

## GRAFOS EXTREMAIS PARA IRREGULARIDADE SÃO NÃO-BALANCEADOS?

**Joelma Ananias de Oliveira**

Universidade Federal de Mato Grosso - UFMT/Rondonópolis  
Rodovia Rondonópolis-Guiratinga, KM 06 - Sagrada Família - MT  
jo.ananias@gmail.com

**Carla Oliveira**

Escola Nacional de Ciências e Estatística-ENCE/IBGE  
Rua André Cavalcanti, 106 - Centro - RJ  
carla.oliveira@ibge.gov.br

**Claudia Justel**

Instituto Militar de Engenharia - IME  
Praça General Tibúrcio, 80 - Praia Vermelha - RJ  
cjustel@ime.eb.br

**Nair Maria Maia de Abreu**

Universidade Federal do Rio de Janeiro- COPPE- ufrj  
Rua João Lira, 106/401- Leblon -RJ  
nair@pep.ufrj.br

### RESUMO

Top e gap são invariantes definidos em função dos graus dos vértices de um grafo. Os conjuntos equilibradores resultam de tais invariantes, bem como os grafos balanceados e grafos com gap nulo. Grafos regulares são exemplos triviais de grafos balanceados e grafos com gap nulo, mas estes não são os únicos. Este artigo trata de duas famílias de grafos extremais com relação à medida de irregularidade de grafos, conhecida como medida de irregularidade de Collatz, e exhibe algumas condições para tais grafos serem ou não balanceados.

**PALAVRAS CHAVE.** Média dos graus. Conjunto Equilibrador. Grafo Irregular.

**Área Principal (Teoria e Algoritmos em Grafos)**

### ABSTRACT

Top and gap are graph invariants given as a function of the vertex degrees. As a consequence of these invariants, the turner sets and the concept of balanced, non-balanced graphs and graphs with zero gaps were defined. It's trivial to see that regular graphs are balanced graphs and graphs with zero gap, although, they are not the only graphs in this situation. In this paper, we approach two families of extremal graphs for a specific irregularity measure, known as Collatz's irregularity measure. Also, we determine necessary conditions to obtain balanced and non-balanced graphs in the two families.

**KEYWORDS.** Average degree. Turner set. Irregular Graph.

**Main Area (Theory and Algorithms in Graphs)**

## 1. Introdução

Seja  $G = (V, E)$  um grafo simples (sem arestas múltiplas e sem laços) não orientado e finito, onde  $V(G)$  é um conjunto de  $n$  vértices e  $E(G)$  é o conjunto das  $m$  arestas de  $G$ . Para tornar o texto o mais auto-contido possível, apresentamos alguns poucos conceitos e notações básicas, podendo os demais, se necessário, serem encontrados em Diestel (1997). Utilizamos  $d_i$  para denotar o grau do vértice  $i$ ,  $\delta(G)$ , para grau mínimo e  $\Delta(G)$ , para grau máximo de  $G$ . Um grafo é  $r$ -regular se  $d_i = r$ , para todo  $1 \leq i \leq n$ . Caso contrário, dizemos que  $G$  é *irregular* ou, simplesmente *não regular*. O conceito de *conjunto equilibrador* de um grafo, introduzido por Rodrigues *et al* (1999), foi inicialmente aplicado a grafos cordais planares para observar como a distribuição dos graus afeta a média dos graus do grafo. Motivados por esse conceito, Moraes *et al* (2001) introduziram os invariantes *top* e *gap* de um grafo. Damas *et al* (2007) mostraram propriedades desses invariantes para árvores e grafos unicíclicos. Além disso, generalizaram o conceito de conjunto equilibrador para qualquer grafo e introduziram os conceitos de grafos *balanceados*, *não-balanceados* e com *gap nulo*. Neste trabalho, determinamos os valores dos parâmetros referenciados acima para grafos em duas famílias,  $H_{n,k}$  e  $G_{n,k}$ . A primeira foi introduzida por Brualdi e Solheid (1986) e, a segunda, por Cvetković e Rowlinson (1988). Os grafos  $H_{n,k}$  e  $G_{n,k}$  são extremais para a medida de irregularidade de um grafo dada em função do índice, que corresponde ao maior autovalor da matriz de adjacência do grafo. Tal medida, conhecida como medida de irregularidade de Collatz, pode ser encontrada em Bell (1992). Investigamos, também, a relação entre a irregularidade de um grafo e a condição do mesmo ser ou não balanceado. Para isso, dedicamos a Seção 2, às definições e resultados já conhecidos e, a Seção 3, aos grafos  $H_{n,k}$  e  $G_{n,k}$ , onde apresentamos nossos resultados. Na seção 4 determinamos os conjuntos equilibradores para os grafos  $H_{n,k}$  e  $G_{n,k}$ , para  $k = 0, 1$ . Nestes casos, os grafos são isomorfos. As considerações finais fecham o artigo.

## 2. Resultados Preliminares

As duas primeiras definições, devidas a Rodrigues *et al* (1999), introduzem os invariantes *top* e *gap* de um grafo. Os conceitos de *grafos balanceados*, *não-balanceados*, com *gap nulo* e *conjuntos equilibradores* são transcritos aqui e estão em Damas *et al* (2007). Para completar a seção, uma série de resultados desses mesmos autores são apresentados, finalizando com o teorema que caracteriza os grafos com *gap nulo* em função do conjunto equilibrador, que neste caso é único.

**Definição 2.1** *O top de um grafo  $G$ , denotado por  $\mu(G)$ , é o menor inteiro maior ou igual à média dos graus de  $G$ , ou seja,  $\mu(G) = \lceil \bar{d}(G) \rceil$ .*

**Definição 2.2** *Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices. O gap de  $G$  é um múltiplo escalar de  $n$  pela diferença entre o top e a média dos graus de  $G$ , ou seja,  $h(G) = n(\mu(G) - \bar{d}(G))$ .*

Quando  $\mu(G) = \bar{d}(G)$ , o grafo  $G$  possui *gap nulo*, isto é,  $h(G) = 0$ . Obviamente, todo grafo regular possui *gap nulo*. Na Figura 1, exibimos todos os grafos com até 5 vértices com esta propriedade.

Damas *et al* (2007) definiram, como a seguir, três subconjuntos dados em função do top de  $G$ , os quais determinam uma partição do conjunto de vértices do grafo.

**Definição 2.3** *Seja  $G$  um grafo e  $V(G)$  o conjunto de seus vértices. Então,*

1.  $B = \{i \in V(G) | d_i = \mu(G)\}$  é o conjunto de vértices balanceados de  $G$ ;
2.  $U = \{i \in V(G) | d_i > \mu(G)\}$  é o conjunto de vértices superiores de  $G$ ;
3.  $L = \{i \in V(G) | d_i < \mu(G)\}$  é o conjunto de vértices inferiores de  $G$ .

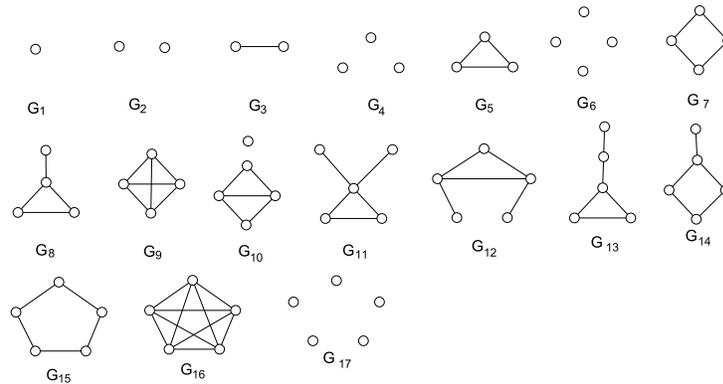


Figura 1: Grafos com gap nulo para  $1 \leq n \leq 5$ .

Da Definição 2.3, seguem naturalmente os conceitos a seguir.

**Definição 2.4** Um grafo  $G$  é não-balanceado, se o conjunto de vértices superiores  $U$  é não vazio. Caso contrário,  $G$  é dito balanceado.

Já vimos que os grafos regulares são grafos com gap nulo. Também eles são exemplos triviais de grafos balanceados. No entanto, há grafos balanceados que são irregulares, como aquele dado na Figura 2.

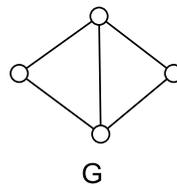


Figura 2: Grafo balanceado e não regular.

Recorrendo novamente à Figura 1, vemos que todos os grafos entre  $G_{10}$  e  $G_{14}$  (inclusão fechada), são irregulares e com gap nulo, tendo como top e a média dos graus, o valor igual a 2. Além disso, esses grafos possuem, pelo menos, um vértice de grau maior ou igual a 3, o que acarreta em  $U \neq \emptyset$ . Portanto, são grafos não-balanceados. Os resultados que agora seguem são de Damas *et al* (2007).

**Lema 2.5** Seja  $G$  conexo com  $n$  vértices. Se  $\mu(G) = n - 1$ ,  $G$  é balanceado. Se  $\mu(G) \leq n - 2$  e  $\Delta(G) = n - 1$ ,  $G$  é não-balanceado.

**Proposição 2.6** Seja  $G$  um grafo conexo não-balanceado com  $n$  vértices. Temos que  $2 \leq \mu(G) \leq n - 2$ , com limite superior atingido se e somente se  $n$  é par.

**Proposição 2.7** Seja  $G$  um grafo conexo com  $n$  vértices e  $n$  par.  $G$  é um grafo não-balanceado, com gap nulo e top  $\mu(G) = n - 2$  se e somente se  $G$  possui  $m = \frac{n(n-2)}{2}$  arestas e grau máximo  $\Delta(G) = n - 1$ .

O Teorema 2.8 dá condições para a existência de grafos como aqueles caracterizados pela Proposição 2.7.

**Teorema 2.8** *Seja  $n$  par e  $n > 2$ . Para qualquer  $q \in \mathbb{N}, 2 \leq q \leq n - 2$ , existe um grafo com  $n$  vértices, não-balanceado com gap nulo e top  $\mu(G) = q$ .*

A seguir apresentamos a definição de conjunto equilibrador de um grafo que, também, pode ser encontrada em Damas *et al* (2007).

**Definição 2.9** *Sejam  $U, L \subseteq V(G), U \neq \emptyset$ , o conjunto de vértices superiores de  $G$  e  $L$ , o conjunto de vértices inferiores. Se existir  $\Psi, \Psi \neq \emptyset$  e  $\Psi \subseteq L$ , tal que a seguinte equação seja verificada*

$$\mu(G) = \frac{\sum_{t \in \Psi} d_t + \sum_{u \in U} d_u}{|\Psi| + |U|}, \tag{1}$$

*diz-se que  $G$  possui um conjunto equilibrador  $\Psi$ . Caso contrário,  $G$  não possui conjunto equilibrador. O conjunto  $\Psi$  é denominado conjunto equilibrador pleno se  $\Psi = L$ . Se  $\Psi \subset L$ , dizemos que  $\Psi$  é um conjunto equilibrador próprio.*

A Figura 3 exibe um grafo  $G$  cuja média dos graus é  $\bar{d}(G) = 2,8$ ; o top é  $\mu(G) = 3$  e o gap é  $h(G) = 1$ . Os subconjuntos de vértices balanceados, superiores e inferiores são, respectivamente,  $B = \{3, 4\}, U = \{1\}$  e  $L = \{2, 5\}$ .

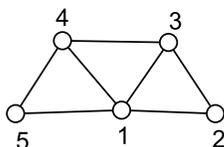


Figura 3: Grafo com conjunto equilibrador próprio

Utilizando-se a equação (1), da Definição 2.9 verificamos de imediato que  $\Psi = \{2\}$  é um conjunto equilibrador de  $G$ , mas que  $L = \{2, 5\}$  não o é. Assim,  $G$  não possui conjunto equilibrador pleno. Nem todo grafo possui conjunto equilibrador e, quando possui um, este não é necessariamente único. Por exemplo, o grafo  $H$  da Figura 4 não possui conjunto equilibrador. Já aquele da Figura 5 possui mais de um conjunto equilibrador. Por exemplo, os conjuntos unitários  $\{2\}$  e  $\{7\}$  são conjuntos equilibradores de  $G$ , assim como o são, cada subconjunto formado por quaisquer dois vértices de grau 3.

O Teorema 2.10 caracteriza os grafos com gap nulo como aqueles que possuem um único conjunto equilibrador, sendo este, um conjunto equilibrador pleno. Sua prova pode ser encontrada em Damas *et al* (2007).

**Teorema 2.10** *Seja  $G$  um grafo qualquer e  $L$  o conjunto dos vértices inferiores de  $G$ . Tem-se que  $h(G) = 0$  se e somente se  $G$  possui um único conjunto equilibrador  $\Psi$ . Tal conjunto é o equilibrador pleno, ou seja,  $\Psi = L$ .*

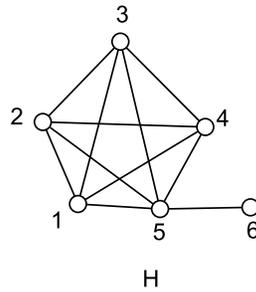


Figura 4: Grafo que não possui conjunto equilibrador.

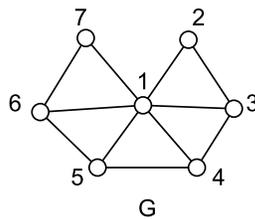


Figura 5: Grafo que possui mais de um conjunto equilibrador.

### 3. Grafos $H_{n,k}$ e $G_{n,k}$ balanceados e não-balanceados

Nesta seção os grafos  $H_{n,k}$  e  $G_{n,k}$  devidos a Brualdi e Solheid (1986) e a Cvetković e Rowlinson (1988), respectivamente são apresentados. Para tais grafos determinamos top e conjuntos equilibradores. Além disso, mostramos para quais valores de  $k$ , os grafos são balanceados ou não-balanceados.

Os grafos  $G_{n,k}$  decorrem da definição dos grafos quase-completos que devemos a Ahlswede e Katona (1978) e apresentamos a seguir.

**Definição 3.1** Um grafo com  $n$  vértices e  $m$  arestas é chamado quase-completo e denotado por  $QC(n, m)$  quando é obtido da seguinte forma:

- i) primeiramente rotula-se os vértices de  $1, \dots, n$ ;
- ii) determinam-se  $d$  e  $t$  inteiros, para  $d \geq 2$  e  $0 \leq t < d$ , tais que  $m = \binom{d}{2} + t$ ;
- iii) os vértices rotulados  $1, \dots, d$  formam a maior clique do grafo;
- iv) o vértice  $d + 1$  é adjacente aos vértices rotulados  $1, \dots, t$  e os  $n - (d + 1)$  vértices restantes são isolados.

Os valores de  $t$  e  $d$  são necessariamente únicos, com  $t$  menor que  $d$  e  $d$  sendo o maior valor possível capaz de representar a maior clique do grafo. Além disso, o vértice  $d + 1$  deve ser adjacente aos  $t$  primeiros vértices da clique. Desta forma, temos que o grafo possui, a menos de isomorfismo, uma única representação. A Figura 6 exhibe grafos quase-completos. O grafo  $QC(5, 5)$  tem  $d = 3$  e  $t = 2$  e é construído da seguinte forma: rotulamos os cinco vértices de 1 até 5, em

seguida formamos uma clique com os vértices 1, 2 e 3, para depois ligarmos o vértice 4 aos vértices numerados 1 e 2. O vértice restante 5, fica isolado. De forma análoga são construídos os grafos  $QC(6, 7)$  e  $QC(6, 13)$ .

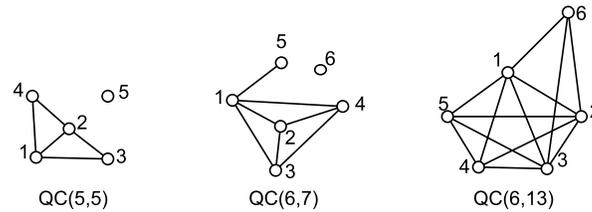


Figura 6: Grafos quase-completos.

A definição que segue corresponde aos grafos  $G_{n,k}$  que foram introduzidos por Cvetković e Rowlinson (1988). Para isso, lembramos a definição da operação *join*. Se  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$  são dois grafos tais que  $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$ , seu *grafo soma* é  $G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ , e o *join*, denotado por  $G_1 \nabla G_2$ , é o grafo obtido pelo *grafo soma*  $G_1 + G_2$ , adicionando-se as arestas que ligam cada vértice de  $G_1$  a todos os vértice de  $G_2$ .

**Definição 3.2** Para  $n, k \in \mathbb{Z}$  tais que  $0 \leq k \leq \frac{n(n-3)}{2}$ , temos que  $G_{n,k}$  é um grafo conexo com  $n + k$  arestas, dado por  $G_{n,k} = K_1 \nabla QC(n - 1, k + 1)$ .

Na Figura 7 exibimos alguns exemplos dos grafos  $G_{n,k}$ .

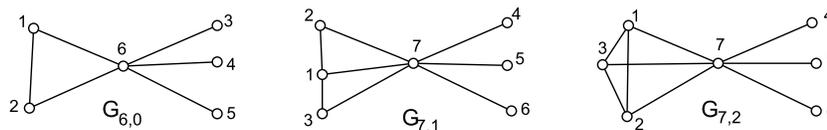


Figura 7: Grafos  $G_{6,0}$ ,  $G_{7,1}$  e  $G_{7,2}$ .

A proposição que segue mostra que, para  $n$  fixo e  $0 \leq k \leq \frac{n(n-3)}{2}$ , os valores do top de  $G_{n,k}$  crescem com o valor de  $k$ .

**Proposição 3.3** Dado  $n$  fixo, para todo grafo  $G_{n,k}$ ,  $0 \leq k \leq \frac{n(n-3)}{2}$ , tem-se que  $2 \leq \mu(G_{n,k}) \leq n - 1$ . Além disso,  $\mu(G_{n,0}) \leq \dots \leq \mu(G_{n,k}) \leq \dots \leq \mu(G_{n, \frac{n(n-3)}{2}})$ .

**Prova:** Conforme a Definição 3.2,  $G_{n,k}$  possui  $n+k$  arestas, tendo como média dos graus  $\bar{d}(G_{n,k}) = 2 + \frac{2k}{n}$ . Da hipótese, tem-se  $0 \leq k \leq \frac{n(n-3)}{2}$ . Assim,  $2 \leq \bar{d}(G_{n,k}) \leq n - 1$  e então,  $2 \leq \mu(G_{n,k}) \leq n - 1$ . O número de arestas do grafo  $G_{n,k+1}$  difere do número de aresta do grafo  $G_{n,k}$  por uma unidade. Logo,  $\bar{d}(G_{n,k+1}) = \bar{d}(G_{n,k}) + \frac{2}{n}$  e, para todo  $k$ ,  $0 \leq k \leq \frac{n(n-3)}{2} - 1$ , tem-se  $\mu(G_{n,k}) \leq \mu(G_{n,k+1})$ . Portanto,  $\mu(G_{n,0}) \leq \dots \leq \mu(G_{n,k}) \leq \dots \leq \mu(G_{n, \frac{n(n-3)}{2}})$ . ■

Pela Definição 3.2,  $\Delta(G_{n,k}) = n - 1$ . Daí,  $2 \leq \mu(G_{n,k}) \leq n - 1$ . Do Lema 2.5, se  $\mu(G_{n,k}) = n - 1$ ,  $G_{n,k}$  é um grafo balanceado. Por outro lado, se  $2 \leq \mu(G_{n,k}) \leq n - 2$ , temos  $G_{n,k}$  não-balanceado. A Proposição 3.4, apresentada a seguir, dá condições sobre  $n$  e  $k$  para se ter  $G_{n,k}$  balanceado.

**Proposição 3.4** *Seja  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 4$ . Se  $n$  é ímpar, seja  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{(n-1)(n-3)}{2} - 1 \leq k \leq \frac{n(n-3)}{2}$  e se  $n$  é par, seja  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{(n-2)^2}{2} - 1 \leq k \leq \frac{n(n-3)}{2}$ , então, em ambos os casos,  $G_{n,k}$  é balanceado.*

**Prova:** Faremos a prova para o caso  $n$  ímpar. A prova no caso  $n$  par é semelhante. Da hipótese geral temos  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 4$ . Da Definição 3.2,  $G_{n,k} = K_1 \nabla QC(n - 1, k + 1)$  e  $\Delta(G_{n,k}) = n - 1$ . Suponhamos  $n$  ímpar e  $0 \leq k \leq \frac{(n-1)(n-3)}{2} - 2$ . Da Proposição 3.3,  $\mu(G_{n,k})$  é uma função crescente em  $k$ . Logo, precisamos somente determinar o valor de  $\mu(G_{n,k})$  para  $k = \frac{(n-1)(n-3)}{2} - 2$ . Sendo  $n$  ímpar e  $k$  natural,  $\mu(G_{n, \frac{(n-1)(n-3)}{2} - 2}) = n - 2$ . Do Lema 2.5,  $G_{n,k}$  é não-balanceado, para todo  $0 \leq k \leq \frac{(n-1)(n-3)}{2} - 2$ . Tomemos agora  $k = \frac{(n-1)(n-3)}{2} - 1$ . Para este caso, é fácil provar que  $\mu(G_{n, \frac{(n-1)(n-3)}{2} - 1}) = n - 1$ , o que implica  $U = \emptyset$  e o grafo é balanceado, sendo  $n - 1$  o máximo valor possível para  $\mu(G_{n,k})$ . Assim, da Proposição 3.3, para todo natural  $k$ ,  $\frac{(n-1)(n-3)}{2} - 1 \leq k \leq \frac{n(n-3)}{2}$ ,  $\mu(G_{n,k}) = n - 1$ . Portanto, novamente chegamos a  $U = \emptyset$  e o grafo são balanceados. ■

Na Proposição 3.4 é importante observar que  $n$  e  $k \in \mathbb{N}$  e que a variação de  $k$  depende da paridade de  $n$ . A Tabela 1 exibe o top dos grafos  $G_{6,k}$ ,  $0 \leq k \leq 9$  e  $G_{7,k}$ ,  $0 \leq k \leq 14$ , enumerando todos os valores de  $k$  que satisfazem as condições para o grafo ser ou não-balanceado atendendo-se os limites impostos pela Proposição 3.4. Assim, para  $n = 6$ (par) tem-se  $7 \leq k \leq 9$  e para  $n = 7$ (ímpar)  $11 \leq k \leq 14$ .

$G_{6,k}$ $0 \leq k \leq 9$				$G_{7,k}$ $0 \leq k \leq 14$			
$k$	$\bar{d}(G)$	$\mu(G)$		$k$	$\bar{d}(G)$	$\mu(G)$	
0	2	2	não-balanceado	0	2	2	não-balanceado
1	2, 4	3	não-balanceado	1	2, 28	3	não-balanceado
2	2, 66	3	não-balanceado	2	2, 57	3	não-balanceado
3	3	3	não-balanceado	3	2, 85	3	não-balanceado
4	3, 33	4	não-balanceado	4	3, 14	4	não-balanceado
5	3, 66	4	não-balanceado	5	3, 42	4	não-balanceado
6	4	4	não-balanceado	6	3, 71	4	não-balanceado
<b>7</b>	<b>4, 33</b>	<b>5</b>	<b>balanceado</b>	7	4	4	não-balanceado
<b>8</b>	<b>4, 66</b>	<b>5</b>	<b>balanceado</b>	8	4, 28	5	não-balanceado
<b>9</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>balanceado</b>	9	4, 57	5	não-balanceado
				10	4, 85	5	não-balanceado
				<b>11</b>	<b>5, 14</b>	<b>6</b>	<b>balanceado</b>
				<b>12</b>	<b>5, 42</b>	<b>6</b>	<b>balanceado</b>
				<b>13</b>	<b>5, 71</b>	<b>6</b>	<b>balanceado</b>
				<b>14</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>balanceado</b>

Tabela 1: Grafos  $G_{6,k}$   $0 \leq k \leq 9$  e  $G_{7,k}$ ,  $0 \leq k \leq 14$  balanceados e não-balanceados

A definição que segue corresponde aos grafos  $H_{n,k}$  que foram introduzidos por Brualdi e Solheid (1986).

**Definição 3.5** *Sejam  $n, k \in \mathbb{Z}$  tais que  $0 \leq k \leq n - 3$ . Considere  $H_{n,k}$  um grafo conexo com  $n$  vértices e  $n + k$  arestas construído da seguinte forma: primeiro rotulamos os vértices de 1 a  $n$  e ligamos 1 a cada um dos demais vértices, para construir a estrela  $S_n$ , de centro 1. A seguir, ligamos o vértice 2 aos vértices numerados de 3 até  $k + 3$ .*

Na Figura 8 exibimos alguns exemplares dos grafos dados na Definição 3.5.

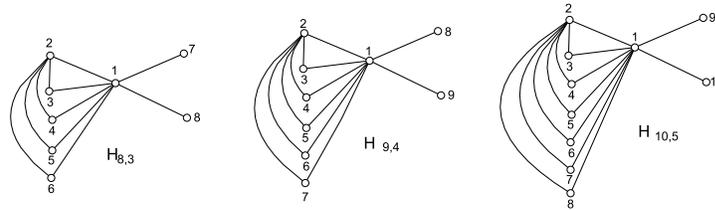


Figura 8: Grafos  $H_{8,3}$ ,  $H_{9,4}$  e  $H_{10,5}$ .

A proposição que segue mostra, para que  $n$  fixo, e  $0 \leq k \leq (n - 3)$  o top do grafo  $H_{n,k}$  é uma função crescente em  $k$  cuja prova é análoga a aquela dada na Proposição 3.4.

**Proposição 3.6** *Para todo grafo  $H_{n,k}$  tal que  $0 \leq k \leq n - 3$ , temos*

$$\mu(H_{n,0}) \leq \dots \leq \mu(H_{n,k}) \leq \dots \leq \mu(H_{n,n-3}).$$

A Proposição 3.7 mostra, que os valores do top de  $H_{n,k}$  são exatamente 2,3 ou 4, dependendo do subintervalo de  $[0, n - 3]$  onde  $k$  esteja.

**Proposição 3.7** *Seja  $H_{n,k}$  tal que  $n \geq 7$  e  $0 \leq k \leq n - 3$ . Para  $n$  par, tem-se*

$$\mu(H_{n,k}) = \begin{cases} 2, & \text{se } k = 0; \\ 3, & \text{se } 1 \leq k \leq \frac{n}{2}; \\ 4, & \text{se } \frac{n}{2} + 1 \leq k \leq n - 3. \end{cases}$$

*Para  $n$  ímpar, tem-se*

$$\mu(H_{n,k}) = \begin{cases} 2, & \text{se } k = 0; \\ 3, & \text{se } 1 \leq k \leq \frac{n+1}{2} - 1; \\ 4, & \text{se } \frac{n+1}{2} \leq k \leq n - 3. \end{cases}$$

**Prova:** Para  $n$  par, o grafo  $H_{n,k}$  possui  $n+k$  arestas, logo a média dos graus é igual a  $\bar{d}(G) = 2 + \frac{2k}{n}$ . Se  $k = 0$ , então  $\bar{d}(G) = 2 = \mu(H_{n,0})$ . Se  $k = 1$ , então  $\mu(H_{n,1}) = \lceil 2 + \frac{2}{n} \rceil = 3$ . Dado que  $n$  é par, podemos tomar  $k = \frac{n}{2}$ , então  $\mu(H_{n,\frac{n}{2}}) = \lceil 2 + \frac{2}{n} \cdot \frac{n}{2} \rceil = 3$ . Logo, pela Proposição 3.6,  $\mu(H_{n,k}) = 3$  para todo  $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ . Se  $k = \frac{n}{2} + 1$ , então  $\mu(H_{n,\frac{n}{2}+1}) = \lceil 2 + \frac{2}{n}(\frac{n}{2} + 1) \rceil = 4$ . Se  $k = n - 3$ , então  $\mu(H_{n,n-3}) = \lceil 2 + \frac{2}{n}(n - 3) \rceil = \lceil 4 - \frac{6}{n} \rceil = 4$ , para todo  $n > 6$ . Portanto, pela Proposição 3.6,  $\mu(H_{n,k}) = 4$  para  $\frac{n}{2} + 1 \leq k \leq n - 3$ . Para  $n$  ímpar a prova segue de forma similar. ■

**Lema 3.8** *Exceto para os grafos  $H_{3,0}$  e  $H_{4,1}$  todos os demais  $H_{n,k}$  são grafos não-balanceados.*

**Prova:** Para os casos em que  $n = 3, k = 0$  e  $n = 4, k = 1$ , os grafos tem  $\Delta(H_{3,0}) = \Delta(H_{4,1}) = 3$  e  $\mu(H_{3,0}) = \mu(H_{4,1}) = 3$ . Portanto,  $H_{3,0}$  e  $H_{4,1}$  são balanceados. Agora, Para  $n = 5, \Delta(H_{5,k}) = 4$  e se  $0 \leq k \leq 2$ , é fácil verificar que  $\mu(H_{5,k}) = 2$  ou  $3$ . Assim, neste caso,  $U = \emptyset$  e o grafo é não balanceado. Para  $n = 6, \Delta(H_{6,k}) = 5$  e se  $0 \leq k \leq 3$ , facilmente obtemos  $\mu(H_{6,k}) = 2$  ou  $3$ . Novamente obtemos  $U \neq \emptyset$ , provando ser  $H_{n,k}$  não balanceado. Finalmente, para  $n \geq 7$ , segue-se da Proposição 3.7 que  $\mu(H_{n,k}) \in \{2, 3, 4\}$ . Nestes casos,  $\Delta(H_{n,k}) \geq 6$  e, portanto, o conjunto de vértices superiores de tais grafos é não vazio e o grafo é não balanceado, o que completa a prova. ■

O Lema 3.9 determina os conjuntos de vértices inferiores, balanceados e superiores de  $H_{n,k}$ .

**Lema 3.9** *Dado  $n \geq 7$ , seja  $H_{n,k}$  tal que  $0 \leq k \leq n - 3$ . Então,*

- i) se  $k = 0$ ,  $|L| = n - 3$ ,  $|B| = 2$  e  $|U| = 1$ ;
- ii) se  $k = 1$ ,  $|L| = n - 2$ ,  $|B| = 1$  e  $|U| = 1$ ;
- iii) se  $2 \leq k \leq n - 3$ ,  $|L| = n - 2$ ,  $|B| = 0$  e  $|U| = 2$ .

**Prova:** Se  $k = 0$  ou  $k = 1$ , os grafos  $H_{n,0}$  e  $H_{n,1}$  possuem exatamente 1 vértice de grau  $n - 1$ , 2 vértices de grau 2. Para  $H_{n,0}$  há  $n - 3$  vértices de grau 1, enquanto para  $H_{n,1}$  há somente 1 vértice de grau 3 e  $n - 4$  vértices de grau 1. Da Proposição 3.7,  $\mu(H_{n,0}) = 2$  e  $\mu(H_{n,1}) = 3$ . Portanto, enquanto para  $H_{n,0}$  temos  $|L| = n - 3$ ,  $|B| = 2$  e  $|U| = 1$ , para  $H_{n,1}$  temos  $|L| = n - 2$ ,  $|B| = 1$ ,  $|U| = 1$ .

Sejam  $n \geq 8$ ,  $n$  par e  $2 \leq k \leq \frac{n}{2}$ . Logo,  $H_{n,k}$  possui exatamente 1 vértice de grau  $n - 1$ ,  $k + 1$  vértices de grau 2, 1 vértice de grau  $k + 2$  e  $n - k - 3$  vértices de grau 1. Pela Proposição 3.7  $\mu(H_{n,k}) = 3$ . Como  $2 \leq k \leq \frac{n}{2}$  temos que o vértice de grau  $k + 2$  é um vértice superior, pois  $k + 2 \geq 4$ . Portanto,  $|L| = n - 2$ ,  $|B| = 0$ ,  $|U| = 2$ . Agora analisaremos o caso em que  $\frac{n}{2} + 1 \leq k \leq n - 3$ . Assim,  $H_{n,k}$  possui exatamente 1 vértice de grau  $n - 1$ ,  $k + 1$  vértices de grau 2, 1 vértice de grau  $k + 2$  e  $n - k - 3$  vértices de grau 1. Pela Proposição 3.7,  $\mu(H_{n,k}) = 4$ . Como  $\frac{n}{2} + 1 \leq k \leq n - 3$  temos que o vértice de grau  $k + 2$  é um vértice superior, pois  $k + 2 \geq 7$ . Portanto,  $|L| = n - 2$ ,  $|B| = 0$ ,  $|U| = 2$ . Para  $n$  ímpar e  $n \geq 7$  a prova é similar. ■

#### 4. $G_{n,k}$ e $H_{n,k}$ para $k = 0$ e $1$

Para os casos  $k = 0, 1$ , decorre diretamente das Definições 3.2 e 3.5 o isomorfismo  $H_{n,k} \cong G_{n,k}$ . A partir dessa observação, obtivemos os resultados a seguir.

**Lema 4.1** *Para  $n \geq 5$  e  $k = 0$ , os grafos  $H_{n,0} \cong G_{n,0}$  são grafos não-balanceados, com gap nulo e possuem apenas um conjunto equilibrador pleno.*

**Prova:** Pelo Lema 3.8,  $H_{n,0}$  é não-balanceado. Como  $k = 0$ , da Proposição 3.9  $|L| = n - 3$ , sendo os  $n - 3$  vértices de grau 1, e  $|U| = 1$  sendo o vértice de grau  $n - 1$ . Considere  $|\Psi| = t$ , o número de vértices de um subconjunto de  $L$  possível candidato a conjunto equilibrador. Como  $\bar{d}(H_{n,0}) = \mu(H_{n,0}) = 2$ , usando a expressão (1), chegamos a

$$\frac{t + n - 1}{t + 1} = 2 \Rightarrow t = n - 3.$$

Portanto,  $H_{n,0}$  possui um conjunto equilibrador  $\Psi$  com  $n - 3$  vértices. Como  $|L| = n - 3$ ,  $\Psi = L$  e portanto é o conjunto equilibrador pleno. ■

**Lema 4.2** Para  $n \geq 7$  e  $k = 1$ , os grafos  $H_{n,1} \cong G_{n,1}$  são não-balanceados e possuem conjuntos equilibradores de cardinalidade  $\frac{n-5}{2}$  se  $n$  é ímpar e  $\frac{n-6}{2}$  se  $n$  é par.

**Prova:** Como  $n \geq 7$ , podemos usar o Lema 3.8 para concluir que  $H_{n,1}$  é não-balanceado. Como  $k = 1$ , pelas Proposições 3.7 e 3.9, tem-se  $\mu(H_{n,1}) = 3$ ,  $|L| = n - 2$ , sendo  $n - 4$  vértices de grau 1 e 2 vértices de grau 2. Como  $\mu(H_{n,1}) = 3$ ,  $n \geq 7$  e  $H_{n,1}$  possui um único vértice universal, então  $|U| = 1$ . Nessas condições, um possível conjunto equilibrador  $\Psi$  de  $H_{n,1}$  poderia ter  $t_1$  vértices de grau 1 e um vértice de grau 2 ou  $t_2$  vértices de grau 1 e dois vértices de grau 2. Novamente da expressão (1) e de modo análogo ao raciocínio anterior, chegamos que  $t_1 = \frac{n-5}{2}$  e  $t_2 = \frac{n-6}{2}$ . Dado que  $t_1, t_2$  são números naturais, a cardinalidade de cada equilibrador só pode ser satisfeita por  $t_1$  quando  $n$  é ímpar e por  $t_2$  quando  $n$  é par. Logo, para  $n \geq 7$ , por construção é fácil realizar grafos  $H_{n,1}$  com mais de um conjunto equilibrador. ■

## 5. Considerações Finais

Neste trabalho foram determinados os valores do top para os grafos  $H_{n,k}$  e  $G_{n,k}$  com a finalidade de encontrar valores de  $k$  para os quais esses grafos são balanceados ou não. Visto que estes grafos são extremais para a medida de irregularidade definida por Collatz (ver Bell (1992)), seria natural esperarmos que tais grafos fossem não-balanceados. O que realmente acontece para os grafos  $H_{n,k}$ . Já para os grafos da família  $G_{n,k}$ , se o valor de  $k$  for relativamente grande, a intuição não se confirma. É muito provável que o valor da medida de irregularidade diminua enquanto o valor de  $k$  cresce. Como trabalho futuro sugerimos a investigação deste fato.

**Agradecimentos:** Os autores agradecem ao CNPq(Processo N. 474754/2010-3) pelo financiamento parcial dessa pesquisa.

## Referências

Ahlsved, R. e Katona, G. O. H. (1978). Graphs with Maximal Number of Adjacent pairs of Edges. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 32 : 97 – 120.

Bell, F.K.(1992). A note on the irregularity of graphs. *Linear Algebra and its Applications*, v. 161, 45-54.

Brualdi, R. A. e Solheid, E. S. (1986). On the Spectral Radius of Connected Graphs. *Publications de L'Institut Mathématique(BEOGRAD)(N.S.)*, 39(53) : 45 – 54.

Cvetković, D. e Rowlinson, P. (1988). On Connected Graphs with Maximal Index. *Publications de L'Institut Mathématique(BEOGRAD)(N.S.)*, 44(58) : 29 – 34.

Damas, M. P., Abreu, N. M. M. e Markenzon, L.(2007). New Concepts and Results on the Average Degree of a Graph. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 1 : 1 – 11.

Distel, R. (1997). Graph Theory GTM 173, Springer.

Moraes, P.E., Abreu, N.M.N., Jurkiewicz, S. (2001). Graphs with homogenous density in  $(a, b)$ –linear classes. *Congressus Numerantium*, 166 : 53 – 64.

Rodrigues, R. M. N. D., Abreu, N. M. M. e Markenzon, L.(1999).Maxregularity and Maximal Outerplanar Graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 3.