MODELAGEM E SIMULAÇÃO PARA O PROBLEMA DE TREINAMENTO *ON THE JOB*

Glaucia Maria Bressan
Fundação Hermínio Ometto - UNIARARAS
Av. Dr. Maximiliano Baruto, 500 –
Jd. Universitário – Araras - SP - CEP 13607-339
glauciabressan@uniararas.br

Beethoven Adriano de Souza
Fundação Hermínio Ometto - UNIARARAS
Av. Dr. Maximiliano Baruto, 500 –
Jd. Universitário – Araras - SP - CEP 13607-339
beethoven@uniararas.br

RESUMO

Muitos problemas de planejamento da produção podem ser modelados e resolvidos por programação linear, dentre eles, o Problema de Treinamento *On The Job*. Neste contexto, os principais objetivos deste trabalho são (1) propor uma nova modelagem matemática para o problema de Treinamento *On The Job*, representando o caso geral, (2) apresentar a resolução computacional do problema, por meio de um exemplo numérico, e (3) comparar os resultados obtidos do modelo proposto com os resultados do modelo descrito na literatura.

PALAVARAS CHAVE. Programação linear, Treinamento *on the job*, Planejamento da Produção

Área principal (Programação Matemática)

ABSTRACT

Several problems in production planning can be modeled and solved by linear programming, among which, The On The Job Training Problem. In this context, the goals of this work are (1) to propose a new mathematical model for The On The Job Training Problem, representing the general case, (2) to present the computational solution of this problem, using a numerical example, and (3) to compare the obtained results of the proposed model to the results of the model described in the literature.

KEYWORDS. Linear programming, On the job training, Production planning

Main area (Mathematical Programming)

1. Introdução

A Pesquisa Operacional é uma ciência desenvolvida durante a Segunda Guerra Mundial para a resolução de problemas de natureza logística, tática e de estratégia militar, de grande dimensão e complexidade. Esta ciência é aplicada a problemas em que são necessários especificar, quantitativamente, a condução e a coordenação das operações ou atividades dentro de uma organização.

Tendo como foco principal a tomada de decisões, a Pesquisa Operacional destina-se a estruturar e a solucionar modelos quantitativos que possam ser expressos matematicamente, congregando técnicas de modelagem matemática e desenvolvimento de algoritmos. Conforme definem Goldbarg e Luna, 2000, os modelos matemáticos são um veículo para uma visão bem estruturada da realidade, ou seja, são entendidos como representações simplificadas da realidade, mas que preservam uma equivalência adequada.

Composta por métodos matemáticos e estatísticos, os principais modelos de Pesquisa Operacional são denominados de Programação Matemática que, por sua vez, consiste de métodos exatos e envolve, principalmente, modelos de programação linear, não linear (Lachtermacher, 2004 ; Goldbarg e Luna, 2000; Arenales et al, 2007) e inteira (Maculan, 1980). Nos modelos de programação linear, as variáveis são contínuas e apresentam um comportamento linear, tanto em relação às restrições como à função objetivo.

Os modelos de programação linear têm sido amplamente utilizados na prática. Muitas situações podem ser representadas por funções lineares. Os métodos do tipo simplex (inicialmente publicado em 1947) e de pontos interiores (publicado em 1984) são as principais ferramentas computacionais para a resolução de problemas de otimização linear. Exemplos de problemas que podem ser formulados como um problema de otimização linear aparecem nas mais variadas áreas do conhecimento, tais como:

- *Problemas de mistura:* envolvem a composição ligas metálicas, de areias ou de produtos que atendam às especificações desejadas com o menor custo possível. Alguns trabalhos que abordaram este problema: Bornstein e Namen, 2004; Munhoz e Morabito, 2001 e Rocha et al, 2006.

- *Problemas de transporte e designação:* consistem no transporte ou distribuição de produtos dos centros de produção aos mercados consumidores tal que o custo total de transporte seja o menor possível. Estes problemas são estudados desde a década de 1950 e foram recentemente abordados também em: Ghiani et al, 2004; Botter et al, 2006.

- *Planejamento da produção:* o objetivo é decidir quais e quanto fabricar de cada produto de modo a maximizar o lucro da empresa (problema chamado *mix de produção*), determinar o tamanho dos lotes de produção para atender a demanda de modo que a soma dos custos de produção e estocagem seja mínima (dimensionamento de lotes). Alguns trabalhos que tratam do planejamento são: Araújo e Arenales, 2004; Araújo et al, 2004; Gramani e França, 2006; Rangel e Ferreira, 2003.

- *Gestão financeira:* consiste no gerenciamento de fluxo de caixa, para maximizar o fluxo ao final de um horizonte de planejamento. Alguns trabalhos que abordaram este tema são: Golden et al, 1979 e Zenios, 1993.

- *Problemas de corte e empacotamento*: várias indústrias de papel, vidro, plástico, metalúrgicas e moveleiras possuem peças de grandes dimensões (objetos) e de tamanhos padronizados que devem ser cortados em itens menores e de tamanhos variados. O

problema de corte consiste em minimizar a perda de material no processo de corte e o problema de empacotamento consiste em alocar os itens de modo que o espaço vazio entre os objetos seja mínimo.
Alguns trabalhos relacionados com os problemas de corte e empacotamento são: Paiva e Toledo, 2010; Pureza e Morabito, 2006; Bressan e Oliveira, 2002; Bressan e Oliveira, 2004;

A partir dos problemas de planejamento da produção modelados por programação linear, dentre eles, o Problema de Treinamento *On The Job* descrito por Lins e Calôba, 2006, os objetivos deste trabalho são (1) propôr uma nova modelagem matemática para este problema, a qual representa o caso geral e utiliza programação linear; (2) apresentar a resolução computacional do problema, por meio de um exemplo numérico, utilizando o software LINDO, e (3) comparar os resultados obtidos do modelo proposto com o modelo de Lins e Calôba, 2006.

Para a resolução de problemas de grande porte, há uma série de softwares específicos para problemas de programação linear. Um dos mais populares é o LINDO, proveniente da *Lindo Systems*. Uma versão educacional limitada pode ser obtida gratuitamente via download na página da *Lindo Systems* (http://www.lindo.com). O software LINDO, cujas letras significam *Linear, INteractive, and Discrete Optimizer*, é uma poderosa ferramenta para resolver Problemas de Programação linear, inteira e quadrática.

2. Teoria da Dualidade e Sensibilidade

Muitas vezes além de resolver o problema para obter a solução ótima também é importante analisar em quais condições essa solução é válida, e o que aconteceria se os dados do problema sofrem alterações (mudança de preços, valores das restrições são alterados, etc.). Esse tipo de estudo e interpretação dos resultados é chamado de análise de sensibilidade, isto é, quão sensível é a solução respeito as mudanças nos dados. Com o objetivo de estudar as teorias da Dualidade e Sensibilidade e suas aplicações computacionais, primeiramente deve-se definir alguns conceitos importantes, como preço-sombra e custo reduzido.

2.1. Preço-sombra

Os preços-sombra equivalem à solução ótima do dual, onde as constantes das restrições são os coeficientes da função objetivo. Cada variável y_i do dual está relacionada com a restrição i do problema primal. O valor ótimo desta variável, y_i * é justamente o preço-sombra do recurso i.
O preço-sombra para cada recurso mede o valor marginal deste recurso em relação à função objetivo.

2.2. Custo reduzido

Cada variável do problema primal possui um determinado custo reduzido, que significa o total que o seu coeficiente na função objetivo deve melhorar para que ela deixe de ser zero na solução ótima, ou seja, se torne básica; além disso, significa o quanto a função objetivo irá melhorar ou piorar para cada unidade que ela aumente ou diminua.

Cada variável de folga/excesso do dual está diretamente relacionada a uma variável de decisão do primal. Se uma variável de decisão primal for positiva, o valor da variável do dual relacionada será zero, isto é, o custo reduzido será zero. O custo reduzido só se aplica nas variáveis que são nulas na solução ótima. Um estudo mais detalhado sobre Programação Linear é descrito em Arenales et al, 2007.

3. Problema do Treinamento *On the Job*

Em uma empresa, o tipo de treinamento chamado "*on the job*" é aquele em que o funcionário novato (recém contratado) é colocado em treinamento já na função a qual vai exercer, ou já no departamento em que será destinado. Desta forma, o treinamento do novato é feito durante o próprio trabalho e é baseado na observação do desenvolvimento das atividades de outro(s) profissional(ais) atuante(s).

Suponha que uma empresa tenha uma encomenda de produção, podendo contratar e demitir empregados, e que esta empresa realize o treinamento *on the job*, ou seja, funcionários atuantes treinando funcionários novatos reduzem sua produção ou até mesmo deixam de produzir. A modelagem matemática desta situação pode ser formulada como um problema de programação linear (PPL).

3.1. Modelagem Matemática do Problema – Caso Geral

Suponha que uma empresa produza um determinado produto *P* e receba uma encomenda para os próximos n meses, com $n \geq 2$. Inicialmente, esta empresa dispõe de W funcionários e de E_0 unidades do produto *P* em estoque. Os seguintes dados são conhecidos:

a) Cada funcionário produzindo, produz *N* unidades de *P* por mês.
b) O salário mensal de cada funcionário é S.
c) O custo de demissão de cada funcionário é D.
d) O custo de estocagem é C por produto/mês.
e) A multa por atraso na entrega é M por produto/mês.
f) Toda a encomenda deve ser entregue até o final do n-ésimo mês.
g) Cada novo funcionário deve ficar 1 mês em treinamento *on the job.*

A encomenda recebida foi de E_1 unidades de *P* para o 1º mês, E_2 unidades de *P* para o 2º mês, E_3 unidades de *P* para o 3º mês, ... e E_n unidades de *P* para o n-ésimo mês. O problema consiste em formular e resolver um plano de contratação de pessoal e de produção do produto *P*. O objetivo é minimizar todos os custos. Portanto, devem ser definidas as variáveis de decisão, as restrições do problema e a função objetivo.

- *Definição das variáveis de decisão*: os funcionários e a quantidade de produtos podem ser categorizados da seguinte forma:

x_{1j}: funcionários admitidos no mês j
x_{2j}: funcionários demitidos no mês j
x_{3j}: funcionários produzindo no mês j
y_{1j}: Quantidade de produto que sobrou ao final do mês j (estoque)
y_{2j}: Quantidade de produto que faltou ao final do mês j

Todas as variáveis são maiores ou iguais a zero: $x_{ij}\ \forall i,j \geq 0$ e $y_{ij}\ \forall i,j \geq 0$. Além disso, como todos os funcionários admitidos estarão sendo treinados por um funcionário mais experiente da empresa, a variável x_{1j} representa o número de funcionários admitidos, dando treinamento e sendo treinados no mês j, apresentando o mesmo valor para as 3 categorias.

- *Restrições do problema:* o problema apresenta restrições referentes aos funcionários e à produção.

As restrições do balanço de funcionários podem ser descritas da seguinte forma: a quantidade de funcionários no início do mês, menos os demitidos e mais os admitidos é maior ou igual ao número de funcionários que estão produzindo neste mês, mais os que estão em treinamento e os que estão dando treinamento (isto é, 2 vezes o número de funcionários admitidos). Matematicamente, para cada um dos *n* meses de encomenda, tem-se

Mês 1: $W + x_{11} - x_{21} \geq x_{31} + 2x_{11}$
$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq W$

Mês 2: $[W + x_{11} - x_{21}] + x_{12} - x_{22} \geq x_{32} + 2x_{12}$
$x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq W + x_{11} - x_{21}$

Mês 3: $[W + x_{11} - x_{21} + x_{12} - x_{22}] + x_{13} - x_{23} \geq x_{33} + 2x_{13}$
$x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq W + x_{11} + x_{12} - x_{21} - x_{22}$

Mês 4: $[W + x_{11} - x_{21} + x_{12} - x_{22} + x_{13} - x_{23}] + x_{14} - x_{24} \geq x_{34} + 2x_{14}$
$x_{14} + x_{24} + x_{34} \leq W + x_{11} + x_{12} + x_{13} - x_{21} - x_{22} - x_{23}$

Mês *k*: $\sum_{i=1}^{3} x_{ik} \leq W + \sum_{j=1}^{k-1} (x_{1j} - x_{2j}) \quad para\ 2 \leq k \leq n$

As restrições relativas à produção podem ser descritas da seguinte forma: o estoque inicial, mais a produção do mês, menos a encomenda do mês é igual à quantidade de produto que sobrou menos a quantidade que faltou ao final de cada mês. Matematicamente, para cada um dos *n* meses, tem-se

Mês 1: $E_0 + Nx_{31} - E_1 = y_{11} - y_{21}$

Mês 2: $[y_{11} - y_{21}] + Nx_{32} - E_2 = y_{12} - y_{22}$

Mês 3: $[y_{12} - y_{22}] + Nx_{33} - E_3 = y_{13} - y_{23}$

Mês 4: $[y_{13} - y_{23}] + Nx_{34} - E_4 = y_{14} - y_{24}$

Mês *k*: $[y_{1(k-1)} - y_{2(k-1)}] + Nx_{3k} - E_k = y_{1k} - y_{2k}$ para $2 \leq k \leq n$.

Observe ainda que y_{2n} deverá ser igual a zero, pois toda a encomenda deve ser entregue até o final do *n*-ésimo mês, não podendo haver falta.

Salário total dos funcionários é composto pela soma dos salários de todos os funcionários em cada um dos *n* meses.

Mês 1: $S(2x_{11}) + S(W-x_{11}) =$
$S(W + x_{11})$

Mês 2: $S(2x_{12}) + S[(W + x_{11} - x_{21}) - x_{12}] =$
$S(W + x_{11} + x_{12} - x_{21})$

Mês 3: $S(2x_{13}) + S[(W + x_{11} + x_{12} - x_{21} - x_{22}) - x_{13}] =$
$S(W + x_{11} + x_{12} + x_{13} - x_{21} - x_{22})$

Mês 4: $S(2x_{14}) + S[(W + x_{11} + x_{12} + x_{13} - x_{21} - x_{22} - x_{23}) - x_{14}] =$
$S(W + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} - x_{21} - x_{22} - x_{23})$

Mês k: $\text{S.W} + \text{S.}x_{1k} + \text{S}\sum_{j=1}^{k-1}(x_{1j} - x_{2j}) =$

$$\text{S}[\text{W} + x_{1k} + \sum_{j=1}^{k-1}(x_{1j} - x_{2j})] \quad \text{para } 2 \le \text{k} \le \text{n}.$$

Soma dos salários dos n meses : $\text{S.}n.\text{W} + \text{S.}n.x_{11} + \text{S}\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)(x_{1(j+1)} - x_{2j}) =$

$$\text{S}[n.\text{W} + n.x_{11} + \sum_{j=1}^{n-1}(n-j)(x_{1(j+1)} - x_{2j})]$$

- *Função Objetivo:* consiste na minimização de todos os custos que, por sua vez, são compostos de – salários dos funcionários, mais custos de demissão, mais custos de estoques de um período para outro, mais multa por atraso na entrega. Matematicamente, temos a função

$$\text{S}[n.\text{W} + n.x_{11} + \sum_{j=1}^{n-1}(n-j)(x_{1(j+1)} - x_{2j})] + \text{D}\sum_{j=1}^{n} x_{2j} + \text{C}\sum_{j=1}^{n} y_{1j} + \text{M}\sum_{j=1}^{n-1} y_{2j}$$

Observe que a parcela S.n.W é constante, podendo ser retirada da função objetivo para o cálculo da solução ótima e, posteriormente, sendo adicionada ao resultado final.

O Problema do Treinamento *On The Job* pode apresentar outras variantes, como por exemplo, ser modelado com mais de um produto, ou com equipes especializadas em processos específicos, ou seja, processos distintos, com salários distintos.

3.2. Problema do Treinamento *On The Job* – Exemplo Numérico

Como um exemplo do Problema do Treinamento *On the Job* e por motivo de comparação entre as soluções, suponha que uma empresa produza um produto P e receba uma encomenda para os próximos 3 meses. Inicialmente, esta empresa dispõe de 60 funcionários e de 10 unidades do produto P em estoque. Os seguintes dados são conhecidos:

N =8 unidades de P por mês.
S = R$100,00
D = R$300,00
C = R$10,00 por produto/mês
M = R$30,00 por produto/mês
Toda a encomenda deve ser entregue até o final do 3º mês.
E_1 = 600, E_2 =300 e E_3 =1000

Estes dados de entrada do problema contêm os mesmos valores do modelo proposto por Lins e Calôba (2006), para fins de comparação entre soluções, número de variáveis e iterações.

Restrições do problema: Matematicamente, para cada um dos 3 meses de encomenda, tem-se as restrições de balanço de funcionários:

Mês 1: $x_{11} + x_{21} + x_{31} \le 60$

Mês 2: - $x_{11} + x_{21} + x_{12} + x_{22} + x_{32} \le 60$

Mês 3: - $x_{11} + x_{21}$ - $x_{12} + x_{22} + x_{13} + x_{23} + x_{33} \le 60$

Observe que a quantidade de funcionários no início de cada mês, representada entre colchetes, é igual à quantidade de empregados que terminou o mês anterior.

E para cada um dos 3 meses de encomenda, tem-se as restrições relativas à produção:

Mês 1: $10 + 8x_{31} - 600 = y_{11} - y_{21}$

Mês 2: $[y_{11} - y_{21}] + 8x_{32} - 300 = y_{12} - y_{22}$

Mês 3: $[y_{12} - y_{22}] + 8x_{33} - 1000 = y_{13}$

Observe que a quantidade de estoque inicial de cada mês, representada entre colchetes, é igual à quantidade de produtos que terminou o mês imediatamente anterior.

- *Função Objetivo:* as funções relativas aos salários de cada mês são:

  Mês 1: $6000 + 100x_{11}$

  Mês 2: $6000 + 100x_{11} - 100x_{21} + 200x_{12}$

  Mês 3: $6000 + 100x_{11} - 100x_{21} + 100x_{12} - 100x_{22} + 200x_{13}$

  Portanto, a função objetivo é

$$\text{Min } 300x_{11} + 200x_{12} + 100x_{13} + 100x_{21} + 200x_{22} + 300x_{23} + 10y_{11} + 10y_{12} + 10y_{13} + 30y_{21} + 30y_{22}$$

3.3.Resolução do Problema no LINDO 6.1

A modelagem do Problema de Treinamento *On The Job* descrita na Seção 3.2 foi feita no software LINDO 6.1, como pode ser visto na Figura 1.

```
min 300x11+300x12+200x13+100x21+200x22+300x23+10y11+10y12+10y13+30y21+30y22
st
x11+x21+x31<=60
-x11+x21+x12+x22+x32<=60
-x11+x21-x12+x22+x13+x23+x33<=60
8x31-y11+y21=590
y11-y21+8x32-y12+y22=300
y12-y22+8x33-y13=1000
end
```

Figura 1 – Modelagem matemática do Problema de Treinamento On The Job no LINDO 6.1.

Da forma como as variáveis foram definidas, a modelagem do problema apresenta 15 variáveis de decisão. A resposta fornecida pelo Lindo é apresentada na Figura 2. Como o objetivo aqui é analisar a dualidade e a sensibilidade dos parâmetros, não foi aplicado o algoritmo "Branch and Bound" para que fosse obtida a solução inteira das variáveis de decisão.

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 5

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 34375.00

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X11	56.250000	0.000000
X12	0.000000	220.000000
X13	0.000000	740.000000
X21	0.000000	1800.000000
X22	0.000000	1200.000000
X23	0.000000	840.000000
Y11	0.000000	40.000000
Y12	70.000000	0.000000
Y13	0.000000	77.500000
Y21	560.000000	0.000000
Y22	0.000000	40.000000
X31	3.750000	0.000000
X32	116.250000	0.000000
X33	116.250000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	700.000000
3)	0.000000	460.000000
4)	0.000000	540.000000
5)	0.000000	-87.500000
6)	0.000000	-57.500000
7)	0.000000	-67.500000

Figura 2 – Solução do Problema de Treinamento On The Job apresentada pelo LINDO 6.1.

O Lindo também pode apresentar uma análise de sensibilidade. Basta responder "sim" após a pergunta "Do Range (Sensitivity) Analisys?" No momento em que a tela surgir durante uma solicitação de resultados (Solver) ou, então, a qualquer momento, ative a tela de entrada de dados; clique em "Reports", no Menu principal e em seguida clique em "Range".
O relatório de sensitividade tem o formato mostrado a seguir.

RANGES IN WICH THE BASIS IS UNCHANGED: Faixas de valores para os quais a base fica inalterada. É exibida uma análise de validade da solução para os coeficientes das variáveis na função objetivo e para os limites das restrições.

OBJ COEFFICIENT RANGES: Nesta seção serão analisados os coeficientes da função objetivo

RIGHTHAND SIDE RANGES: Aqui teremos uma análise dos limites das restrições, também conhecidos como RHS (Right Hand Side).

Da mesma forma, temos a informação do quanto podemos aumentar (increase) ou diminuir (decrease) o coeficiente conhecido (current).

A análise de sensibilidade para o exemplo numérico do Problema de Treinamento *On The Job* é apresentada na Figura 3.

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X11	300.000000	INFINITY	460.000000
X12	300.000000	INFINITY	220.000000
X13	200.000000	INFINITY	740.000000
X21	100.000000	INFINITY	1800.000000
X22	200.000000	INFINITY	1200.000000
X23	300.000000	INFINITY	840.000000
Y11	10.000000	INFINITY	40.000000
Y12	10.000000	27.500000	40.000000
Y13	10.000000	INFINITY	77.500000
Y21	30.000000	INFINITY	40.000000
Y22	30.000000	INFINITY	40.000000
X31	0.000000	350.000000	INFINITY
X32	0.000000	220.000000	540.000000
X33	0.000000	INFINITY	220.000000

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	60.000000	35.000000	1.875000
3	60.000000	56.250000	3.750000
4	60.000000	56.250000	3.750000
5	590.000000	30.000000	280.000000
6	300.000000	30.000000	450.000000
7	1000.000000	30.000000	450.000000

Figura 3 – Análise de Sensibilidade do Problema de Treinamento On The Job apresentada pelo LINDO

3.4. Resultados Obtidos

Observando a solução apresentada na Figura 2, tem-se que a solução ótima foi obtida na quinta iteração do método simplex, com um custo mínimo de R$34.375,00 para a otimização do plano de contratação de pessoal e de produção do produto *P*.
As variáveis básicas são as variáveis primais $x_{11} = 56{,}25$, $x_{32} = 116{,}25$, $x_{33} = 116{,}25$, $y_{21} = 560$, $y_{12} = 70$, $x_{31} = 3{,}75$ e o restante, que são as variáveis não básicas, apresentam valor nulo. As variáveis listadas na coluna "slack or surplus" são todas nulas, isto é, não há folga em nenhuma restrição. Vale ressaltar que, caso alguma das três primeiras variáveis de folga, referentes às restrições do balanço de funcionários em cada um dos três meses, tivesse valor não nulo, representaria o número de funcionários ociosos no respectivo mês. A coluna do custo reduzido (reduced cost) representa o quanto o coeficiente da função objetivo de uma variável original deve melhorar antes desta variável se tornar básica, por exemplo, se o coeficiente da variável x_{12}, que representa

a quantidade de funcionários admitidos no segundo mês, for diminuída em mais de 220 unidades, esta variável se tornará básica.

A solução ótima do dual é apresentada na coluna "Dual Price", chamada também de preço sombra, que é entendido como o impacto marginal da variação do elemento respectivo das constantes sobre a função objetivo; isto é, representa o quanto a função objetivo (custo) irá diminuir para cada unidade adicionada da variável correspondente, por exemplo, se o número de funcionários no início do 1° mês (60), representado pelo valor da constante da primeira restrição for aumentado em 1 unidade o custo total sofrerá uma redução de R$700,00 ficando em R$33.675 = 34.375 – 700.

Observando a análise de sensibilidade apresentada na Figura 3, primeiramente são dadas as faixas de valores de variação dos coeficientes da função objetivo para as quais a base é inalterada. Por exemplo, para a variável x_{12}, que representa o número de funcionários admitidos no segundo mês, o coeficiente atual é 300. Este valor pode variar de 300 – 220 = 80 até 300 + infinito = infinito que a solução básica será mantida. A mesma idéia é aplicada para analisar os limites das restrições, exibidos na última parte da Figura 3. Por exemplo, a constante da primeira restrição, também chamada de "lado direito (RHS)", tem o valor atual de 60 funcionários. Este valor pode variar de 60 – 1,875 = 58,125 até 60 + 35 = 95 que a solução básica será mantida.

Agora, observe a variável primal y_{12}, que representa a quantidade de produto que sobrou ao final do mês *2* (estoque). O valor atual do coeficiente na função objetivo é 10, podendo aumentar até 10 + 27,5 = 37,5. Se isso ocorrer, o custo total se elevará em 27,5*70 = 1.925 reais, ou seja, 34.375 + 1.925 = R$36.300. Observe ainda que a constante da primeira restrição, que representa o número de funcionários no início do 1° mês (60), pode aumentar até 60 + 35 = 95. Se isso ocorrer, o custo total se reduzirá em 35*700 = 24.500 reais, ou seja, 34.375 – 24.500 = 9.875 reais.

4.Conclusão

A modelagem matemática para o Problema do Treinamento On The Job originalmente proposta por Lins e Calôba (2006), com 60 funcionários iniciais, apresenta a formulação da Figura 4.

```
min
100x31+100x41+100x51+100x61+100x32+100x42+100x52+100x62+100x33+100x43+100x53
+100x63+300x21+300x22+300x23+10y11+10y12+10y13+30y21+30y22+30y23
 st
 x11-x21-x31-x41-x51-x61=-60
 x31+x41+x51+x61+x12-x22-x32-x42-x52-x62=0
 x32+x42+x52+x62+x13-x23-x33-x43-x53-x63=0
 8x31-y11+y21=590
 y11-y21+8x32-y12+y22=300
 y12-y22+8x33-y13+y23=1000
x11-x51=0
x11-x61=0
x12-x52=0
x12-x62=0
x13-x53=0
x13-x63=0
y23=0
 end
```

Figura 4 – Modelagem matemática original do Problema de Treinamento On The Job.

Esta modelagem, com as mesmas instâncias descritas na Seção 3.2, apresenta a mesma solução ótima obtida com o modelo proposto, com as variáveis básicas primais $x_{11} = 56{,}25$, $x_{32} = 116{,}25$, $x_{33} = 116{,}25$, $y_{21} = 560$, $y_{12} = 70$, $x_{31} = 3{,}75$ e o restante $x_{12} = x_{13} = x_{21} = x_{22} = x_{23} = y_{11} = 0$. As vantagens do modelo proposto são o número de iterações e o número de variáveis envolvidas no modelo, conforme ilustra a Tabela 1.

Tabela 1 – Comparação entre os dois modelos matemáticos

	Modelo original	*Modelo proposto*
Número de variáveis	24	15
Número de iterações	9	5

Portanto, a modelagem proposta neste trabalho fornece a mesma solução ótima com um número de variáveis menor e com menos iterações. Observe também que a função objetivo do modelo original apresenta como solução ótima o custo mínimo de R$52.375,00, enquanto que o modelo proposto apresenta R$34.375,00 que, adicionados aos R$18.000,00, correspondentes aos salários S = R$100,00 pagos aos 60 funcionários (R$6.000,00) no início de cada um dos três meses, tem-se o mesmo valor: R$52.375,00.

Referências

.Araújo, S.A., Arenales, M. Planejamento e programação da produção numa fundição cativa automatizada de grande porte. *Investigação Operacional*, 24, 197-210, 2004.

.Araújo, S.A., Arenales, M., Clark, A.R. Dimensionamento de lotes e programação do forno numa fundição de pequeno porte. *Gestão e Produção*, 2:11, 65-176, 2004.

.Arenales, M., Armamento, V., Morabito, R. e Yanasse, H. *Pesquisa Operacional – para cursos de Egenharia*, Elsevier, Rio de Janeiro, 2007.

.Bornstein, C.T., Namen, A.A. Uma ferramenta para avaliação de resultados de diversos modelos de otimização de dietas. *Pesquisa Operacional*, 24, 445-465, 2004.

.Botter, R.C.; Tacla, D. e Hino, C.M. Estudo e aplicação de transporte colaborativo para cargas de grande volume. Pesquisa Operacional, 26:1, 25-49, 2006.

.Bressan, G.M. e Oliveira, A.R.L. Solução de sistemas lineares esparsos – aplicação à programação de lotes e cortes. XXXIV SBPO – Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 8-11 de novembro de 2002.

.Bressan, G.M. e Oliveira, A.R.L. Reordenamento eficiente das colunas básicas na programação de lotes e cortes. *Pesquisa Operacional*, 24:2, 323-337, 2004.

.Ghiani, G., Laporte, G., Musmanno, R. *Introduction to Logistics Systems Planning and Control* . John Wiley e Sons, 2004.

.Goldbarg, M.C. Luna, H.P.L. *Otimização Combinatória e Programação Linear: modelos e algoritmos*, Campus, Rio de Janeiro, 2000.

.Golden, B., Liberatore, M., Lieberman, C. Models and solutions techniques for cash flow management. *Computers and Operations Research*, 6, 13-20, 1979.

.Gramani, M.C.N., França, P.M. The combined cutting stock and lot-sizing problem in industrial processes. *European Journal of Operational Research*, 174:1, 509-521, 2006.

.Lachtermacher, G. *Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões*, Campus, Rio de Janeiro, 2004.

.Lins, M.P.E. e Calôba, G.M. *Programação Linear: com aplicações em teoria dos jogos e avaliação de desempenho*, Interciência, Rio de Janeiro, 2006.

.Maculan Filho, N. e Pereira, M.V.F. *Programação Linear*, Atlas, São Paulo, 1980.

.Munhoz, J.R., Morabito, R. A goal programming model for frozen concentrated orange juice production and distribution system. OPSEARCH 38:6, 630-646, 2001.
.Paiva, R. e Toledo, F. *Local Branching* aplicado ao problema de dimensionamento de lotes. XLII SBPO – Bento Gonçalves, RS, Brasil, 30 de agosto a 03 de setembro de 2010.
.Pureza, V., Morabito, R. Some experiments with a simple tabu search algorithm for the manufacturer´s pallet loading problem. *Computers and Operations Research,* 33, 804-819, 2006.
.Rangel, M.S., Ferreira, D. Um modelo de dimensionamento de lotes para uma fábrica de refrigerantes. *TEMA: Tendências em Matemática Aplicada e Computacional,* 4, 237-246, 2003.
.Rocha Neto, A., Deimling, M.F., Tosati, M.C. Aplicação da programação linear no planejamento e controle de produção: definição do *mix* de produção de uma indústria de bebidas. XIII SIMPEP - Bauru, SP, Brasil, 6 a 8 de Novembro de 2006.
.Zenios, S.A. *Financial Optimization.* Cambridge University Press, 1993.