pode não ser satisfeita para todas as realizações da demanda. Assim, a restrição (2) é redefinida como uma restrição de custo de estoque e atraso, da seguinte maneira. Defina o estoque do produto i no período t por $I_{it} = I_{it}^+ - I_{it}^-$. Note que o estoque definido dessa maneira é irrestrito em sinal, podendo representar estoque em mãos ou atraso. Uma vez que $I_{it} = \sum_{\tau=1}^t (X_{i\tau} - d_{i\tau})$, e definindo as variáveis não-negativas de custo ou atraso, H_{it} , obtém-se:

$$H_{it} \geq h_{it}^+ I_{it} = h_{it}^+ \left(\sum_{\tau=1}^t (X_{i\tau} - d_{i\tau}) \right), \quad i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \quad (12)$$

e

$$H_{it} \geq h_{it}^- (-I_{it}) = h_{it}^- \left(- \sum_{\tau=1}^t (X_{i\tau} - d_{i\tau}) \right), \quad i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}. \quad (13)$$

Agora, pode-se aplicar as técnicas de otimização robusta para lidar com a demanda incerta nas restrições reformuladas (12) e (13). Assim, considere que as demandas acumuladas sejam variáveis aleatórias simétricas e limitadas $\tilde{d}_{i\tau}$ que assumem valores no intervalo $[d_{i\tau} - \hat{d}_{i\tau}, d_{i\tau} + \hat{d}_{i\tau}]$. O desvio relativo entre as demandas incertas e nominais é determinado por $z_{it} = (\tilde{d}_{it} - d_{it}) / \hat{d}_{it}$ que pertence ao intervalo $[-1, 1]$. Tomando os *budgets* de incerteza $\Gamma_{it}^d \in [0, t]$, é possível também escrever $\tilde{d}_{it} = d_{it} + \hat{d}_{it} z_{it}$. Baseado no trabalho de Bertsimas e Thiele (2006), os *budgets* de incerteza são não decrescente com o período t , para todo $i \in \mathcal{I}$. Além disso, o aumento em Γ_{it}^d é igual ou menor que o aumento nos períodos.

Como a filosofia da otimização robusta é baseada numa perspectiva de situações de pior caso, deve-se maximizar o desvio das demandas sobre o conjunto de todas as possíveis realizações. Baseado nas técnicas desenvolvidas em Bertsimas e Thiele (2006), pode-se determinar o equivalente robusto do problema (1)–(11) com demanda incerta (*CLCd*):

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \psi^d = \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{t \in \mathcal{T}} (c_{it} X_{it} + H_{it} + s_{it} Z_{it}) + \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{t \in \mathcal{T}} w_{jt} Y_{jt} + \sum_{t \in \mathcal{T}} o_t O_t \\ \text{Sujeito a:} \quad & \text{Restrições (3), (5) – (8), (10), (11)} \end{aligned} \quad (14)$$

$$H_{it} \geq h_{it}^+ \left(\sum_{\tau=1}^t (X_{i\tau} - d_{i\tau}) + \lambda_{it}^d \Gamma_{it}^d + \sum_{\tau=1}^t \mu_{i\tau t}^d \right), \quad i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T} \quad (15)$$

$$H_{it} \geq h_{it}^- \left(- \sum_{\tau=1}^t (X_{i\tau} - d_{i\tau}) + \lambda_{it}^d \Gamma_{it}^d + \sum_{\tau=1}^t \mu_{i\tau t}^d \right), \quad i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T} \quad (16)$$

$$\sum_{\tau=1}^t (X_{i\tau} - d_{i\tau}) + \lambda_{it}^d \Gamma_{it}^d + \sum_{\tau=1}^t \mu_{i\tau t}^d \leq I_{it}^{max}, \quad i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T} \quad (17)$$

$$\lambda_{it}^d + \mu_{i\tau t}^d \geq \hat{d}_{i\tau}, \quad i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \forall \tau \leq t \quad (18)$$

$$\lambda_{it}^d, \mu_{i\tau t}^d \geq 0, \quad i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \forall \tau \leq t. \quad (19)$$

A formulação (14)–(19) assegura que $H_{it} \geq 0$, pois o lado direito das restrições (15) e (16) são sempre não negativos. As inequações 15 e 16 são as restrições de balanceamento de estoque robustas, em que λ_{it}^d e $\mu_{i\tau t}^d$ são as variáveis auxiliares advindas da reformulação robusta. Tais variáveis quantificam a sensibilidade dos custos em relação às variações nos *budgets* de incerteza e à variabilidade dos parâmetros incertos. Ainda, o termo $\lambda_{it}^d \Gamma_{it}^d + \sum_{\tau=1}^t \mu_{i\tau t}^d$ representa o desvio de pior caso da demanda acumulada, com referência ao valor nominal.

Ressalta-se que outros tipos de conjuntos de incerteza podem ser construídos. Por exemplo, em vez de limitar a dispersão acumulada ao longo dos períodos do horizonte de planejamento, i.e., $\sum_{\tau=1}^t |z_{i\tau}| \leq \Gamma_{it}^d, \forall i$, como apresentado, pode-se construir um *budget* de incerteza *entre produtos*, como sugerido no trabalho de Adida e Perakis (2010): $\sum_{i \in \mathcal{I}} |z_{it}| \leq \Gamma_t^d, \forall t$. Esse modelo de incerteza considera que, em um determinado período t , é mais provável que nem todos os produtos tenham suas demandas no pior caso.

4. Resultados Numéricos

Os experimentos computacionais têm o objetivo de analisar o desempenho do modelo de otimização robusta apresentados a partir de um exemplar baseado numa empresa moveleira de pequeno porte. O modelo foi codificado no Sistema de Modelagem Algébrica (GAMS) e resolvido pelo *software* ILOG-Cplex 11.0, usando-se os parâmetros *default* do CPLEX 11.0. Os experimentos foram executados num *notebook* Core 2 Duo 4, 4.0 GB de memória RAM, 2.0 GHz, sob a plataforma Windows VISTA. O exemplar considerado consiste de 3 produtos e 8 períodos do horizonte de planejamento. O custo de preparação para a produção de um produto foi considerado 10 vezes o custo de produção, conforme Gramani et al. (2009). As demandas nominais e os tempos de produção dos três produtos são apresentados na Tabela 2. Mais detalhes sobre os dados utilizados e outros experimentos computacionais podem ser consultados em Alem (2011) e Alem e Morabito (2011), respectivamente.

Produto/Período	1	2	3	4	5	6	7	8	v_i
a5p	34	169	110	60	58	45	70	172	11,34
cmd	13	100	200	116	199	153	26	128	10,32
crd	32	50	134	87	72	70	26	30	10,14

Tabela 2: Demandas nominais d_{it} e tempos de produção v_i (em minutos) do armário de 5 portas (a5p), da cômoda (cmd) e do criado-mudo (crd).

Fixou-se $\hat{d}_{it} = \gamma d_{it}$, em que cada d_{it} é a demanda nominal e $\gamma = 5, 10, 20$ e 30% são os níveis de variabilidade. Os *budgets* de incerteza Γ_{it}^d foram considerados como funções lineares dependentes do tempo, idênticos para todos os produtos i , como proposto no trabalho

de Adida e Perakis (2006): $\Gamma_{it}^d = gt + b$, em que $g, b \geq 0$, e $g < 1$ é necessário para evitar escolhas muito conservadoras para o *budget* de incerteza e, conseqüentemente, tornar as soluções robustas muito conservadoras também. A Tabela 3 ilustra 4 cenários possíveis para Γ_{it}^d , assim como os *budgets* de incerteza acumulados como medidas de conservadorismo de cada cenário, dado por $\sum_{t \in \mathcal{T}} \Gamma_{it}^d$, $i \in \mathcal{I}$. Note que $\Gamma_{it}^d \geq t$ significa que o cenário de pior caso é obtido, i.e., $\tilde{d}_{it} = d_{it} + \hat{d}_{it}$.

	Cenário 1	Cenário 2	Cenário 3	Cenário 4
Γ_{it}^d	$0.5 + 0.1t$	1	$0.5 + 0.5t$	t
$\sum_{t \in \mathcal{T}} \Gamma_{it}^d$	7.6	8	22	36

Tabela 3: Cenários para os *budgets* de incerteza. A primeira linha da tabela mostra a equação dos *budgets* de incerteza como função linear do período do horizonte de planejamento; a segunda linha ilustra o *budget* acumulado ao final do período de planejamento.

Influência do nível de variabilidade e do budget de incerteza no valor ótimo da função objetivo. Como esperado, quando o nível de variabilidade aumenta, o valor ótimo da função objetivo também aumenta. Ao mesmo tempo, quando o *budget* de incerteza aumenta (torna-se mais conservador), os valores ótimos são mais deteriorados. Além disso, os valores ótimos são extremamente sensíveis às escolhas dos *budgets* e dos níveis de variabilidade. A Figura 1 (a, b e c) ilustra o aumento (em %) no valor ótimo da função objetivo para diferentes níveis de variabilidade e *budgets* de incerteza, com base no valor ótimo da função objetivo do problema nominal igual a 132597. Observe na figura a) que para os dois primeiros *budgets* de incerteza menos conservadores, o aumento no valor ótimo pode ser considerado plausível, dado que nenhum ultrapassou o nível de variabilidade. Em b), tomando $\gamma = 5$ e 10% para os dois *budgets* mais conservadores, nota-se que o aumento no valor ótimo já ultrapassa o nível de variabilidade. Em c), confirma-se que para níveis de variabilidade mais elevados, os dois últimos *budgets* causam um aumento demasiado no valor ótimo, que chega a 800% quando $\Gamma_{it} = t$ e $\gamma = 30\%$.

Estudo do nível de serviço. Considerou-se o nível de serviço tipo II (ou taxa de atendimento da demanda) para analisar a fração da demanda atrasada ou perdida, como se segue: $\mathcal{B} = 1 - I^-/D$, em que o total de demanda atrasada é $I^- = \sum_{i,t} I_{it}^-$, com $I_{it}^- = d_{it} - X_{it}$, se $d_{it} > X_{it}$, e $I_{it}^- = 0$, caso contrário. A demanda total foi computada como $D = \sum_{i,t} (d_{it} + \hat{d}_{it})$. A Figura 2 ilustra o nível de serviço para todo γ e Γ . Não foi observado nenhuma relação geral entre o nível de serviço e os parâmetros γ ou Γ . Aparentemente, os melhores níveis de serviço dos cenários 1 e 2 foram obtidos para menores níveis de variabilidade. Nesses casos, incorreu-se em menos de 1% de demanda não atendida. O melhor desempenho relacionado ao nível de serviço foi observado quando $\gamma = 5, 10\%$ e $\Gamma = 1$, que forneceu, aproximadamente, 100% de demanda atendida sem atrasos. Nos cenários 3 e 4, o desempenho do nível de serviço foi similar; aparentemente, melhores níveis de serviço são alcançados quando o nível de variabilidade é menor. O pior desempenho do nível de serviço foi obtido quando $\Gamma = t$ e $\gamma = 30\%$, que produziu apenas 15% de demanda atendida sem atrasos. Em média, os dois cenários mais conservadores atendem apenas 78% da demanda sem atrasos.

Como comparação, foi resolvido o problema nominal usando a demanda de pior caso, i.e., substitui-se a demanda nominal d_{it} por $(d_{it} + \hat{d}_{it})$ e o modelo CLC foi resolvido. Inesperadamente, foram alcançados níveis de serviço superiores a 98% para todos os níveis de variabilidade. Nesse casos, pode-se afirmar que os problemas nominais de pior caso são preferíveis às versões robustas nos cenários 3 e 4, quando apenas os níveis de serviço

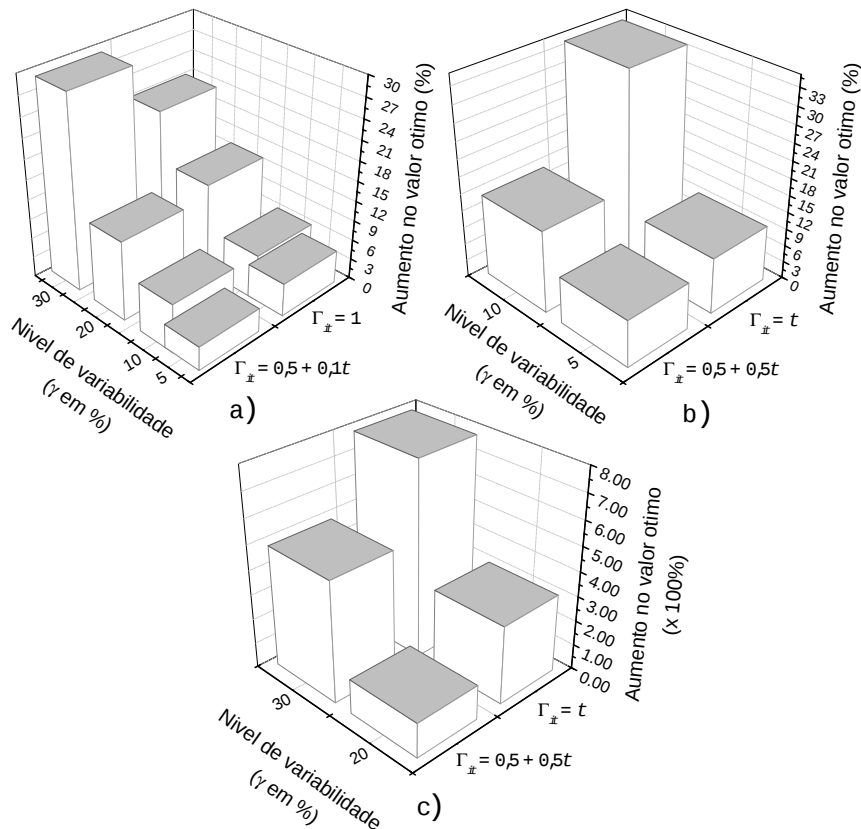


Figura 1: Aumento (em %) no valor ótimo da função objetivo do problema com demanda incerta $CLCd$, considerando a) $\Gamma_{it} = 0, 5 + 0,1t$ e $\Gamma_{it} = 1$ para todos os níveis de variabilidade; b) $\Gamma_{it} = 0, 5 + 0,5t$ e $\Gamma_{it} = t$ para $\gamma = 5$ e 10% ; c) $\Gamma_{it} = 0, 5 + 0,5t$ e $\Gamma_{it} = t$ para $\gamma = 20$ e 30% .

são utilizados para determinar soluções boas e ruins. Em outras palavras, se os *budgets* de incerteza são muito conservadores, pode-se resolver o problema nominal de pior caso, que pode ser visto como uma aproximação do método de Soyster.

Esses resultados sugerem que as soluções robustas provenientes de escolhas muito conservadoras de Γ podem apresentar valores ótimos muito deteriorados e níveis muito altos de demanda atrasada devido ao termo $\lambda_{it}^d \Gamma_{it}^d + \sum_{\tau=1}^t \mu_{it\tau}^d$. De fato, conforme o *budget* de incerteza aumenta, o modelo está mais protegido contra a variação a demanda, i.e., mais desvios da demanda são incorporados pelo modelo pela utilização do termo robusto, o qual está diretamente multiplicado pelo respectivo custo (estoque ou atraso). Além disso, como o estoque é limitado superiormente, a segunda restrição (16) será mais ativada do que (15), o que acarretará mais demanda atrasada. Os resultados confirmam essa situação, como pode ser observado nas Figuras 3 e 4. Nos cenários mais conservadores 3 e 4, há uma visível diferença de comportamento entre os níveis de estoque e falta: enquanto a quantidade de produtos estocados reduz-se significativamente quando maiores variabilidades são consideradas, os atrasos aumentam drasticamente, o que compromete em demasia o nível de serviço. Em particular, quando $\Gamma = t$ e $\gamma = 30\%$, tem-se apenas 772 produtos em estoque (aproximadamente, 11% menos estoque do que na solução nominal) e cerca de 85% da demanda é atrasada (cerca de 30% é totalmente perdida).

Mudanças estruturais na solução. Quando a demanda é incerta, as soluções robustas

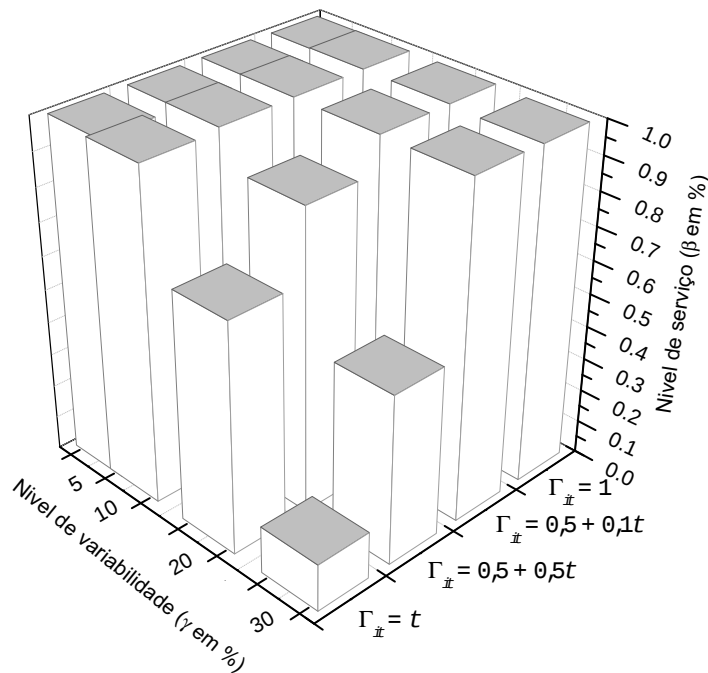


Figura 2: Nível de serviço obtido pelo problema robusto com demanda incerta *CLCd*, considerando vários níveis de variabilidade e *budgets* de incerteza.

podem ser muito diferentes das soluções nominais. Além disso, os *budgets* afetam diretamente as soluções robustas, as quais podem ser significativamente diferentes de acordo com Γ , como já sugerido nos gráficos (veja as Figuras 3–4). Em geral, as soluções robustas estão concentradas acima dos valores nominais. Uma vez que os modelos de otimização robusta são baseados numa perspectiva de pior caso, as demandas sempre assumem valores no intervalo $[d_{it}, d_{it} + \hat{d}_{it}]$. Então, há uma pressão para aumentar o nível de produção, o que geralmente aumenta também a quantidade de placas usadas. As horas-extras aparentemente aumentam quando altos níveis de produção são demandados, mas para uma dada capacidade limite, ambos os níveis de produção e horas-extras diminuem, ao passo que os atrasos crescem drasticamente – fato observado quando *budgets* de incerteza conservadores são adotados. Para ilustrar esse fenômeno, observe as soluções gráficas em relação ao estoque e aos atrasos.

Tempos de execução. Todos os exemplares foram resolvidos em menos de 1 segundo. Em média, os exemplares demoraram 0,43 segundos para atingir a solução ótima. Não foi identificada nenhuma relação entre os tempos de execução e os parâmetros γ ou Γ .

5. Considerações Finais

Nesse trabalho, foi proposto um modelo de otimização robusta para um problema de planejamento da produção típico de empresas moveleiras. A partir dos resultados numéricos, confirmou-se que a seleção de um *budget* de incerteza representativo é crucial, pois uma escolha equivocada e/ou arbitrária pode resultar em soluções robustas extremamente conservadoras, com baixos níveis de serviço e custos totais inaceitáveis. Entretanto, pode não ser uma tarefa simples selecionar *budgets* de incerteza representativos, mesmo para

um especialista (gerente de produção, por exemplo), o que gera a necessidade de resolver o problema várias vezes, considerando-se diferentes cenários para os *budgets*, como foi feito nesse estudo. Como pesquisas futuras, pretende-se combinar várias fontes de incerteza (custos, demandas e tempos de processamento) num único modelo de otimização e considerar a correlação entre as variáveis aleatórias.

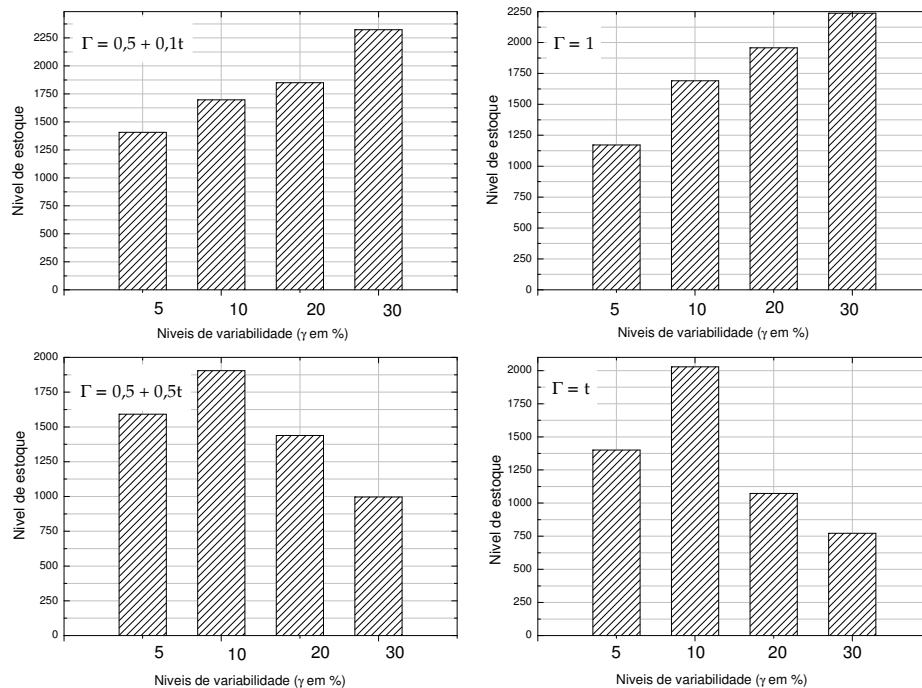


Figura 3: Níveis de estoque obtidos pelo problema *CLCd* com demanda incerta, considerando vários níveis de variabilidade e *budgets* de incerteza.

6. Referências Bibliográficas

- Adida, E. e Perakis, G.** (2006), A robust optimization approach to dynamic pricing and inventory control with no backorders, *Mathematical Programming Series B* 107, 97–129.
- Adida, E. e Perakis, G.** (2010), Dynamic pricing and inventory control: robust vs. stochastic uncertainty models – a computational study, *Annals of Operations Research* 181(1), 125–157.
- Alem, D. J.** (2011), Programação estocástica e otimização robusta no planejamento da produção de empresas moveleiras, *Tese de Doutorado*, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil.
- Alem, D. J. e Morabito, R.** (2011), Production Planning in furniture settings via robust optimization, *Computers & Operations Research*, artigo aceito, doi: 10.1016/j.cor.2011.02.022.
- Ben-Tal, A. e Nemirovski, A.** (2000), Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data., *Mathematical Programming Series B* 88, 411–424.
- Bertsimas, D. e Thiele, A.** (2006), A robust optimization approach to inventory theory, *Operations Research* 54(1), 150–168.
- dos Santos, S. M. P. G.** (2008), Modelagem do problema integrado de dimensionamento do lotes e corte de estoque numa indústria moveleira, *Dissertação de Mestrado*, Ibilce-Unesp.

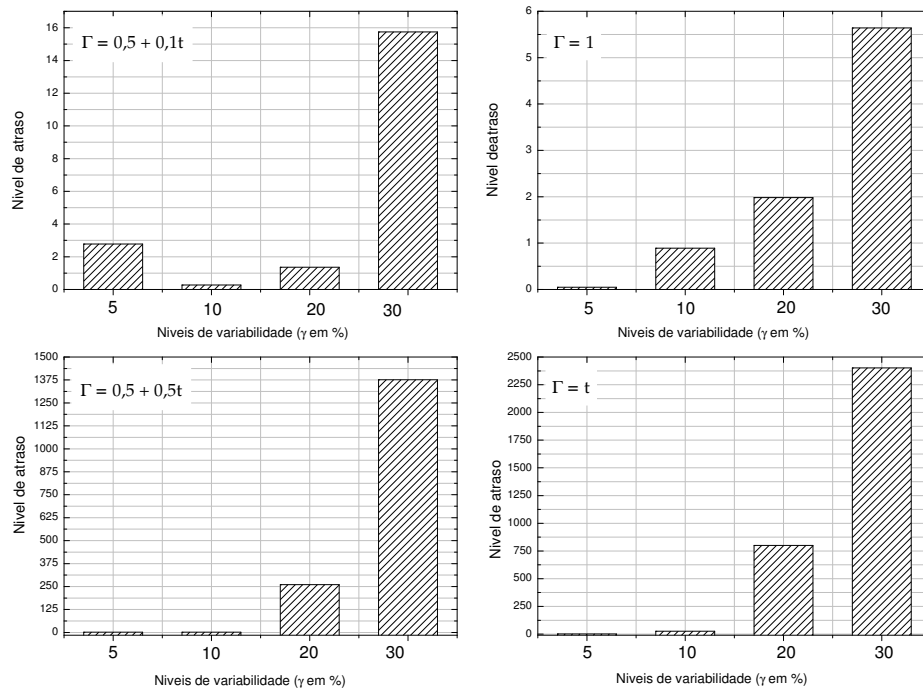


Figura 4: Níveis de atraso obtidos pelo problema *CLCd* com demanda incerta, considerando vários níveis de variabilidade e *budgets* de incerteza.

Ghidini, C. T. L. S., Alem, D. e Arenales, M. (2007), Solving a combined cutting stock and lot-sizing problem in small furniture industries, *Proceedings of the 6th International Conference on Operational Research for Development (ICORD-VI)*, Fortaleza, Brazil.

Gramani, M. e França, P. (2006), The combined cutting stock and lot-sizing problem in industrial process, *European Journal of Operational Research* 174, 509–521.

Gramani, M., França, P. e Arenales, M. (2009), A lagrangian relaxation approach to a coupled lot-sizing and cutting stock problem, *International Journal of Production Economics* 119(2), 219–227.

Nonas, S. L. e Thorstenson, A. (2008), Solving a combined cutting-stock and lotsizing problem with a column generating procedure, *Computers & Operations Research* 35(10), 3371–3392.

Poltroniere, S., Poldi, K., Toledo, F. e Arenales, M. (2008), A coupling cutting stock-lot sizing problem in the paper industry, *Annals of Operations Research* 157(1), 91–104.