Partição dos grafos P_4-laden em conjuntos independentes e cliques

Raquel Bravo[1], Sulamita Klein[1], Samuel Nascimento[2], Loana Nogueira[3], Fábio Protti[3], Rudini Sampaio[2]

[1]Universidade Federal do Rio de Janeiro
[2]Universidade Federal do Ceará
[3]Universidade Federal Fluminense

[1]{raquelbr,sula}@cos.ufrj.br,
[2]{sammueln,rudini}@lia.ufc.br,
[3]{loana,fabio}@ic.uff.br

Resumo

Uma (k,ℓ)-cocoloração de um grafo G é uma partição do conjunto de vértices de G em no máximo k conjuntos independentes e ℓ cliques. O número cocromático de um grafo G é o menor número $z(G)$ tal que G possui uma (k,ℓ)-cocoloração satisfazendo $z(G) = k + \ell$. Sabe-se que decidir se um grafo possui uma (k,ℓ)-cocoloração é NP-Completo bem como determinar $z(G)$ é NP-Difícil. Um grafo G é P_4-laden se todo subgrafo induzido de G com até seis vértices contém no máximo dois P_4's induzidos ou é um grafo split. Neste artigo, obtemos um algoritmo linear para decidir se, dado $k,\ell \geq 0$, um grafo P_4-laden possui uma (k,ℓ)-cocoloração. Consequentemente, obtemos um algoritmo polinomial para determinar o número cocromático de grafos P_4-laden.

PALAVRAS-CHAVE: cocoloração, número cocromático, grafos P_4-laden, decomposição primeval.
ÁREA: Teoria e Algoritmos em Grafos (TAG).

Abstract

A (k,ℓ)-cocoloring of a graph G is a partition of the vertex set of G in at most k independent sets and ℓ cliques. The cochromatic number of a graph G is the least number $z(G)$ such that G has a (k,ℓ)-cocoloring satisfying $z(G) = k + \ell$. It is known that deciding if a graph is (k,ℓ)-cocolorable is NP-Complete, and determining $z(G)$ is NP-Hard. A graph G is P_4-laden if every induced subgraph of G with at most six vertices that contains more than two induced P_4's is a split graph. In this paper, we obtain a linear time algorithm to decide if, given $k,\ell \geq 0$, a P_4-laden graph is (k,ℓ)-cocolorable. Consequently, we obtain a polinomial time algorithm to determine the cochromatic number of a P_4-laden graph.

KEYWORDS: cocoloring, cochromatic number, P_4-laden graphs, primeval decomposition.
AREA: Graph Theory and Algorithms.

1 Introdução

Dado um grafo $G = (V, E)$, uma partição de G é uma família de subconjuntos $V_1, \ldots, V_t \subseteq V$ tais que $V_1 \cup V_2 \cup \ldots V_t = V$ e $V_i \cap V_j = \emptyset$ para todo $1 \leq i < j \leq t$. O complemento $\overline{G} = (V, \overline{E})$ de $G = (V, E)$ é o grafo tal que $xy \in \overline{E}$ se e só se $xy \notin E$.

Muitos problemas difíceis em grafos, tais como o problema de coloração e o problema de cobertura, podem ser vistos como problemas de partição. Geralmente, o objetivo de um problema de partição é particionar o conjunto de vértices em subconjuntos disjuntos (ou *classes*) que satisfaçam certas restrições. Tais restrições podem ser *internas*, como no caso de uma coloração (onde se obriga que cada classe seja um conjunto independente), ou *externas*, como no caso de colorações acíclicas (onde é proibido haver ciclos entre duas classes. Um problema de partição interessante para estudo é o problema da partição em conjuntos independentes e cliques.

Dizemos que um grafo é (k, ℓ)-cocolorível se o seu conjunto de vértices pode ser particionado em no máximo k conjuntos independentes e ℓ cliques. O número cocromático de um grafo G é o menor número $z(G)$ tal que G é (k, ℓ)-cocolorível satisfazendo $z(G) = k + \ell$ [Gimbel, 1984]. Como exemplo, os grafos $(1, 1)$-cocoloríveis são chamados grafos split.

Em [Bransdstädt, 1996, Bransdstädt, 1998], Brandstädt obteve um algoritmo polinomial para decidir se um grafo é $(2, 2)$-cocolorível e provou que é NP-Completo decidir se um grafo é (k, ℓ)-cocolorível para $k \geq 3$ ou $\ell \geq 3$. Desde então, o problema de decidir se um grafo possui uma (k, ℓ)-cocoloração para $k \geq 3$ ou $\ell \geq 3$ tem sido bastante estudado. Recentemente, provou-se que esse problema é polinomial para grafos cordais [Hell et al., 2004], cografos [Bravo et al., 2005, Demange et al., 2005], grafos P_4-esparsos [Bravo et al., 2011] e grafos P_4-tidy [Bravo et al., 2010]. Esse problema também foi estudado para grafos perfeitos em [Feder e Hell, 2005].

Neste artigo, estudamos o problema de cocoloração para a classe dos grafos P_4-laden, que são grafos tais que todo subgrafo induzido de até seis vértices contém no máximo dois P_4's induzidos ou é um grafo split. Esta classe de grafos foi introduzida em [Giakoumakis, 1996]. Nosso resultado principal consiste na obtenção de um algoritmo linear para decidir se um grafo P_4-laden é (k, ℓ)-cocolorível para $k, \ell \geq 0$. Consequentemente, obtemos um algoritmo polinomial para calcular o número cocromático dos grafos P_4-laden.

Seja $n > 1$. O grafo K_n é o grafo completo com n vértices (todas as arestas possiveis existem). O grafo P_n é um caminho com n vértices, ou seja, é o grafo com vértices $v_1, \ldots, v_n$ e arestas $v_i v_{i+1}$ para $i = 1, \ldots, n-1$. Os vértices v_1 e v_n são chamados *extremidades* e os demais são *internos*. O grafo C_n é um ciclo com n vértices, ou seja, é o grafo obtido de P_n adicionando-se a aresta $v_1 v_n$.

2 Estrutura dos grafos P_4-laden

Os grafos P_4-laden foram caracterizados por Giakoumakis [Giakoumakis, 1996] através da técnica de decomposição modular e por meio de grafos especiais, chamados aqui *quase-aranhas* e *besouros*.

Dado um grafo split G com partição $(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ dos vértices, onde $\mathcal{S}$ é um conjunto independente e $\mathcal{C}$ é uma clique, dizemos que G é *original* se todo vértice de $\mathcal{S}$ possui um não vizinho em $\mathcal{C}$ e todo vértice de $\mathcal{C}$ possui um vizinho em $\mathcal{S}$. Dizemos que um grafo G é um *besouro* se o seu conjunto de vértices possui uma partição $(\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{R})$ tal que $\mathcal{S}$ induz um conjunto independente,

$\mathcal{C}$ induz uma clique, todo vértice de $\mathcal{R}$ é adjacente aos vértices de $\mathcal{C}$ e não-adjacente aos vértices de $\mathcal{S}$, e $\mathcal{S} \cup \mathcal{C}$ induz um grafo split original.

Podemos visualizar $\mathcal{S}, \mathcal{C}$ e $\mathcal{R}$ respectivamente como as pernas, o corpo e a cabeça do besouro. Note que $\mathcal{R}$ pode ser vazio e, nesse caso, dizemos que o besouro é sem cabeça. Observe que o complemento de um besouro é também um besouro.

Dizemos que um besouro G é uma *aranha* $(\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{R})$ se $|\mathcal{S}| = |\mathcal{C}| = k > 1$, $\mathcal{S} = \{s_1, \ldots, s_k\}$ e $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_k\}$, onde

(a) s_i é adjacente a c_j se e só se $i = j$, para todos $1 \leq i, j \leq k$ (*aranha magra*); ou

(b) s_i é adjacente a c_j se e só se $i \neq j$, para todos $1 \leq i, j \leq k$ (*aranha gorda*)

Observe que o complemento de uma aranha magra é uma aranha gorda e vice-versa.

Uma *quase-aranha* é um grafo obtido de uma aranha $(\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{R})$ com no máximo um vértice de $\mathcal{S} \cup \mathcal{C}$ substituído por um grafo K_2 ou $\overline{K_2}$ (respeitando-se as adjacências). Claramente toda aranha é uma quase-aranha.

Com isso, [Giakoumakis, 1996] obteve uma caracterização dos grafos P_4-laden. A *união disjunta* (ou simplesmente *união*) de dois grafos G_1 e G_2 é o grafo $G_1 \cup G_2$, onde $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ e $E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$. A *junção* (ou *join*) de dois grafos G_1 e G_2 é o grafo $G_1 + G_2$, onde $V(G_1 + G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ e $E(G_1 + G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup V(G_1) \times V(G_2)$. Em outras palavras, a operação de junção pode ser vista como a operação de união com a inclusão de todas as arestas possíveis entre G_1 e G_2.

Teorema 2.1 ([Giakoumakis, 1996]). *Um grafo G é P_4-laden se e só se exatamente uma das condições abaixo é satisfeita:*

(a) G é a união disjunta de dois ou mais grafos P_4-laden.

(b) G é a junção de dois ou mais grafos P_4-laden.

(c) G é uma quase-aranha, tal que a cabeça induz um grafo P_4-laden.

(d) G é um besouro, tal que a cabeça induz um grafo P_4-laden.

(e) G é isomorfo a P_5 ou $\overline{P_5}$.

(f) $V(G)$ é vazio ou tem apenas um elemento.

O teorema acima sugere de forma natural um esquema de decomposição para grafos P_4-laden. Seja T_G a árvore da decomposição de um grafo P_4-laden G, denominada árvore *primeval*. Cada nó u de T_G representa um subgrafo induzido $G(u)$ de G. A raiz r de $T(G)$ representa o grafo original $G = G(r)$. As folhas podem representar apenas P_5's, $\overline{P_5}$'s, besouros ou quase-aranhas sem cabeça. Os nós de T_G que não são folhas são chamados *internos*. De acordo com [Giakoumakis, 1996], a árvore T_G pode ser obtida em tempo linear. Para maiores detalhes dessas classes, como definições, exemplos e imagens, recomendamos o excelente survey de [Pedrotti, 2007].

3 (k, ℓ)-cocoloração de grafos P_4-laden para $k, \ell \geq 2$

Nesta seção, apresentamos um algoritmo polinomial de reconhecimento dos grafos P_4-laden (k, ℓ)-cocoloríveis para $k, \ell \geq 2$. A ideia principal consiste em, dado grafo P_4-laden G, remover todos os seus P_4's induzidos, transformando-o assim em um cografo G^*. Provaremos que, para $k, \ell \geq 2$, G é (k, ℓ)-cocolorível se e só se G^* é (k, ℓ)-cocolorível. Isso é suficiente, visto que reconhecer cografos (k, ℓ)-cocoloríveis é um problema solucionável em tempo polinomial [Bravo et al., 2005, Demange et al., 2005].

É fácil ver que um grafo G é P_4-laden se e só se $\overline{G}$ é P_4-laden, e que um grafo G é (k, ℓ)-cocolorível se e só se $\overline{G}$ é (ℓ, k)-cocolorível. Além disso, se G é (k, ℓ)-cocolorível, então $G \cup \overline{K_n}$ é $(k+1, \ell)$-cocolorível e $G \cup K_n$ é $(k, \ell+1)$-cocolorível.

Seja G um grafo P_4-laden. Nossa estratégia consiste na construção de um cografo auxiliar G^* de tal forma que G é (k, ℓ)-cocolorível se e só se G^* é (k, ℓ)-cocolorível.

Seja T_G a árvore primeval de G. Para cada nó u de T_G, aplique as regras abaixo, onde $G(u)$ é o subgrafo induzido de G representado por u. Seja G^* o grafo resultante. Para simplificar, considere o grafo P_5 com arestas ab, bc, cd e de, o grafo $\overline{P_5}$ com arestas ac, ad, ae, bd, be e ce.

Regra 1: Se $G(u)$ é isomorfo ao P_5: Remova a aresta bc.

Regra 2: Se $G(u)$ é isomorfo ao $\overline{P_5}$: Adicione a aresta bc.

Regra 3: Se $G(u)$ é uma quase-aranha $(\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{R})$: Remova (se magra) ou adicione (se gorda) todas as arestas entre $\mathcal{S}$ e $\mathcal{C}$.

Regra 4: Se $G(u)$ é um besouro $(\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{R})$: Remova todas as arestas entre $\mathcal{S}$ e $\mathcal{C}$ se o número delas for menor que $|\mathcal{S}| * |\mathcal{C}|/2$. Caso contrário, adicione todas as arestas entre $\mathcal{S}$ e $\mathcal{C}$.

Observe que, por construção, $\overline{(G^*)} = (\overline{G})^*$.

Lema 3.1. *O grafo auxiliar G^* é um cografo.*

Prova. Segue do Teorema 2.1 que todo P_4 induzido de G está em uma quase-aranha sem cabeça, em um besouro sem cabeça, em um P_5 ou em um $\overline{P_5}$. Como as Regras 1 a 4 removem todos os P_4's possiveis de tais subgrafos de G, temos que G^* não possui P_4's e portanto é um cografo. □

Lema 3.2 ([Bravo et al., 2011])**.** *Sejam $k, \ell \geq 2$ inteiros. Seja $G = (\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{R})$ uma quase-aranha ou um besouro. Então G é (k, ℓ)-cocolorível se e só se $G[\mathcal{R}]$ é (k, ℓ)-cocolorível. Além disso, G^* é (k, ℓ)-cocolorível se e só se $G^*[\mathcal{R}]$ é (k, ℓ)-cocolorível.*

Prova. A necessidade segue imediatamente do fato de $G[\mathcal{R}]$ e $G^*[\mathcal{R}]$ serem subgrafos induzidos de G e G^* respectivamente. Suponha então inicialmente que G é um besouro. Do enunciado, assuma que $G[\mathcal{R}]$ é (k, ℓ)-cocolorível. Então $\mathcal{R} = S_1 \cup \cdots \cup S_k \cup C_1 \cup \cdots \cup C_\ell$, onde cada S_i é um conjunto independente e cada C_j é uma clique. Como $\mathcal{S}$ é um conjunto independente e todo vértice de $\mathcal{S}$ é não-adjacente a todo vértice de $\mathcal{R}$, então $S_1 \cup \mathcal{S}$ é um conjunto independente. Analogamente, como $\mathcal{C}$ é uma clique e todo vértice de $\mathcal{C}$ é adjacente a todo vértice de $\mathcal{R}$, então $C_1 \cup \mathcal{C}$ é uma clique. Portanto, G é (k, ℓ)-cocolorível. O mesmo argumento vale para G^*.

Finalmente, se G é uma quase-aranha que não é aranha, o que difere da análise feita acima é um vértice "excedente" $v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{C}$. Se $v \in \mathcal{S}$, então $S_2 \cup \{v\}$ é um conjunto independente.

Se $v \in \mathcal{C}$, então $C_2 \cup \{v\}$ é uma clique. Portanto, G é (k, ℓ)-cocolorível. O mesmo vale para G^*. □

Lema 3.3. *Seja G um grafo isomorfo a P_5 ou $\overline{P_5}$. Então G é (k, ℓ)-cocolorível se e somente se G^* é (k, ℓ)-cocolorível, para quaisquer $k, \ell \geq 0$.*

Prova. Suponha inicialmente G isomorfo a P_5. Então, G e G^* não são (k, ℓ)-cocoloríveis para os seguintes pares da forma (k, ℓ): $(0, 1), (1, 0), (0, 2)$ e $(1, 1)$. Além disso, G e G^* são ambos (k, ℓ)-cocoloríveis para todos os demais casos. Logo, a equivalência do enunciado do lema é verdadeira neste caso. Para G isomorfo a $\overline{P_5}$, uma análise similar pode ser feita. □

Teorema 3.4. *Sejam G um grafo P_4-laden e $k, \ell \geq 2$. Então G é (k, ℓ)-cocolorível se e só se G^* é (k, ℓ)-cocolorível.*

Prova. A prova será por indução no número n de vértices de G. Para $n = 1$, a prova é trivial. Suponha então $n > 1$. Pelo Teorema 2.1, temos quatro casos possiveis:

(a) G é desconexo com p componentes $G_1, \ldots, G_p$. Portanto, G é (k, ℓ)-cocolorível se e só se, para todo $1 \leq i \leq p$, G_i é (k, ℓ_i)-cocolorível para $\sum_{i=1}^{p} \ell_i = \ell$. Pela hipótese indutiva, isso ocorre se e só se $(G_i)^*$ é (k, ℓ_i)-cocolorível para todo $1 \leq i \leq p$, o que é equivalente a dizer que G^* é (k, ℓ)-cocolorível.

(b) $\overline{G}$ é desconexo. Como $\overline{G}$ também é P_4-laden, temos do item (a) que $\overline{G}$ é (ℓ, k)-cocolorível se e só se $(\overline{G})^* = \overline{(G^*)}$ é (ℓ, k)-cocolorível. Ou seja, G é (k, ℓ)-cocolorível se e só se G^* é (k, ℓ)-cocolorível.

(c) G é uma quase-aranha ou um besouro $(\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{R})$. Pelo Lema 3.2, G é (k, ℓ)-cocolorível se e só se $G[\mathcal{R}]$ é (k, ℓ)-cocolorível. Pela hipótese indutiva, isso ocorre se e só se $(G[\mathcal{R}])^* = G^*[\mathcal{R}]$ é (k, ℓ)-cocolorível. Pelo Lema 3.2, isso é equivalente a G^* (k, ℓ)-cocolorível.

(d) G é isomorfo a P_5 ou $\overline{P_5}$. Do Lema 3.3, G e G^* são (k, ℓ)-cocoloríveis, valendo a equivalência.

□

O cografo auxiliar G^* é uma ferramenta fundamental para provar nosso principal resultado.

Teorema 3.5. *Sejam $k, \ell \geq 2$ inteiros. Então, se G é um grafo P_4-laden, podemos decidir em tempo linear se G é ou não (k, ℓ)-cocolorível.*

Prova. Para transformar o grafo G no cografo G^*, utilizamos a decomposição modular de G, obtendo a árvore de decomposição T_G em tempo linear [Giakoumakis, 1996]. Para cada nó u de T_G, aplicamos as Regras 1 a 4 dependendo do grafo $G(u)$. Ao final, verificamos se o cografo resultante é (k, ℓ)-cocolorível, o que também pode ser feito em tempo linear [Bravo et al., 2005, Demange et al., 2005]. □

4 (k, ℓ)-cocoloração de grafos P_4-laden para $k = 1$ ou $\ell = 1$

Dado um grafo G, sejam $\chi(G)$ e $\chi_1(G)$ respectivamente o menor valor k tal que G possui uma $(k, 0)$-cocoloração e uma $(k, 1)$-cocoloração. Claramente, $\chi(G)$ é o número cromático de G.

Nesta seção, mostraremos como determinar χ_1 para união, junção, besouros e quase-aranhas. É fácil ver que, para união e junção, $\chi(G_1 \cup G_2) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$ e $\chi(G_1 + G_2) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$. O lema abaixo prova o resultado análogo para χ_1.

Lema 4.1 (χ_1 para união e junção)**.** *Dados dois grafos G_1 e G_2, temos que*

$$\chi_1(G_1 \cup G_2) = \min\{\max\{\chi_1(G_1), \chi(G_2)\}, \max\{\chi(G_1), \chi_1(G_2)\}\}$$

e

$$\chi_1(G_1 + G_2) = \chi_1(G_1) + \chi_1(G_2),$$

Prova. Em uma $(k, 1)$-cocoloração de $G = G_1 \cup G_2$, claramente o conjunto da partição que induz uma clique deve estar contido em G_1 ou contido em G_2. No primeiro caso, G_1 pode ser particionado em $\chi_1(G_1)$ conjuntos independentes e uma clique e G_2 pode ser particionado em $\chi(G_2)$ conjuntos independentes, cuja união contabiliza $\max\{\chi_1(G_1), \chi(G_2)\}$ conjuntos independentes. No segundo caso, G_1 pode ser particionado em $\chi(G_1)$ conjuntos independentes e G_2 pode ser particionado em $\chi_1(G_2)$ conjuntos independentes e uma clique, cuja união contabiliza $\max\{\chi(G_1), \chi_1(G_2)\}$ conjuntos independentes. Tirando o mínimo entre esses possiveis valores, temos $\chi_1(G)$.

Em uma $(k, 1)$-cocoloração de $G = G_1 + G_2$, cada conjunto independente da partição deve estar contido em G_1 ou contido em G_2. A clique em G pode conter vértices de G_1 e G_2. Portanto, toda $(\chi_1(G), 1)$-cocoloração de G induz uma $(\chi_1(G_1), 1)$-cocoloração de G_1 e uma $(\chi_1(G_2), 1)$-cocoloração de G_2 e vice-versa. Portanto, $\chi_1(G) = \chi_1(G_1) + \chi_1(G_2)$. □

Lema 4.2 (χ_1 para besouros)**.** *Seja G um besouro $(\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{R})$. Se $\chi_1(G[\mathcal{R}]) > 0$, então $\chi_1(G) = \chi_1(G[\mathcal{R}])$. Caso contrário, $\chi_1(G) = 1$.*

Prova. Claramente, qualquer clique de $G[\mathcal{R}]$ juntamente com $\mathcal{C}$ induz uma clique de G e qualquer conjunto independente de $G[\mathcal{R}]$ juntamente com $\mathcal{S}$ induz um conjunto independente de G. Com isso, $\chi_1(G) = \chi_1(G[\mathcal{R}])$ se $\chi_1(G[\mathcal{R}]) > 0$. Caso $\chi_1(G[\mathcal{R}]) = 0$, é preciso um novo conjunto independente para $\mathcal{S}$. □

É fácil ver que, para besouros, $\chi(G) = \chi(G[\mathcal{R}]) + |\mathcal{C}|$ (considerando $\chi(G[\mathcal{R}]) = 1$ se $\mathcal{R} = \emptyset$). Também é fácil calcular $\chi(G)$ para quase-aranhas [Velasquez et al.,2011]. No lema abaixo, observe que, se G é uma quase-aranha que não é um besouro, então $\mathcal{S}$ não é um conjunto independente ou $\mathcal{C}$ não é uma clique.

Lema 4.3 (χ_1 para quase-aranhas)**.** *Seja G uma quase-aranha $(\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{R})$ que não é besouro. Se $\mathcal{C}$ não é uma clique, então $\chi_1(G) = \chi_1(G[\mathcal{R}]) + 1$ (se $\chi_1(G[\mathcal{R}]) > 0$) e $\chi_1(G) = 2$ (caso contrário). Se $\mathcal{S}$ não é um conjunto independente, então $\chi_1(G) = \chi_1(G[\mathcal{R}])$ (se $\chi_1(G[\mathcal{R}]) > 1$) e $\chi_1(G) = 2$ (caso contrário).*

Prova. Como G não é um besouro, $\mathcal{S}$ não é um conjunto independente ou $\mathcal{C}$ não é uma clique. Suponha inicialmente que $\mathcal{C}$ não é uma clique. Pela definição de quase-aranha, existe um vértice $v \in \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{C} - \{v\}$ é uma clique. Logo qualquer clique de $\mathcal{R}$ juntamente com $\mathcal{C} - \{v\}$ forma uma clique de G. Como todo vértice de $\mathcal{R}$ é adjacente a v, v não pode ser acrescentado a nenhum conjunto independente de $\mathcal{R}$. Como existe alguma aresta entre v e $\mathcal{S}$, $\mathcal{S} \cup \{v\}$ não é um conjunto independente. Portanto, um novo conjunto independente é necessário para conter o vértice v. Se $\chi_1(G[\mathcal{R}]) > 0$, podemos incluir $\mathcal{S}$ em qualquer conjunto independente de $\mathcal{R}$. Senão, é preciso um novo conjunto independente para $\mathcal{S}$.

Suponha agora que $\mathcal{S}$ não é um conjunto independente. Pela definição de quase-aranha, existe um vértice $v \in \mathcal{S}$ tal que $\mathcal{S} - \{v\}$ é um conjunto independente. Logo qualquer conjunto independente de $\mathcal{R}$ juntamente com $\mathcal{S} - \{v\}$ ou juntamente com $\{v\}$ forma um conjunto independente de G. Como v possui um não vizinho em $\mathcal{C}$, temos que $\mathcal{C} \cup \{v\}$ não é uma clique. Portanto, $\mathcal{S}$ e $\{v\}$ precisam ser acrescentados a conjuntos independentes diferentes de $\mathcal{R}$. Se $\chi_1(G[\mathcal{R}]) > 1$, então $\chi_1(G) = \chi_1(\mathcal{R})$. Senão, $\chi_1(G) = 2$. □

Teorema 4.4. *Sejam $k, \ell \geq 0$ inteiros. Seja G um grafo P_4-laden. Então podemos decidir em tempo linear se G é ou não $(k, 1)$-cocolorível. Consequentemente, também podemos decidir em tempo linear se G é ou não $(1, \ell)$-cocolorível.*

Prova. Pelo Teorema 2.1 e pelos Lemas 4.1, 4.2 e 4.3, podemos calcular recursivamente $\chi(G)$ e $\chi_1(G)$ usando a árvore de decomposição T_G (basta calculá-los para cada nó de T_G), que já mencionamos pode ser obtida em tempo linear. Se $k \geq \chi_1(G)$ então G é $(k, 1)$-cocolorível. Caso contrário, G não é $(k, 1)$-cocolorível.

Finalmente, G é $(1, \ell)$-cocolorível se e só se $\overline{G}$ é $(\ell, 1)$-cocolorível. Como $\overline{G}$ também é P_4-laden, isso pode ser decidido em tempo linear, visto que os dois parâmetros são obtidos diretamente através dos filhos de cada nó e pelo fato da árvore ter altura linear. □

5 Número cocromático de grafos P_4-laden

Corolário 5.1 (Resultado Principal)**.** *Sejam $k, \ell \geq 0$ inteiros. Então, se G é um grafo P_4-laden, podemos decidir em tempo linear se G é ou não (k, ℓ)-cocolorível. Consequentemente, podemos obter o número cocromático $z(G)$ de G em tempo $O(n^2 m)$.*

Prova. Se $\ell = 0$, basta verificar se $k \geq \chi(G)$, que pode ser calculado em tempo linear. Se $k = 0$, basta verificar se $\ell \geq \chi(\overline{G})$, que pode ser calculado em tempo linear, visto que $\overline{G}$ também é P_4-laden.

Se $k = 1$ ou $\ell = 1$, temos do Teorema 4.4 que é possivel decidir em tempo linear se G é ou não (k, ℓ)-cocolorível. Se $k, \ell \geq 2$, o resultado segue diretamente do Teorema 3.5.

O número cocromático $z(G)$ é o menor valor $k + \ell$ entre todos os pares de inteiros k, l em $\{0, \ldots, n\}$ tal que G é (k, ℓ)-cocolorível. Como temos $O(n^2)$ pares (k, ℓ) e cada teste leva tempo linear $O(m)$, este algoritmo ingênuo requer tempo $O(n^2 m)$, onde m é o número de arestas. □

Referências

[Bransdstädt, 1996] A. Bransdstädt, Partitions of graphs into one or two independent sets and cliques. *Discrete Mathematics* 152 (1996) 47–54.

[Bransdstädt, 1998] A. Bransdstädt, The complexity of some problems related to graph 3-colorability. *Discrete Applied Mathematics* 89 (1998) 59–73.

[Bravo et al., 2005] R.S.F. Bravo, , S. Klein e L.T. Nogueira, Characterizing (k, l)-partitionable cographs. In: *7th International Colloquium on Graph Theory*, 2005, Hyeres, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 22 (2005) 277–280.

[Bravo et al., 2010] R.S.F. Bravo, S. Klein, L.T. Nogueira e F. Protti, Partição dos grafos P_4-tidy em conjuntos independentes e cliques. In: *Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional* (2010).

[Bravo et al., 2011] R.S.F. Bravo, S. Klein, L.T. Nogueira e F. Protti, Characterization and recognition of P_4-sparse graphs partitionable into k independent sets and ℓ cliques. *Discrete Applied Mathematics* 159 (2011) 165–173.

[Demange et al., 2005] M. Demange, T. Ekim e D. de Werra, Partitioning cographs into cliques and stable sets. *Discrete Optimization* 2 (2005) 145–153.

[Feder e Hell, 2005] T. Feder e P. Hell Matrix partitions of perfect graphs. Special Issue of *Discete Mathematics*, in Memory of Claude Berge (2005).

[Giakoumakis, 1996] V. Giakoumakis, P_4-laden graphs: a new class of brittle graphs. *Information Processing Letters* 60 (1996) 29–36.

[Gimbel, 1984] J. Gimbel, *The Chromatic and Cochromatic Number of a Graph*. PhD thesis, Estern Michigan University, 1984.

[Hell et al., 2004] P. Hell, S. Klein, L.T. Nogueira e F. Protti, Partitioning chordal graphs into independent sets and cliques. *Discrete Applied Mathematics* 141 (2004) 185–194.

[Pedrotti, 2007] V. Pedrotti e C. P. Mello, Decomposição modular de grafos não orientados, *Dissertação de Mestrado, UNICAMP* (2007).

[Velasquez et al.,2011] C. I. B. Velasquez, F. Bonomo and I. Koch, On the b-coloring of P4-tidy graphs. *Discrete Applied Mathematics* 159 (2011) 60–68.