

## **FRAMEWORK PARA ANÁLISE DA CAPACIDADE DO PROCESSO: FOCO EM DADOS NÃO-NORMAIS.**

**Liane Werner**  
PPGEP/UFRGS

[liane@producao.ufrgs.br](mailto:liane@producao.ufrgs.br)

**Maurício Raymundo Belleza**  
UFRGS

[mr.belleza@gmail.com](mailto:mr.belleza@gmail.com)

**Resumo:** O Controle Estatístico de Processo busca analisar a variação do processo, bem como sua capacidade. A análise da capacidade do processo consiste em utilizar técnicas estatísticas para quantificar sua variabilidade; analisá-la em relação às especificações do produto e auxiliar na eliminação ou redução da variabilidade excessiva. Para tanto, foram criados índices, cuja base é a suposição de que os dados possuem distribuição normal. Porém, tal suposição nem sempre é satisfeita, e o uso desses índices em processos não normais acarreta em uma avaliação incorreta sobre sua capacidade, bem como em diferenças nas proporções de itens não conformes. A fim de evitar distorções, sugere-se utilizar índices para distribuições não normais ou transformar matematicamente os dados em distribuição normal. Este trabalho propõe-se um *framework* para explicar os passos a serem executados, possibilitando uma avaliação adequada da capacidade do processo e uma melhor compreensão sobre como estudos de capacidade são conduzidos.

**Palavras-Chave:** Qualidade, Capacidade do Processo, dados não normais.

**Abstract:** The Statistical Process Control seeks to analyze the process variation, as well as its capability. The process capability analysis consists in utilizing statistical techniques to quantify the process variability, analyzing it when related to the specification limits and assisting the elimination or the reduction of the excessive variability. For this, indices whose basis is the assumption that data are normal were created. However, this assumption isn't always met, and the use of these indices in nonnormal processes incurs in evaluating their capability incorrectly, as well as differences in the proportions of nonconforming items. In order to avoid distortions, indices for nonnormal distributions and mathematical transformations on data are suggested. A framework is proposed to explain the steps to execute, making possible an adequate evaluation of process capability and a better understanding about how capability studies are led.

**Keywords:** Quality, Process Capability, no-normal data.

## 1. Introdução

A determinação clara de objetivos que promovam a alavancagem do desenvolvimento na próxima década, juntamente com o incentivo ao avanço tecnológico, são elementos que necessitam de uma interação entre os diferentes setores produtivos. Tal situação causa impacto indireto na reavaliação dos modos de operação convencionais, além de promover novas atividades que exigem a precisa definição de um sistema que controle as necessidades básicas e procedimentos que fornecem retorno em longo prazo.

Na área industrial o Controle Estatístico de Processo (CEP) é um instrumento que provê este suporte, pois busca analisar a variação que os processos produtivos possam apresentar, separando variabilidade inerente ao processo (as causas comuns) das causas que geram variabilidade excessiva e que são oriundas da alguma anormalidade do processo (causas especiais) (MONTGOMERY, 2004). Além da análise da variação, o CEP visa verificar a capacidade do processo. Segundo Costa et al. (2005) a capacidade do processo consiste na habilidade de produzir itens conformes, mais especificamente, os que se encontram dentro dos limites de especificação do projeto. De acordo com Montgomery (2004), a análise da capacidade do processo consiste em: fazer uso de técnicas estatísticas para quantificar sua variabilidade; analisar esta variabilidade em relação às especificações do produto e auxiliar na eliminação ou redução dessa variabilidade nas fases de desenvolvimento e a fabricação.

Ao se medir quanto os processos conseguem gerar produtos que atendam às especificações de projeto e que estes reflitam os desejos e exigências de seus clientes, faz-se uso dos índices de capacidade do processo (GONZALEZ; WERNER, 2009). Os índices estabelecidos nos estudos de capacidade do processo, ou do inglês *process capability*, procuram detectar dois tipos de problemas. O primeiro é de localização do processo, se o processo atende em média ao valor nominal de especificação, e o segundo, de variabilidade, quando o processo apresenta muita dispersão e não atende as especificações que são estabelecidas no projeto.

O primeiro estudo sobre o assunto é o clássico artigo de Kane (1986) que supõe que o processo em análise apresente distribuição normal e que a característica de qualidade é do tipo nominal com especificações bilaterais. Porém em algumas situações, é desejável atender a uma especificação unilateral, na qual, certamente, um processo não-normal seria desejado. Por exemplo, produtos alimentares, que são obrigados por lei a ter certo peso, por causa do custo, terão uma quantidade mais próxima desse peso, o que certamente irá gerar um processo com assimetria (não-normal). Sendo assim, é importante que se busquem alternativas para atender a este tipo de situação, visando minimizar conclusões errôneas na análise da capacidade (GONZALEZ & WERNER, 2009).

Segundo Ahmad *et al.* (2007) em processos reais, é comum não haver satisfação da suposição de que os dados do processo possuem distribuição normal. Corroborando com esta constatação para Miranda (2005) mesmo com o sucesso obtido por várias empresas brasileiras, que utilizaram os índices de análise da capacidade de processos desenvolvidos para dados com distribuição normal, existem ainda muitas críticas e descrença quanto ao uso da desses para avaliar a capacidade de processos produtivos. Estas críticas se devem principalmente pela utilização incorreta dos índices, que necessitam do conhecimento de suas propriedades estatísticas para avaliação mais correta da real capacidade. Sendo assim, o estudo dos índices de capacidade quando o processo não é normalmente distribuído contribui para a correta verificação do verdadeiro potencial do processo em relação às especificações.

Conforme Chen et al. (2003), índices de capacidade do processo, que estabelecem relações entre o seu verdadeiro desempenho e as especificações de fabricação, têm sido o foco de pesquisas na área da qualidade e na análise de capacidade. Esses índices de capacidade, que quantificam o potencial e o desempenho do processo, são essenciais para o sucesso nas atividades de melhoria da qualidade e na implementação de programas de qualidade.

Existem vários índices para medir a capacidade de o processo produzir itens de acordo com as especificações pré-definidas, sendo que os índices convencionais  $C_p$  e  $C_{pk}$  são os precursores, após Chan et al. (1988) propuseram o índice  $C_{pm}$ , e por fim o índice  $C_{pmk}$  estruturado por Pearn et al. (1992).

Os índices de capacidade do processo foram construídos com base nas suposições de que a característica de qualidade possui limites bilaterais de especificação e que os dados do processo devem apresentar distribuição normal. Conforme Gonzales e Werner (2009), ao se utilizar os índices convencionais poderá se incorrer em riscos de concluir que o processo é capaz quando na realidade não é. Oliveira (2005) também partilha da idéia de quando a distribuição não é normal incorre-se em erros, pois a probabilidade de se obter itens fora da especificação é diferente da assumida usando uma distribuição normal. O fato é agravado quando se têm distribuições muito diferentes da normal como os que mostrados na Figura 1.

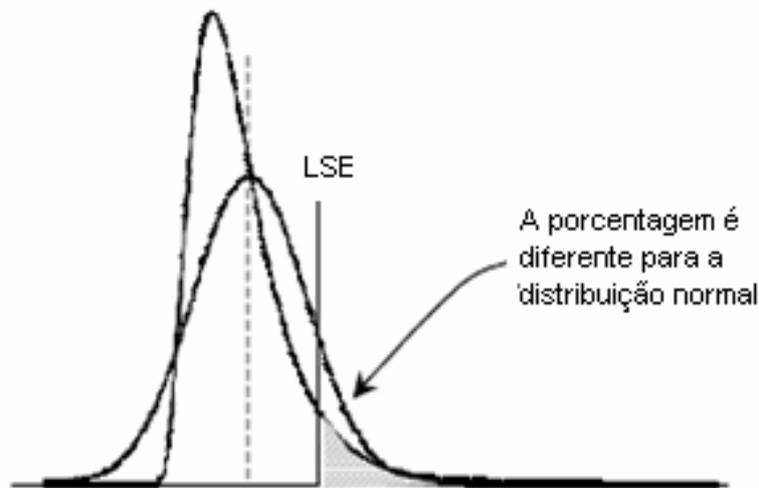


Figura 1: Diferença entre os processos quando assumido como distribuição normal e com uma distribuição não normal. Fonte: Adaptado de Oliveira (2005)

Observa-se que se os dados não apresentam distribuição normal é necessário dar um tratamento diferenciado. Sendo assim, o objetivo deste artigo é propor um *framework* de como analisar a capacidade do processo, explorando os métodos de análise da capacidade do processo para quando os dados não apresentam comportamento normal.

## 2. Proposta de um *framework* para analisar a capacidade do processo

Para proceder com o estudo da capacidade do processo sugere-se o *framework* apresentado na Figura 2. Ao descrever o *framework* proposto tem-se como primeiro passo a coleta de uma amostra representativa do processo com vistas à análise da capacidade do processo. O próximo passo consiste em averiguar se os dados são provenientes de uma distribuição normal. Para o caso dos dados se ajustarem à distribuição normal, os índices convencionais de capacidade são calculados. Caso os dados não se ajustem à distribuição normal, realizam-se testes de ajustes buscando uma distribuição conhecida que represente os dados. Caso a distribuição dos dados não seja conhecida, a alternativa é buscar uma transformação para obtenção da normalidade e, ao fazer novamente a verificação da normalidade dos dados, em caso negativo tenta-se nova transformação, agora em caso positivo, nesta situação, calculam-se os índices convencionais. Agora caso a distribuição dos dados seja não-normal e conhecida, têm-se duas opções distintas para a análise: (i) fazer uso de índices de capacidade específicos para distribuições não-normais, ou (ii) aplica-se algum método matemático de transformação de dados e após uma nova verificação de que os dados transformados tenham distribuição normal, utilizam-se os índices convencionais.

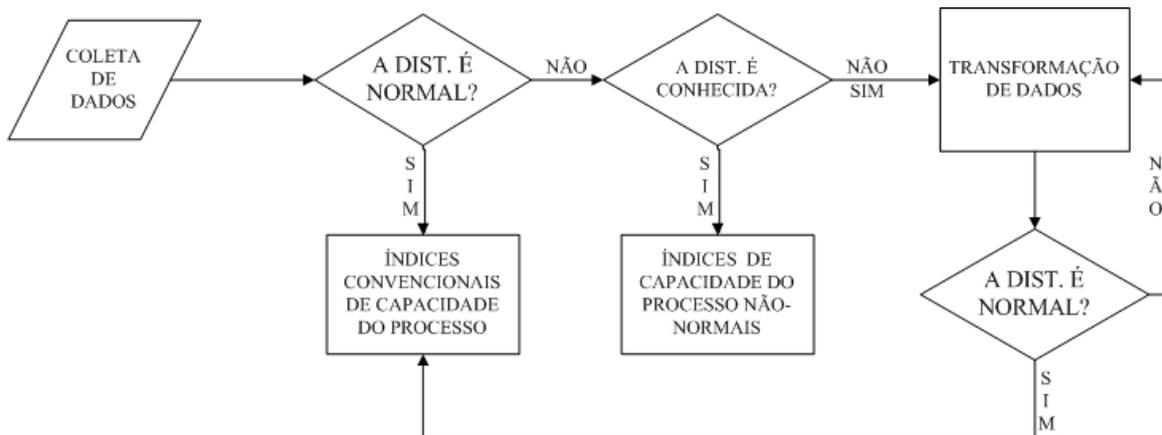


Figura 2 – Framework proposto para obtenção da capacidade do processo.  
Fonte: elaborado pelos autores

### 3. Passos para implementação do framework

Para implementar adequadamente o framework proposto, a seguir serão detalhados os passos sugeridos.

#### 3.1. Coleta de dados

Para proceder com a etapa de coleta de dados deve-se, em primeiro lugar, definir qual a variável a ser estudada. Como se trata de um estudo de capacidade do processo, ou os dados são advindos do controle estatístico do processo (CEP), ou então uma coleta ocasional é estabelecida. Quando se trata de uma coleta ocasional, é preciso ter cuidado com o dimensionamento da amostra, pois amostras pequenas podem não ser representativas em um processo produtivo que apresente muitas fontes de variação.

#### 3.2. Verificação do ajuste à distribuição normal

Uma das suposições que precisa ser satisfeita para que seja possível o cálculo dos índices convencionais de capacidade do processo trata-se da verificação da normalidade dos dados (GONZALES; WERNER, 2009; HOSSEINIFARD et al., 2009; MAITI et al., 2010).

Após a obtenção dos dados é preciso então verificar se eles ajustam-se à distribuição normal. Para realizar esta avaliação existem várias formas, tais como: construção de um histograma, traçar um gráfico de probabilidade normal ou realizar algum teste não-paramétrico apropriado. Um dos testes não-paramétricos mais utilizados para verificar a normalidade dos dados é o de Anderson-Darling.

Este teste faz uso de funções de distribuições acumuladas. Os cálculos para a estatística Anderson-Darling são apresentados conforme a equação (1) (ANDERSON; DARLING, 1954; KVAM; VIDAKOVIC, 2007).

$$W^2 = -n - \sum_{i=1}^n \frac{2i-1}{n} [\ln(F_0(x_i)) + \ln(1 - F_0(x_{n-i+1}))] \quad (1)$$

onde:  $n$  é o tamanho da amostra;  $\ln(.)$  é a função logaritmo natural;  $F_0(x_i)$  é a função de distribuição acumulada da distribuição estipulada em  $H_0$  até o ponto  $x_i$  e  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

A regra de decisão para o teste de Anderson-Darling é rejeitar a hipótese nula se a probabilidade de ocorrência do valor encontrado na estatística  $W^2$  for menor que o nível de significância ( $\alpha$ ), em geral estabelecido em 5%.

#### 3.3. Métodos de avaliação da capacidade de processos normais

A forma inicial, e mais preliminar de avaliar a capacidade do processo consiste em construir um histograma dos dados e compará-lo com as especificações. Na Figura 3 têm-se exemplos de um processo não capaz e um processo capaz.

Uma vez realizada a análise preliminar da capacidade, é importante quantificá-la. Chang (2009) afirma que os índices de capacidade, que fornecem medidas numéricas para checar se o processo satisfaz as especificações, foram popularmente aplicados à indústria para avaliar o desempenho da produção. Caso a suposição de normalidade dos dados seja satisfeita, podem ser utilizados os chamados índices convencionais de capacidade do processo (DELERYD, 1998; WU et al., 2009).

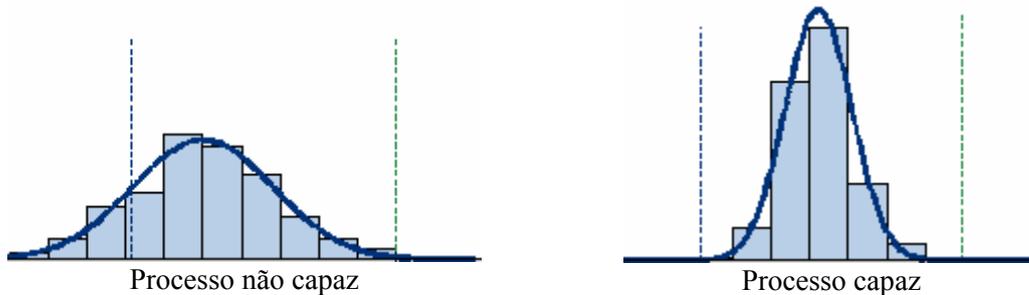


Figura 3 – exemplificação de processos não capazes e capazes. Fonte: elaborado pelos autores

O índice  $C_p$  mede a capacidade potencial que o processo pode atingir quando comparado com as especificações. Este índice, porém, conforme Ribeiro e Caten (2001), não afere a real capacidade do processo, porque não avalia se o processo está centrado ou não. O índice é calculado de acordo com a equação (2). Caso se obtenha um valor superior a 1,33 disse que o processo é potencialmente capaz.

$$C_p = \frac{LSE - LIE}{6\sigma} \quad (2)$$

onde: LSE é o limite superior de especificação; LIE o limite inferior de especificação e  $\sigma$  o desvio-padrão do processo.

O índice  $C_{pk}$  mede a real capacidade do processo, pois, além de levar em conta a variação do processo, considera também o fato de o processo estar centrado ou não (WU et al., 2009). Porém, o índice, por si só, não fornece uma medida adequada de quanto o processo está descentrado (WU et al., 2009). Para averiguar se o processo encontra-se centrado é necessária uma comparação com o índice  $C_p$ . Se eles forem iguais é porque o processo está centrado. O índice é calculado conforme a equação (3).

$$C_{pk} = \frac{\min\{LSE - \mu, \mu - LIE\}}{3\sigma} \quad (3)$$

onde: LSE é o limite superior de especificação; LIE o limite inferior de especificação;  $\mu$  é a média e  $\sigma$  o desvio-padrão do processo.

O índice  $C_{pm}$  é um dos índices alternativos em relação aos índices  $C_p$  e  $C_{pk}$  pelo fato de considerar, além da variação do processo, a distância de sua média em relação ao seu valor alvo (GONZALES; WERNER, 2009). Ele mede o quanto o processo consegue produzir unidades em torno de um valor alvo (WU et al., 2009). O índice é calculado por meio da equação (4).

$$C_{pm} = \frac{LSE - LIE}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \quad (4)$$

onde: LSE é o limite superior de especificação; LIE o limite inferior de especificação;  $\mu$  é a média e  $\sigma$  o desvio-padrão do processo, e T é seu valor alvo.

O índice  $C_{pmk}$  combina as características dos índices anteriores  $C_p$ ,  $C_{pk}$  e  $C_{pm}$  (WU et al., 2009). De acordo com Anis (2008), para obter o índice  $C_{pk}$ , é preciso fazer modificações no numerador do índice  $C_p$  e, para obter o índice  $C_{pm}$ , modificações no denominador de  $C_p$ ; para obter o índice  $C_{pmk}$ , deve-se proceder com modificações tanto no numerador quanto no denominador de  $C_p$ . O índice considera a menor distância entre a média do processo e os limites

de especificação em seu numerador (GONZALES; WERNER, 2009) e leva em conta também o quanto a média se distancia em relação ao valor alvo do processo (ANIS, 2008; WU et al., 2009). O índice é calculado de acordo com a equação (5).

$$C_{pmk} = \frac{\min\{LSE - \mu, \mu - LIE\}}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \quad (5)$$

onde: LSE é o limite superior de especificação; LIE o limite inferior de especificação;  $\mu$  é a média e  $\sigma$  o desvio-padrão do processo, e T é seu valor alvo.

Vännman (1995) criou um sistema que unifica os índices das equações de (2) a (5) em um só, a partir de duas constantes:  $u$  e  $v$ . O sistema é definido pela equação (6):

$$C_p(u, v) = \frac{d - u|\mu - M|}{3\sqrt{\sigma^2 + v(\mu - T)^2}} \quad (6)$$

onde:  $d=(LSE-LIE)/2$  é a metade do comprimento do intervalo de especificação,  $M=(LSE + LIE)/2$  é o ponto médio do intervalo e  $u$  e  $v$  são constantes que podem ser maiores ou iguais a zero. Gonzales e Werner (2009) informam que as equações (2) a (5) podem ser casos especiais do sistema de unificação proposto por Vännman (1995), por serem combinações de zeros e uns nas constantes  $u$  e  $v$ .

### 3.4. Verificação do ajuste a distribuições não normais

Quando a suposição de normalidade dos dados não é satisfeita, deve-se verificar qual distribuição não-normal se ajusta melhor aos dados do processo em questão. Para isso, existem testes que verificam o ajuste do conjunto de dados a distribuições não-normais. Um dos testes utilizados para esta finalidade é o teste de *Kolmogorov-Smirnov* (KVAM; VIDA KOVIC, 2007).

Neste teste, a hipótese nula ( $H_0$ ) do teste de estatístico é de que há igualdade entre a distribuição de um conjunto de dados e uma distribuição teórica especificada (MASSEY JR., 1951; DARLING, 1957).

O teste faz uso de funções de distribuições acumuladas, por meio da comparação entre a distribuição acumulada pressuposta na hipótese nula e a distribuição acumulada observada na amostra (KVAM; VIDA KOVIC, 2007).

A estatística de teste é calculada por meio do módulo da diferença máxima observada entre a função de distribuição acumulada em  $H_0$  e a função de distribuição acumulada dos dados amostrais, como apresentada na equação (7) (MASSEY JR, 1951; SIEGEL; CASTELLAN JR, 2006):

$$D_n = \max |F_0(x) - S(x)| \quad (7)$$

onde:  $F_0(x)$  é a função de distribuição acumulada da distribuição informada em  $H_0$  até o ponto  $x$ ;  $S(x) = j/n$ , sendo  $j$  é o número de pontos menores ou iguais a  $x$  e  $n$  é o tamanho da amostra.

A regra de decisão para o teste de *Kolmogorov-Smirnov* é rejeitar a hipótese nula se a probabilidade de ocorrência do valor encontrado na estatística  $D_n$  for menor que o nível de significância ( $\alpha$ ), em geral de 5%.

### 3.5. Métodos de avaliação da capacidade de processos não normais

Quando a suposição de normalidade dos dados não é satisfeita, não é adequado utilizar os índices de capacidade de processos convencionais (DELERYD, 1998; MAITI et al., 2010).

A ausência de normalidade nos dados dos processos resultou na busca por alternativas de soluções. Duas formas de trabalhar com o aspecto de não normalidade são propostas na literatura: (i) a transformação matemática dos dados para obtenção de dados que apresentam distribuição normal e posterior cálculo dos índices convencionais e (ii) de obtenção de índices que abordam distribuições não normais de dados (CLEMENTS, 1989; PEARN; CHEN, 1997; CHEN; DING, 2001; LIU; CHEN, 2006; VÄNNMAN; ALBING, 2007; CZARSKI, 2008). Estes dois aspectos são abordados na sequência.

### 3.5.1. Métodos de transformação de dados

A transformação de dados nesta situação visa transformar dados de processos que não apresentem comportamento conforme a distribuição normal em dados normalmente distribuídos, para que após, se possam utilizar os índices convencionais de capacidade do processo. As transformações a serem abordadas são a de Box-Cox e de Johnson.

#### 3.5.1.1. Método de Box-Cox

Box e Cox (1964) propuseram uma família de transformações potência sobre uma variável positiva  $Y$ . A equação (8) mostra como proceder para transformar uma variável  $Y$  com distribuição não-normal em uma variável com distribuição normal (TANG e THAN, 1999; AHMAD et al., 2007). A Tabela 1 apresenta alguns resultados para a transformada de Box-Cox, estas são as transformações mais utilizadas na prática.

$$Y^\lambda = \begin{cases} \frac{Y^\lambda - 1}{\lambda}, & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \ln(Y), & \text{se } \lambda = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Tabela 1 – Valores de  $\lambda$  e as respectivas funções para a transformada de Box-Cox

VALOR DE $\lambda$	TRANSFORMAÇÃO $y^{(\lambda)} = y'$	DENOMINAÇÃO COMUM
2	$y' = y^2$	Quadrado
1	$y' = y$	Não Há Transformação
0,5	$y' = \sqrt{y}$	Raiz Quadrada
0	$y' = \ln y$	Logaritmo Natural
-0,5	$y' = \frac{1}{\sqrt{y}}$	Inverso da Raiz Quadrada
-1	$y' = \frac{1}{y}$	Inverso
-2	$y' = \frac{1}{y^2}$	Inverso do Quadrado

Para saber qual transformação utilizar, realiza-se a transformação com vários valores de  $\lambda$ . O valor para o qual os dados transformados apresentar o menor desvio-padrão deve ser usado para a transformação.

#### 3.5.1.2. Método de Johnson

Conforme Tang e Than (1999), em 1949, Norman Johnson desenvolveu um sistema de distribuições baseado no método dos momentos. As curvas de distribuição dos dados são ajustadas de acordo com a equação (9) (JOHNSON, 1949; TANG; THAN, 1999; HARSTELN et al., 2010):

$$Z = \gamma + \eta f(x, \epsilon, \lambda) \quad (9)$$

onde:  $Z$  é uma variável normal padrão;  $X$  é a variável a ser ajustada por alguma família de distribuições de Johnson;  $\gamma$ ,  $\eta$ , e  $\lambda$  são parâmetros de ajuste das curvas e  $f(x, \epsilon, \lambda)$  é uma função que pode assumir três formas, de acordo com as equações (10), (11) e (12).

$$f(x, \epsilon, \lambda) = \ln \left( \frac{x - \epsilon}{\lambda + \epsilon - x} \right) \quad (10)$$

Forma limitada (SB):

Forma lognormal (SL):

$$f(x, \epsilon, \lambda) = \ln\left(\frac{x - \epsilon}{\lambda}\right) \quad (11)$$

Forma ilimitada (SU):

$$f(x, \epsilon, \lambda) = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x - \epsilon}{\lambda}\right) \quad (12)$$

onde:  $\ln(\cdot)$  é a função logaritmo natural e  $\operatorname{senh}^{-1}(\cdot)$  é a função arco seno hiperbólico.

As curvas abrangidas pela forma  $S_U$  (U = palavra da língua inglesa: *unbounded* – ilimitado) não tocam o eixo  $x$ , sendo as principais distribuições compreendidas a normal e a  $t$ -student. A forma  $S_L$  (L = lognormal) compreende a família de distribuições lognormais. A forma  $S_B$  (B = palavra da língua inglesa: *bounded* - limitado) contempla distribuições que possuam pelo menos um dos extremos da curva que tocam o eixo  $x$ , como, por exemplo, as famílias de distribuições Gama, Beta, entre outras distribuições limitadas.

Para encontrar qual a função  $f$  e, por consequência a forma, que deve ser usada para transformar os dados, em geral utiliza-se o auxílio de um software estatístico. O procedimento é aplicar nas funções  $f$  as formas expressas pelas equações (10) a (12) e após executa-se o teste de normalidade para os dados transformados, ao comparar o  $p$ -valor resultante para cada uma das três formas, toma-se a decisão de qual poderá ser usada (MORAES, 2006; HARSTELN et al. 2010).

### 3.5.2. Índices de capacidade de processos não-normais

#### 3.5.2.1. Índice de Clements

Clements (1989) propôs um método simples, baseado em percentis, para a obtenção dos índices de capacidade do processo. O método é aplicável para qualquer tipo de distribuição dos dados, fazendo uso da família de curvas de Pearson.

De acordo com o autor, o método proposto apresenta vantagens, como por exemplo, a não necessidade de transformações matemáticas nos dados, a similaridade do índice com relação ao índice convencional (distribuição normal) e a facilidade para calcular.

O índice  $C_p$  de Clements é definido pela equação (13).

$$C_p' = \frac{LSE - LIE}{F_{99,865} - F_{0,135}} \quad (13)$$

onde:  $LSE$  e  $LIE$  são o limite superior e o limite inferior de especificação e  $F_\alpha$  é o percentil localizado na  $\alpha$ -ésima posição. O denominador do índice  $C_p'$  é uma substituição de  $6\sigma$  em relação ao índice convencional.

O índice  $C_p'$  considera apenas a variabilidade natural do processo, sem haver preocupação com a posição na qual o processo está situado em relação aos limites de especificação. Para isso, existe o índice  $C_{pk}'$  de Clements, que é definido pela equação (14).

$$C_{pk}' = \min\left\{\frac{M - LIE}{M - F_{0,135}}, \frac{LSE - M}{F_{99,865} - M}\right\} = \min\{C_{pki}', C_{pks}'\} \quad (14)$$

onde:  $M$  é o ponto mediano da distribuição dos dados estudados, e os denominadores dos índices  $C_{pki}'$  e  $C_{pks}'$  são substituições de  $3\sigma$  em relação ao índice convencional de capacidade quando a distribuição é normal.

#### 3.5.2.2. Método de Pearn e Chen

Pearn e Chen (1997) propuseram uma generalização utilizando o sistema apresentado na equação (6) que suporta casos em que a distribuição dos dados no processo é não normal, denominada  $C_{Np}(u, v)$ , que é definida pela equação (15) (GONZALES; WERNER, 2009):

$$C_{Np}(u, v) = \frac{d - u|\mu - M|}{3 \sqrt{\left[\frac{F_{99,865} - F_{0,135}}{6}\right]^2 + v(M - T)^2}} \quad (15)$$

onde:  $F_\alpha$  é o percentil correspondente ao valor de  $\alpha$ ,  $M$  é a mediana da distribuição dos dados,  $T$  é o valor alvo do processo,  $d = (LSE - LIE)/2$  é o ponto médio dos limites de especificação e  $u$  e  $v$  são constantes.

Com o objetivo de desenvolver a generalização, o desvio-padrão  $\sigma$  de  $C_p(u, v)$  foi substituído por  $[(F_{99,865} - F_{0,135})/6]^2$  em  $C_{Np}(u, v)$  para que a ideia de variabilidade inerente ao processo fosse mantida sem restrição quanto à distribuição dos dados (PEARN; CHEN, 1997; GONZALES; WERNER, 2009).

Quando a distribuição dos dados é simétrica, tem-se que  $C_{Npk} = (1-k) \cdot C_{Np}$  e  $C_{Npmk} = (1-k) \cdot C_{Npm}$ , onde  $k = |M - T|/d$  e  $d = (LSE - LIE)/2$ . Se  $M$  (mediana dos dados do processo) é igual a  $T$  (valor alvo do processo), então  $C_{Npmk} = C_{Npm} = C_{Npk} = C_{Np}$  (PEARN; CHEN, 1997 e GONZALES; WERNER, 2009).

### 3.5.2.3. Método de Chen e Ding

Chen e Ding (2001) propuseram um índice que leva em conta a variabilidade do processo, a distância de sua média em relação ao seu valor alvo e a proporção de unidades não-conformes. O índice, denominado  $S_{pmk}$ , é descrito pela equação (16) (CHEN; DING, 2001; GONZALES; WERNER, 2009).

$$S_{pmk} = \frac{\Phi^{-1}\left(\frac{1 + F(LSE) - F(LIE)}{2}\right)}{3 \sqrt{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right)^2}} \quad (16)$$

onde:  $F(.)$  é a função de distribuição acumulada do processo,  $\mu$  e  $\sigma$  são, respectivamente, a média e o desvio-padrão do processo,  $LSE$  e  $LIE$  são os limites superior e inferior de especificação e  $T$  é o valor alvo do processo.

Para Chen e Ding (2001), a proporção de unidades não-conformes  $P$  pode ser estimada por meio do índice  $S_{pmk}$ , e é descrita pela equação (17). Além disto, para os autores, esta proporção  $P$  de unidades não-conformes não difere da real proporção de unidades não-conformes (GONZALES; WERNER, 2009).

$$P = 2 \left( 1 - \Phi \left( 3 S_{pmk} \sqrt{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right)^2} \right) \right) \quad (17)$$

### 3.5.2.4. Índice $C_{MA}(\tau, v)$

Vännman e Albing (2007) propuseram uma nova classe de índices de capacidade para situações onde o processo possui somente o limite superior de especificação, valor alvo igual a zero, e a característica estudada possui distribuição assimétrica com seus parâmetros maiores que zero, e cauda longa para valores extremos. O índice é definido pela equação (18).

$$C_{MA}(\tau, v) = \frac{LSE}{\sqrt{q_{1-\tau}^2 + vq_{0,50}^2}} \quad (18)$$

onde:  $\tau$  é a probabilidade de haver unidades defeituosas;  $q_{1-\tau}$  é o quantil correspondente à probabilidade de não haver unidades defeituosas;  $v > 0$  é uma constante e  $q_{0,50}$  é a mediana da distribuição.

### 3.5.2.5. Método Exato

Czarski (2008) apresentou o método exato, cujas relações com os percentis  $x_{0,00135}$ ,  $x_{0,5}$  e  $x_{0,99865}$  são constituídas de acordo com as equações (19), (20) e (21).

$$\int_{-\infty}^{x_{0,00135}} f(x)dx = 0,00135 \tag{19}$$

$$\int_{-\infty}^{x_{0,50}} f(x)dx = 0,50 \tag{20}$$

$$\int_{-\infty}^{x_{0,99865}} f(x)dx = 0,99865 \tag{21}$$

Para obtenção dos percentis  $x_{0,00135}$ ,  $x_{0,5}$  e  $x_{0,99865}$ , deve-se conhecer a função densidade de probabilidade  $f(x)$ , para a variável em estudo.

Os percentis obtidos nas equações (19) a (21) são, então, aplicados nas equações (13) e (14) para medir, respectivamente, a capacidade potencial ( $C_p$ ) e a capacidade real ( $C_{pk}$ ) do processo.

### 3.5.2.6. Método de Burr

Burr (1942) propôs uma distribuição, denominada Burr XII, para obter determinados percentis de uma variável X. Esta distribuição é bastante utilizada no campo do controle de qualidade e em estudos de capacidade do processo. A função densidade de probabilidade de uma variável com distribuição Burr XII está definida de acordo com a equação (22) (AHMAD *et al.*, 2007).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ckx^{c-1}}{(1+x^c)^{k+1}}, & \text{se } x > 0, c > 0 \text{ e } k > 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \tag{22}$$

Os valores de  $c$  e  $k$  representam os coeficientes de assimetria e curtose da distribuição, respectivamente. Eles podem ser encontrados na tabela da distribuição Burr XII a partir das estimativas dos coeficientes de assimetria e curtose do conjunto de dados estudado. Além destes, tem-se que os valores de  $\mu$  e  $\sigma$  são encontrados a partir das constantes  $c$  e  $k$  da tabela da distribuição Burr XII.

A transformação padronizada entre uma variável de Burr (U) e uma variável aleatória qualquer (X), pode ser realizada de acordo com a equação (23) (LIU; CHEN, 2006).

$$\frac{U - \mu}{\sigma} = \frac{X - \bar{x}}{s_x} \tag{23}$$

O procedimento para obtenção dos índices de capacidade do processo através do método usa informações da amostra para obter medidas estatísticas que, relacionadas com as medidas de assimetria permite obter os limites de especificação dos dados transformados, conforme os passos que seguem:

- 1) Estimar a média, o desvio-padrão, o coeficiente de assimetria ( $\alpha_3$ ) e de curtose ( $\alpha_4$ ) do processo.
- 2) De acordo com os valores estimados para  $\alpha_3$  e  $\alpha_4$  no passo anterior, obter os valores das constantes  $c$  e  $k$  de acordo com a tabela da distribuição Burr XII (LIU e CHEN, 2006) e,

conforme os valores encontrados para  $c$  e  $k$ , encontrar os valores de  $\mu$  e  $\sigma$  da variável  $U$ , e fazer a transformação padronizada para encontrar os percentis  $Z_{0,00135}$ ,  $Z_{0,5}$  e  $Z_{0,99865}$ , de acordo com a equação (23).

- 3) A partir da transformação padronizada realizada no passo (2), calcular o limite inferior e o limite superior de especificação, bem como a mediana, de acordo com as equações (24) (25), e (26).

$$LIE = \bar{x} + sZ_{0,00135} \quad (24)$$

$$M = \bar{x} + sZ_{0,50} \quad (25)$$

$$LSE = \bar{x} + sZ_{0,99865} \quad (26)$$

- 4) Utilizar os limites calculados no passo (3) para obter os índices de capacidade do processo, conforme equações (2) a (5).

#### 4. Considerações finais

Estudos de análise de capacidade do processo para dados normalmente distribuídos estão consolidados na literatura (KANE, 1986; ANIS, 2008; GONZALES; WERNER, 2009), porém poucos estudos são encontrados quando os dados do processo apresentam outro tipo de comportamento, fato que oportunizou a realização deste estudo.

Fazer o levantamento das alternativas existentes para a análise de dados não-normais propiciou o desenvolvimento do *framework*, visto que primeiro necessita-se investigar a normalidade dos dados do processo e caso não seja viável uma resposta adequada, busca-se por soluções.

O *framework* tem por meta conduzir o responsável pela análise da capacidade do processo do como irá proceder para realizá-la. Ele auxilia o responsável a seguir os passos necessários, bem como a tomar as decisões pertinentes em cada passo. Com este *framework*, o responsável poderá optar por duas alternativas, caso o processo seja não-normal: realizar uma transformação nos dados para que apresentem uma distribuição normal e assim os índices convencionais de capacidade do processo sejam aplicados e também utilizar os índices de capacidade apropriados para tal situação.

Além disto, o *framework* proposto no artigo também mostrou cada passo de forma clara e o modo como cada um destes passos contribui, seja por meio de seu conteúdo específico ou fazendo parte do conjunto global para a realização da análise da capacidade de forma eficiente.

#### Referências

- AHMAD, S.; ABDOLLAHIAN, M.; ZEEPHONGSEKUL, P. Process capability for a non-normal quality characteristics data. *International Conference on Information Technology*, p. 420-424, 2007.
- ANDERSON, T. W.; DARLING, D. A. A test of goodness of fit. *Journal of the American Statistical Association*, v. 49, n. 268, p. 765-769. 1954.
- ANIS, M. Z. Basic process capability indices: an expository review. *International Statistical Review*, v. 76, n. 3, p. 347-367. 2008.
- BOX, G. E. P., COX, D. R. An analysis of transformations. *Journal of the Royal Statistical Society Series (Methodological)*, v. 26, n. 2, p. 211-252. 1964.
- BURR, I. W. Cumulative Frequency Functions. *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 13, nº 2, p. 215-232. 1942.
- CHAN, L. K.; CHENG, S. W.; SPIRING, F. A. A new measure of process capability:  $C_{pm}$ . *Journal of Quality Technology*, v. 20 n. 3, p. 162-175. 1988.
- CHANG, Y. C. Interval estimation of capability index  $C_{pmk}$  for manufacturing processes with asymmetric tolerances. *Computers and Industrial Engineering*, v. 56, p. 312-322, 2009.
- CHEN, J. P.; DING, C. G. A new process capability index for non-normal distributions. *The International Journal of Quality & Reliability Management*, v. 18 n. 6-7, p. 762-770, 2001.

- CHEN, K.S., PEARN, W.L., LIN, P.C. Capability measures for processes with multiple characteristics. *Quality and Reliability Engineering International*, v. 19, n. 2, p. 101-110. 2003.
- CLEMENTS, J. A. - Process capability calculations for non-normal distributions. *Quality Progress*, v. 22, n. 2, p. 95-100. 1989.
- COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R. *Controle Estatístico de Qualidade*, 2ª Edição. São Paulo: Editora Atlas, 2005. 334 p.
- CZARSKI, A. Estimation of process capability indices in case of distribution unlike the normal one. *Archives of Materials Science and Engineering*, v. 34, nº 1, p. 39-42. 2008.
- DARLING, D. A. The Kolmogorov-Smirnov, Cramer-von Mises Tests. *The Annals of Mathematical Statistics*, v. 28, n. 4, p. 823-838. 1957.
- DELERYD, M. On the gap between theory and practice of process capability studies. *International Journal of Quality & Reliability Management*, v. 15, n. 12, p. 178-191. 1998.
- GONZALEZ, P. U.; WERNER, L. Comparação dos índices de capacidade do processo para distribuições não-normais. *Gestão e Produção*, São Carlos, Brasil. v. 16, n. 1 p. 121-132. 2009.
- HARSTELN, R. E.; AMARAL F.<sup>o</sup>, J. R. do; WERNER, Liane. Análise de capacidade de dados não normais de um sistema de tratamento de efluente *Revista INGEPRO – Inovação, Gestão e Produção*, v. 2, n. 11. p.13-25, Nov.2010
- HOSSEINIFARD, S. Z.; ABBASI, B.; AHMAD, S.; ABDOLLAHIAN, M. A transformation technique to estimate the process capability index for non-normal processes. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, v. 40, n. 5-6, p. 512-517, 2009.
- JOHNSON, N.L. Systems of Frequency Curves Generated by Methods of Translation. *Biometrika*, vol. 36, p. 149-176, 1949.
- KANE, V. E. Process Capability Indices. *Journal of Quality Technology*, v. 18, n.1, p. 41-52. 1986.
- KVAM, P. H.; VIDAKOVIC, B. *Nonparametric Statistics with Applications to Science and Engineering*. Estados Unidos: John Wiley & Sons, Inc., 2007. 429 p.
- LIU, P. H.; CHEN, F. L. Process capability analysis of non-normal process data using the Burr II distribution. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, v. 27, p. 975-984. 2006.
- MASSEY JR., F. M. The Kolmogorov-Smirnov test for goodness of fit. *Journal of the American Statistical Association*, v. 46, n. 253, p. 68-78. 1951.
- MIRANDA, R. G. Um Modelo para Análise de Capacidade de Processos com Ênfase na Transformação de Dados. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, Florianópolis, 2005.
- MONTGOMERY, D. C. *Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade*, 4ª Edição. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2004. 513 p.
- MORAES, C. F. de Estudo da utilização do gráfico de controle individual e do índice de capacidade sigma para dados não-normais. Dissertação (mestrado). Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção. Itajubá, abril de 2006.
- OLIVEIRA, E. S. Análise de dados não-normais no contexto da metodologia six sigma. Trabalho de diplomação (Graduação). Instituto de Engenharia de Produção e Gestão, Universidade Federal de Itajubá – UNIFEI, Itajubá, 2005.
- PEARN, W. L.; CHEN, K. S. Capability indices for non-normal distributions with an application in electrolytic capacitor manufacturing. *Microelectronics Reliability*, v. 37, n. 12, p. 1853-1858, 1997.
- PEARN, W. L.; KOTZ, S.; JOHNSON, N. L. Distributional and inferential properties of process capability indices. *Journal of Quality Technology*, vol. 24, No. 4, p. 216-233. 1992.

RIBEIRO, J. L. D.; CATEN, C. S. T. *Controle Estatístico do Processo*, 2ª Edição. Porto Alegre: FEENG-UFRGS, 2001. 156 p.

SIEGEL, S.; CASTELLAN JR, N. J., *Estatística não-paramétrica para ciências do comportamento*. 2ª edição. Porto Alegre: Editora Artmed.448 p. 2006.

TANG, L. C.; THAN, S. E. Computing process capability indices for non-normal data: A review and comparative study. *Quality and Reliability Engineering International*, v. 15, p. 339-353. 1999.

VÄNNMAN, K. A unified approach to capability indices. *Statistica Sinica*, vol. 5, nº 2, p. 805-820, 1995.

VÄNNMAN, K.; ALBING, M. Process capability indices for one-sided specification intervals and skewed distributions. *Quality and Reliability Engineering International*, v. 23, p. 755-765. 2007.

WU, C. W.; PEARN, W. L.; KOTZ, S. An overview of theory and practice on process capability indices for quality assurance. *International Journal of Production Economics*, v. 117, p. 338-359. 2009.