

UMA REPRESENTAÇÃO COMPACTA PARA GRAFOS CORDAIS

Clícia V. P. Friedmann
FFP-UERJ
cliciavp@terra.com.br

Abel R. G. Lozano
FFP-UERJ
arglozano@terra.com.br

Lilian Markenzon
NCE-UFRJ
markenzon@nce.ufrj.br

Paulo Renato da Costa Pereira
DPF
paulorenato.prcp@dpf.gov.br

Christina F. E. M. Waga
IME-UERJ
waga@ime.uerj.br

RESUMO

Neste trabalho é apresentada uma representação compacta para grafos cordais que permite a recuperação de diversas propriedades estruturais do grafo tais como um esquema de eliminação perfeita e uma árvore de cliques. São também obtidos resultados a respeito da ordem e do tamanho do grafo.

PALAVRAS CHAVE. Grafos cordais, Representação, Propriedades estruturais.

ABSTRACT

In this paper, a compact representation for chordal graphs is presented. It provides the means to deduce several structural properties of a chordal graph such as a perfect elimination ordering and a clique tree. Results about the order and the size of the graph are also obtained.

KEYWORDS. Chordal graphs, Representation, Structural properties.

1. Introdução

Muitas aplicações envolvem grafos muito grandes e, neste caso, uma representação adequada do grafo não só afeta a eficiência do algoritmo proposto para a aplicação, como torna a implementação do mesmo mais fácil. Neste trabalho é apresentada uma nova representação para grafos cordais e também suas propriedades.

Blair e Peyton (1993) ressaltam a importância da árvore de cliques para o estudo de grafos cordais, mencionando que esta pode ser tratada como uma representação para o grafo. Definem, ainda, a propriedade *RIP* (do inglês *running intersection property*) para as cliques maximais da família. Uma representação compacta baseada nestes conceitos é então aqui proposta para grafos cordais. Apesar de a representação economizar significativamente espaço de armazenamento no computador, sua vantagem principal é o imediato reconhecimento de importantes propriedades estruturais do grafo representado. Uma primeira abordagem do assunto foi apresentada em Markenzon e Pereira (2008). O estudo de outra representação para grafos cordais baseada em conceitos semelhantes pode ser encontrado em Markenzon e Vernet (2006).

2. Conceitos Básicos

Um grafo é dito *cordal* quando todo ciclo de comprimento maior do que 4 tem ao menos uma corda, isto é, uma aresta ligando dois vértices não consecutivos no ciclo. Conceitos básicos e propriedades de grafos cordais são encontrados em Golumbic (2004) e Blair e Peyton (1993). Ao longo deste trabalho, todos os grafos são supostos conexos.

Seja $G(V, E)$ um grafo, $|V| = n$ sua *ordem* e $|E| = m$ seu *tamanho*. Um vértice $v \in V$ é *simplicial* quando seu conjunto de adjacência $Adj(v)$ é uma clique em G , isto é, o subgrafo de G induzido por $Adj(v)$, $G[Adj(v)]$, é um grafo completo. Um *esquema de eliminação perfeita* (*EEP*) de G é uma função bijetora $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow V$ tal que $\sigma(i)$ é um vértice simplicial em $G[\{\sigma(i); i \leq j \leq n\}]$, para $i = 1, \dots, n$. O conjunto $X_\sigma(v) = \{u \in Adj(v); \sigma^{-1}(v) < \sigma^{-1}(u)\}$ é denominado *conjunto de adjacência restrita* de v .

Um subconjunto $S \subset V$ é um *separador* de G se dois vértices não adjacentes pertencentes à mesma componente conexa de G estão em componentes conexas distintas de $G[V - S]$; diz-se também que S *separa* o grafo. O conjunto S é um *separador minimal* de G se S é um separador e nenhum subconjunto próprio de S separa o grafo. Um subconjunto $S \subset V$ é um *separador de vértices* para vértices não adjacentes u e v (representado por *uv-separador*) se a remoção de S do grafo separa u e v em componentes conexas distintas. Se nenhum subconjunto próprio de S é um *uv-separador*, S é chamado *uv-separador minimal*. Quando o par de vértices não é identificado, S é chamado *separador minimal de vértices*. Observe que, um separador minimal de G é um separador minimal de vértices, mas a recíproca nem sempre é verdadeira.

Dado um grafo cordal conexo $G(V, E)$ o *grafo de interseção de cliques* de G é o grafo conexo valorado tal que seus vértices são as cliques maximais de G e suas arestas ligam vértices que correspondem a cliques não disjuntas. A cada aresta é atribuído um peso inteiro, dado pela cardinalidade do conjunto interseção das cliques maximais que correspondem às suas extremidades. A árvore de peso máximo deste grafo é chamada *árvore de cliques*.

Segundo Blair e Peyton (1993), uma ordenação total das cliques maximais $Q_1, Q_2, \dots, Q_q$ possui a propriedade *RIP* (do inglês *running intersection property*) se para cada clique Q_j , $2 \leq j \leq q$, existe uma clique Q_i , $1 \leq i \leq j-1$, tal que $Q_j \cap (Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_{j-1}) \subset Q_i$.

Os próximos resultados, ainda de Blair e Peyton (1993), relacionam cliques maximais, árvores de cliques e separadores minimais de vértices.

Teorema 1. [Blair e Peyton, 1993] Sejam $G(V, E)$ um grafo cordal e $T(V_T, E_T)$ uma árvore de cliques de G . O conjunto $S \subset V$ é um separador minimal de vértices de G se e somente se $S = Q' \cap Q''$ para alguma aresta $(Q', Q'') \in E_T$.

Teorema 2. [Blair e Peyton, 1993] Seja $G(V, E)$ um grafo cordal. O multiconjunto M de separadores minimais de vértices de G é o mesmo para qualquer árvore de cliques de G .

3. Representação de um Grafo Cordal

Nesta seção, a representação para grafos cordais denominada *representação compacta* é apresentada. Em seguida, são provados teoremas que evidenciam vantagens dessa representação, como por exemplo, algumas propriedades estruturais desses grafos. Ressalta-se ainda que essa representação permite uma resposta eficiente a algumas consultas computacionais tal como verificar a relação de adjacência entre dois vértices.

3.1. Representação Compacta de um Grafo Cordal

Sejam $G(V, E)$ um grafo cordal e $Q = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_q\}$ o conjunto de cliques maximais de G com uma ordenação *RIP*. A *representação compacta* de G é a sequência de pares

$$CR(G) = [(P_j, S_j)], 1 \leq j \leq q,$$

tal que $S_1 = \emptyset$, $S_j = Q_j \cap (Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_{j-1})$ e $P_j = Q_j - S_j$.

É interessante observar que um mesmo grafo cordal pode ter distintas representações compactas tendo em vista que o conjunto de cliques maximais admite mais de uma ordenação *RIP*. O grafo cordal mostrado na Figura 1 admite, entre outras, as duas representações:

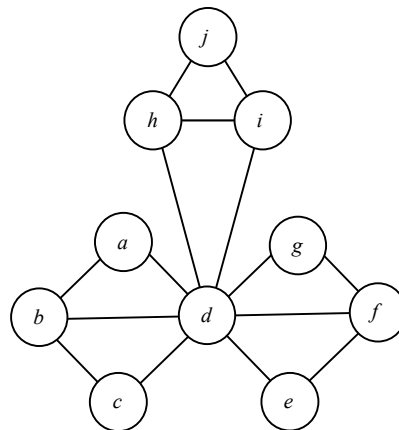


Figura 1

$$CR_1(G) = [(\{a, b, d\}, \emptyset), (\{c\}, \{b, d\}), (\{h, i\}, \{d\}), (\{j\}, \{h, i\}), (\{g, f\}, \{d\}), (\{e\}, \{d, f\})]$$

e

$$CR_2(G) = [(\{a, b, d\}, \emptyset), (\{e, f\}, \{d\}), (\{h, i\}, \{d\}), (\{c\}, \{b, d\}), (\{j\}, \{h, i\}), (\{g\}, \{d, f\})]$$

cujas sequências de cliques maximais estão indicadas na Figura 2(a) e (b), respectivamente.

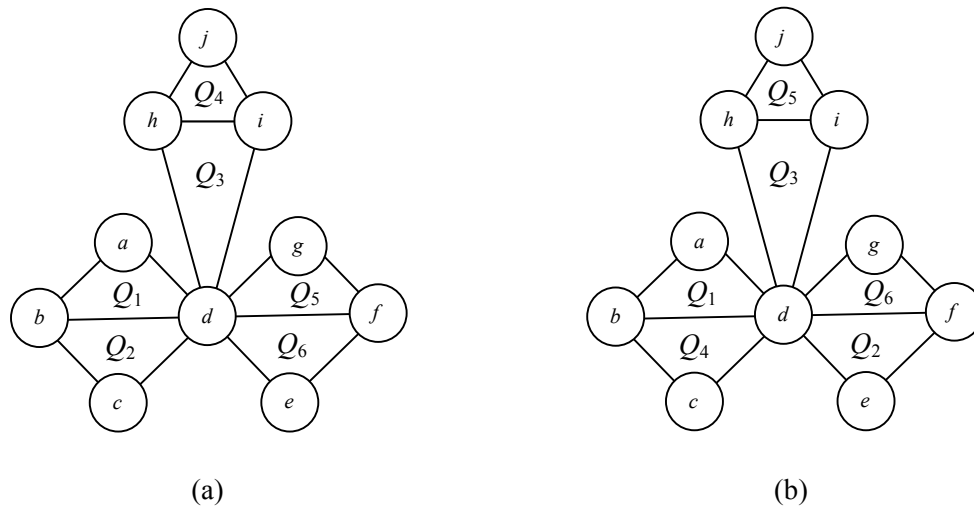


Figura 2

A vantagem mais importante de uma representação compacta de grafos cordais $G(V, E)$ é que ela possibilita a dedução de algumas propriedades estruturais desses grafos. Por exemplo, a partir de uma $CR(G)$, é fácil ver que o conjunto $\{P_1, P_2, \dots, P_q\}$ é uma partição de V e também que as q cliques maximais de G são tais que $Q_1 = P_1 \cup S_1, \dots, Q_q = P_q \cup S_q$.

A geração da representação compacta pode ser implementada de maneira bastante eficiente. Blair e Peyton (1993) provam que a busca de cardinalidade máxima, um algoritmo clássico para o reconhecimento de grafos cordais, exhibe as cliques maximais numa ordem tal que obedece à propriedade *RIP*. Basta então uma modificação nesse algoritmo para que se obtenha a representação desejada; uma primeira implementação pode ser obtida em tempo polinomial. As propriedades apresentadas na próxima seção possibilitam implementações mais eficientes.

3.2. Representação Compacta e Propriedades

A seguir, alguns teoremas sobre propriedades estruturais dos grafos cordais obtidas das representações compactas são apresentados. O primeiro teorema mostra como obter um *EEP* diretamente de uma $CR(G)$.

Teorema 3. Sejam $G(V, E)$ um grafo cordal e sua representação compacta $CR(G) = [(P_1, S_1), \dots, (P_q, S_q)]$. A sequência $[P_q, P_{q-1}, \dots, P_1]$ é um esquema de eliminação perfeita do grafo G .

Prova: Pela definição, $S_j = Q_j \cap (Q_1 \cup \dots \cup Q_{j-1})$ e $P_j = Q_j - S_j$. Então $P_j \cap (Q_1 \cup \dots \cup Q_{j-1}) = \emptyset$ e os vértices de P_j são simpliciais no subgrafo induzido $G[Q_1 \cup \dots \cup Q_j]$. Logo, pela caracterização de grafos cordais, a sequência $[P_q, P_{q-1}, \dots, P_1]$ é um *EEP*. ■

Na realidade, a sequência $[P_q, P_{q-1}, \dots, P_1]$ gera vários *EEP*, visto que os vértices de P_i , $i = 1, \dots, q$, podem aparecer sequencialmente no *EEP* em qualquer ordem. O próximo teorema mostra como uma árvore de cliques do grafo G pode ser construída.

Teorema 4. Sejam $G(V, E)$ um grafo cordal e sua representação compacta $CR(G) = [(P_1, S_1), \dots, (P_q, S_q)]$. Existe uma árvore de cliques $T(V_T, E_T)$ associada à representação compacta $CR(G)$ de G .

Prova: Sejam $Q_1 = P_1 \cup S_1, \dots, Q_q = P_q \cup S_q$. Esta sequência de cliques maximais obedece à propriedade *RIP*. Considere, sem perda de generalidade, Q_1 a raiz da árvore T . Suponha que a árvore de cliques está construída para as cliques $Q_1, Q_2, \dots, Q_{q-1}$. A clique Q_q , ao ser considerada, determina um novo vértice da árvore de cliques. Os vértices de P_q não pertencem à $G[Q_1 \cup \dots \cup Q_{q-1}]$. Pela definição da propriedade *RIP*, existe uma clique Q_i tal que $Q_q \cap (Q_1 \cup \dots \cup Q_{q-1}) = S_q \subset Q_i$. A clique Q_q pode então ser incluída na árvore de cliques com a aresta (Q_q, Q_i) uma vez que a interseção $Q_q \cap Q_i$ tem cardinalidade máxima pois os vértices restantes da clique, que formam o conjunto P_q , são simpliciais em G . ■

Observa-se que, de acordo com a prova do Teorema 4, existem diversas cliques maximais que podem ser escolhidas como a clique Q_i , o que indica que existem diferentes árvores de cliques correspondendo à uma sequência que possua a propriedade *RIP*.

A partir da árvore de cliques T , dois resultados importantes sobre separadores minimais de vértices e vértices simpliciais são demonstrados no teorema a seguir.

Teorema 5. Sejam $G(V, E)$ um grafo cordal e sua representação compacta $CR(G) = [(P_1, S_1), \dots, (P_q, S_q)]$. Então,

- i. $M = \{S_2, S_3, \dots, S_q\}$ é o multiconjunto dos separadores minimais de vértices de G .
- ii. $V' = V - \{S_2 \cup S_3 \cup \dots \cup S_q\}$ é o conjunto dos vértices simpliciais de G .

Prova: Considere a árvore de cliques T construída segundo o Teorema 4. Para $2 \leq j \leq q$, existe uma aresta (Q_j, Q_i) na árvore de cliques associada, sendo que $Q_j \cap Q_i = S_j$. Pelo Teorema 1, S_j é um separador minimal de vértices de G .

Cada vértice v do grafo pertence unicamente a um dos conjuntos $P_1, \dots, P_q$. Então, um vértice v aparece apenas numa clique maximal, isto é, v é vértice simplicial se, e somente se, v não pertence a nenhum dos conjuntos $S_2, S_3, \dots, S_q$. ■

A representação compacta de um grafo cordal G apresenta ainda outra vantagem, a facilidade de implementação de consultas (queries). Pode-se considerar, por exemplo, a *consulta de adjacência* (adjacency query), que testa se dois vértices u e v são adjacentes, e é respondida no Teorema 6.

Teorema 6. Sejam $G(V, E)$ um grafo cordal e sua representação compacta $CR(G) = [(P_1, S_1), \dots, (P_q, S_q)]$. Os vértices $u, v \in V$ tais que $u \in P_i$ e $v \in P_j$ são adjacentes se, e somente se,

- i. $i = j$,
- ii. $i < j$ e $u \in S_j$ ou
- iii. $i > j$ e $v \in S_i$.

Prova: Quando $i = j$, u e v são adjacentes porque pertencem a mesma clique maximal Q_i .

Se $i < j$, v é um vértice simplicial no grafo induzido $G[Q_1 \cup \dots \cup Q_j]$ então u e v são adjacentes, caso pertençam à mesma clique maximal Q_j . Uma vez que $u \notin P_j$ e $v \in P_j$ então $u \in S_j$. Pode-se usar um argumento semelhante quando $i > j$. ■

3.3. Representação Compacta e Contagem

Os teoremas a seguir fornecem resultados que relacionam a ordem e o tamanho do grafo com a representação compacta, sendo que eles indicam uma economia de armazenamento em memória do computador dessa representação quando comparada com as usuais como matriz e listas de adjacências.

Os números de vértices e de arestas de um grafo cordal não estão explícitos na sua representação compacta, mas é fácil notar que $n = \sum_{i=1}^q |P_i|$, pois o conjunto $\{P_1, P_2, \dots, P_q\}$ é uma partição de V . O próximo teorema fornece o número de arestas do grafo G . Denota-se $|P_i|$ por p_i e $|S_i|$ por s_i , para $i = 1, \dots, q$.

Teorema 7. Sejam $G(V, E)$ um grafo cordal e sua representação compacta $CR(G) = [(P_1, S_1), \dots, (P_q, S_q)]$. Então,

$$m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q p_i(p_i + 2s_i - 1).$$

Prova: A construção do grafo é feita usando a ordem inversa do EEP , $P_q, \dots, P_1$. Inicialmente, são inseridas as $p_1(p_1 - 1)/2$ arestas da clique maximal P_1 . Para cada P_i , $2 \leq i \leq q$, são inseridas $p_i(p_i - 1)/2 + p_i s_i = p_i(p_i + 2s_i - 1)/2$ arestas. Como $s_1 = 0$, o resultado fica demonstrado. ■

Sejam Q o conjunto das cliques maximais de G e M o multiconjunto dos separadores minimais de vértices, $\beta = \sum_{Y \in Q} |Y|$ e $\alpha = \sum_{X \in M} |X|$. Os valores de α e β são obtidos diretamente da representação compacta $CR(G)$, pois $\alpha = \sum_{i=1}^q |S_i|$ e $\beta = \sum_{i=1}^q |Q_i|$. A representação compacta utiliza então β posições de memória; os próximos resultados quantificam a economia de armazenamento.

Teorema 8. Sejam $G(V, E)$ um grafo cordal e sua representação compacta $CR(G) = [(P_1, S_1), \dots, (P_q, S_q)]$. Então, $\alpha < m$.

Prova: Do Teorema 7, se sabe que $m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q p_i(p_i + 2s_i - 1)$, onde $p_i \geq 1$.

$$\text{Então, } m = \frac{p_1(p_1 - 1)}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^q p_i(p_i + 2s_i - 1).$$

Da $CR(G)$ e do Teorema 5, tem-se que $\alpha = \sum_{i=1}^q |S_i| = \sum_{i=2}^q s_i$, ($s_i = 0$, quando $i = 1$).

Para $2 \leq i \leq q$, $s_i \leq \frac{p_i(p_i + 2s_i - 1)}{2}$ e a igualdade ocorre somente quando $p_i = 1$.

Como $S_2 \subset P_1$ e $s_2 \geq 1$, então $p_1 \geq 2$ e $\frac{p_1(p_1 - 1)}{2} \geq 1$.

Assim, $\alpha = \sum_{i=2}^q s_i \leq \frac{1}{2} \sum_{i=2}^q p_i(p_i + 2s_i - 1)$ e, portanto, $\alpha < m$. ■

Corolário 9. Sejam $G(V, E)$ um grafo cordal e sua representação compacta $CR(G) = [(P_1, S_1), \dots, (P_q, S_q)]$. Então, $\beta < n + m$.

Prova: Dada a $CR(G)$, tem-se que $n = \sum_{i=1}^q |P_i|$ e $\beta = \sum_{i=1}^q |Q_i|$. Além disso, $n + \alpha = \beta$. Como $\alpha < m$, então $\beta < n + m$. ■



4. Conclusão

Neste trabalho, foi apresentada uma representação compacta para um grafo cordal, com vantagens computacionais não só do ponto de vista de economia de memória utilizada, mas também porque permite extrair informações a respeito do grafo de forma rápida e eficiente. Os próximos passos desse trabalho incluem o desenvolvimento de um algoritmo linear para a obtenção da representação.

Agradecimento

Este trabalho contou com o apoio do CNPq, processo 305372/2009-2.

Referências Bibliográficas

Blair, J.R.S. e Peyton, B. (1993), An Introduction to Chordal Graphs and Clique Trees, In: *Graph Theory and Sparse Matrix Computation*, IMA 56, 1-29.

Golumbic, M.C., *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, 2nd edition, Academic Press, New York, 2004.

Markenzon, L. e Vernet, O. (2006), Representações Computacionais de Grafos, In: *Notas em Matemática Aplicada*, Ed. SBMAC, vol. 24.

Markenzon, L. e Pereira, P.R.C. (2008), A Compact Representation for Chordal Graphs, *Proc. of the 7th Cologne-Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization*, CTW 2008, 174-176.