Limitantes Inferiores para o Problema de Dimensionamento de Lotes em Máquinas Paralelas

Diego Jacinto Fiorotto
Depto de Ciências de Computação e Estatística, IBILCE, UNESP
R. Cristóvão Colombo, 2265 - Jd. Nazareth - São José do Rio Preto- SP - CEP: 15054-000
diego_fiorotto@hotmail.com

Silvio Alexandre de Araujo
Depto de Ciências de Computação e Estatística, IBILCE, UNESP
R. Cristóvão Colombo, 2265 - Jd. Nazareth - São José do Rio Preto - SP - CEP: 15054-000
saraujo@ibilce.unesp.com.br

RESUMO

O problema de dimensionamento de lotes é um problema de otimização da produção, em que o objetivo é planejar a quantidade de itens a ser produzida em várias, ou única, máquinas em cada período ao longo de um horizonte de tempo, de modo a atender uma demanda e otimizar uma função objetivo. Este trabalho aborda o problema de dimensionamento de lotes monoestágio em um ambiente com máquinas paralelas distintas. Cada item pode ser produzido em qualquer máquina, acarretando um tempo de preparação que é gasto antes de começar a produção. O objetivo do trabalho consiste em obter limitantes inferiores de boa qualidade para este problema. Para tanto, é desenvolvido um método de solução baseado numa reformulação do problema e na relaxação lagrangiana de um conjunto de restrições. Alguns resultados computacionais são apresentados comparando o método proposto com um trabalho da literatura.

PALAVRAS CHAVE. Dimensionamento de Lotes, Máquinas Paralelas, Limites Inferiores.

Área principal. IND- PO na Indústria.

ABSTRACT

The lot-sizing problem is a production optimization problem, where the objective is to plan the quantity of items to be produced in multiple, or single, machines in each period over a time horizon, in order to satisfy a demand and optimize an objective function. This paper addresses the single stage lot-sizing problem in an environment with different parallel machines. Each item can be produced on any machine, and incur a setup time before to start the production. The objective of this paper is to obtain lower bounds of good quality for this problem. For that, a solution method is developed based on a reformulation of the problem and the Lagrangian relaxation of a set of constraints. Some computational results are presented comparing the proposed method with a method from the literature.

KEYWORDS. Lot-Sizing, Parallel Machines, Lower Bounds.

Main area. IND- OR in Industry

1. Introdução

O problema de dimensionamento de lotes é um problema de otimização da produção, em que o objetivo é planejar a quantidade de itens a ser produzida em várias, ou única, máquinas em cada período ao longo de um horizonte de tempo, de modo a atender uma demanda e otimizar uma função objetivo. O problema estudado neste trabalho, envolve o planejamento da produção de múltiplos itens em um único estágio composto de máquinas paralelas distintas com capacidade limitada. Os itens podem ser produzidos em qualquer uma das máquinas e para iniciar a produção de um item utiliza-se um tempo de preparação da máquina utilizada.

A intenção deste trabalho é estudar e encontrar bons limites inferiores para este problema, para tanto uma nova formulação é proposta e os limites inferiores são gerados através da relaxação Lagrangiana, de tal maneira que, diferente da maioria dos trabalhos que utilizam a decomposição tradicional, ou seja, por itens, utilizamos a decomposição por períodos seguindo as idéias de Jans e Degraeve (2004) que fazem o mesmo para o caso com uma máquina. Cabe ressaltar a importância de se estudar e obter bons limites inferiores para estes problemas devido sua grande complexidade computacional, pondendo assim, diminuir consideravelmente os tempos e as árvores de solução dos algoritmos exatos.

2. Formulação do Problema

Para a Formulação Matemática do problema considere os seguintes dados:
d_{it}: demanda do item i no período t;
sd_{itk}: soma da demanda do item i, do período t até o período k;
hc_{it}: custo unitário de estoque do item i no período t;
sc_{ijt}: custo de preparo do item i na máquina j no período t;
vc_{ijt}: custo de produção do item i na máquina j no período t;
fc_i: custo unitário de estoque inicial para o item i;
st_{ijt}: tempo de preparo do item i na máquina j no período t;
vt_{ijt}: tempo de produção do item i na máquina j no período t;
Cap_{jt}: capacidade da máquina j no período t.

Variáveis de decisão:
x_{ijt}: unidades produzidas do item i na máquina j no período t;
y_{ijt}: variável binária, indicando a produção ou não do item i na máquina j no período t;
s_{it}: estoque do item i no final do período t;
s_{i0}: quantidade de estoque inicial para o item i.

Formulação matemática (CLM).

$$Min \sum_{i=1}^{n} fc_i s_{i0} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}\sum_{t=1}^{m}(sc_{ijt}y_{ijt} + vc_{ijt}x_{ijt}) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{m} hc_{it}s_{it} \;\; CLM \tag{1}$$

Sujeito a :

$$s_{i,t-1} + \sum_{j=1}^{k} x_{ijt} = d_{it} + s_{it} \qquad \forall i \in I, t \in T \tag{2}$$

$$x_{ijt} \leq sd_{itm}y_{ijt} \qquad \forall i \in I, j \in J, t \in T \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(st_{ijt}y_{ijt} + vt_{ijt}x_{ijt}) \leq Cap_{jt} \qquad \forall j \in J, t \in T \tag{4}$$

$$y_{ijt} \in \{0,1\},\ x_{ijt} \geq 0,\ s_{it} \geq 0,\ s_{i0} \geq 0,\ s_{im} = 0\ \forall i \in I, j \in J, t \in T \tag{5}$$

A função objetivo (1) minimiza os custos totais de preparação, produção, estoque e estoque inicial. As restrições (2) garantem o balanceamento de estoque. Para evitar problemas infactíveis o modelo considera a possibilidade de estoque inicial, contudo o custo fc_i para este estoque é muito grande, assim s_{i0} terá valor diferente de zero apenas quando o problema não tiver solução factível (Vanderbeck (1998)). Não existe preparo para o estoque inicial. Em seguida, temos as restrições de preparo (3) e as limitações de capacidade (4). Finalmente, em (5) tem-se a definição dos domínios das variáveis.

Este problema pode ser reformulado usando a abordagem de redefinição das variáveis proposta por Eppen e Martin (1987). A motivação para estudar esta abordagem decorre dos resultados obtidos por Jans e Degraeve (2004) que mostram que para o problema de dimensionamento em uma máquina os limites inferiores resultantes da decomposição por períodos utilizando esta reformulação são melhores que os obtidos utilizando a decomposição por item da formulação original. Para a reformulação defina os seguintes parâmetros:

cv_{ijtk}: custo de produção e estoque total para produzir o item i, na máquina j no período t para satisfazer a demanda dos períodos t até k

$$= vc_{ijt} sd_{itk} + \sum_{s=t+1}^{k} \sum_{u=t}^{s-1} hc_{iu} d_{is}$$

ci_{it}: custo de produção e estoque total para que o estoque inicial do item i satisfaça a demanda dos períodos 1 até o período t

$$= fc_i sd_{i1t} + \sum_{s=2}^{t} \sum_{u=1}^{s-1} hc_{iu} d_{is}$$

Temos também as seguintes novas variáveis para o modelo:

zv_{ijtk}: fração do plano de produção do item i na máquina j, em que a produção no período t satisfaz a demanda do período t até o período k

w_{it}: fração do plano de estoque inicial do item i em que a demanda é satisfeita para os primeiros t períodos

Então, a reformulação denotada por EMM é a seguinte:

$$Min \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{m} ci_{it} w_{it} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} \sum_{t=1}^{m} sc_{ijt} y_{ijt} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} \sum_{t=1}^{m} \sum_{k=t}^{m} cv_{ijtk} zv_{ijtk} \quad EMM \tag{6}$$

Sujeito a :

$$1 = \sum_{k=1}^{m} w_{ik} + \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{m} zv_{i,j,1,k} \qquad \forall i \in I \tag{7}$$

$$w_{i,t-1} + \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{t-1} zv_{i,j,k,t-1} = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=t}^{m} zv_{ijtk} \qquad \forall i \in I, t \in T/\{1\} \tag{8}$$

$$\sum_{k=t}^{m} zv_{ijtk} \leq y_{ijt} \qquad \forall i \in I, j \in J, t \in T \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} st_{ijt} y_{ijt} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=t}^{m} vt_{ijt} sd_{itk} zv_{ijtk} \leq Cap_{jt} \qquad \forall i \in I, j \in J, t \in T \tag{10}$$

$$y_{ijt} \in \{0, 1\}, \quad w_{it} \geq 0 \qquad \forall i \in I, j \in J \tag{11}$$

$$zv_{ijtk} \geq 0 \qquad \forall i \in I, j \in J, t \in T \;\; \forall k \in T, k \geq t \tag{12}$$

A função objetivo (6) minimiza a soma dos custos de estoque inicial, preparação, produção regular e custos de estocagem. As restriçãoes (7) e (8) definem as restrições de fluxo para a rede de caminho mínimo. Para cada produto, uma unidade de fluxo é enviada à rede, impondo que a demanda de cada produto tem que ser satisfeita sem atraso. As restrições (9) forçam a preparação para cada item a ser produzido. As restrições de capacidade (10) limitam a soma total dos tempos de preparação e produção pela capacidade disponível em cada período e em cada máquina. As restrições (11) e (12) definem o domínio das variáveis. Sejam v_{EMM} o valor ótimo da função objetivo da reformulação de Eppen e Martin $(6)-(12)$ e $\overline{v}_{EMM}$ o valor ótimo da relaxação linear.

3. Relaxação Lagrangiana Aplicada as Restrições de Fluxo

Nesta seção vamos apresentar uma nova relaxação Lagrangiana baseada em Jans e Degraeve (2004), em que considera-se o modelo EMM $(6)-(12)$ e as restrições de fluxo (7) e (8) são dualizadas na função objetivo. O problema se decompõe em subproblemas independentes, por períodos e por máquinas e contém as restrições de capacidade, preparação e as condições de integralidade. Assim, os pontos extremos representam planos de produção a cada período e para cada máquina, ou seja, o número de subproblemas está vinculado ao número total de períodos e de máquinas. As colunas são os planos de produção por períodos e máquinas, indicando, para cada período e máquina quais produtos são produzidos e em quais quantidades. Todos esses planos de produção são factíveis em relação as restrições de capacidade. Além de Jans e Degraeve (2004) que consideram o problema com uma única máquina, Diaby *et al.* (1992) testam esta decomposição por períodos, considerando a formulação CL em que também se tem uma única máquina. De seus testes computacionais, concluíram que a decomposição por item é superior à decomposição por período para esta formulação. Ainda para o problema com única máquina, esta decomposição é discutida, sem testes computacionais, para o problema de dimensionamento de lotes sem tempos de preparação em Chen e Thizy (1990). Pimentel *et al.* (2010) também fazem tal análise e chegam a mesma conclusão, Sural *et al.* (2009) também testam a decomposição por períodos para o caso sem custo de preparação e assim como Jans e Degraeve (2004) consideram uma reformulação do modelo CL. Neste trabalho, começaremos da formulação EMM $(6)-(12)$ e aplicaremos a decomposição por períodos e por máquinas, resultando no limite inferior $v_{EMM/P/RL}$ ($EMM/P/RL$ pois utilia-se a formulação EMM, aplica-se a decomposição por períodos (P) e a técnica de relaxação Lagrangiana (RL)). Deve-se observar que não encontramos na literatura nenhum trabalho que considera a decomposição por períodos para o caso de máquinas paralelas.

Na relaxação Lagrangiana as restrições (7) e (8) são dualizadas na função objetivo (6) com multiplicadores lagrangianos p_{it}.

$$\begin{aligned} Min \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{m} ci_{it}w_{it} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}\sum_{t=1}^{m} sc_{ijt}y_{ijt} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}\sum_{t=1}^{m}\sum_{k=t}^{m} cv_{ijtk}zv_{ijtk} - \\ -\sum_{i=1}^{n} p_{i1}(\sum_{k=1}^{m} w_{ik} + \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{m} zv_{i,j,1,k} - 1) - \\ -\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=2}^{m} p_{it}(\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=t}^{m} zv_{ijtk} - w_{i,t-1} - \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{t-1} zv_{ijk,t-1}) \end{aligned} \tag{13}$$

Após reorganizar os termos da função objetivo, o problema de Lagrange torna-se:

$$Min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}\sum_{t=1}^{m} sc_{ijt}y_{ijt} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{m-1}(ci_{it} - p_{i,1} + p_{i,t+1})w_{it} +$$
$$+\sum_{i=1}^{n}(ci_{im} - p_{i,1})w_{im} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}\sum_{t=1}^{m}\sum_{k=t}^{m-1}(cv_{ijtk} - p_{it} + p_{i,k+1})zv_{ijtk} +$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}\sum_{t=1}^{m}(cv_{ijtm} - p_{it})zv_{ijtm} + \sum_{i=1}^{n} p_{i1} \qquad (14)$$

Sujeito a :

$$\sum_{k=t}^{m} zv_{ijtk} \leq y_{ijt} \qquad \forall i \in I, j \in J, t \in T \qquad (15)$$
$$\sum_{i=1}^{n} st_{ijt}y_{ijt} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=t}^{m} vt_{ijt}sd_{itk}zv_{ijtk} \leq Cap_{jt} \qquad \forall j \in J, t \in T \qquad (16)$$
$$y_{ijt} \in \{0,1\}, \quad w_{it} \geq 0 \qquad \forall i \in I, j \in J, t \in T \qquad (17)$$
$$zv_{ijtk} \geq 0 \qquad \forall i \in I, j \in J, t \in T \ \ \forall k \in T, k \geq t \qquad (18)$$

O problema pode ser decomposto em subproblemas independentes para cada período t e cada máquina j. Estes subproblemas podem ser resolvidos pelo método *branch-and-bound* proposto por Jans e Degraeve (2004). O problema Lagrangiano é resolvido durante algumas iterações e os multiplicadores Lagrangianos p_{it} são atualizados pelo método de otimização do subgradiente.

Para iniciar o método, fixamos as variáveis duais em zero ($p^0_{it} = 0$) e o tamanho do passo na direção do subgradiente é proporcional a um parâmetro α, que deve decrescer com o número de iterações e a regra utilizada para gerar uma sequência decrescente para α é caracterizada pelos parâmetros (α_0, r_0, d). Os valores de α são obtidos fazendo $\alpha = \alpha_0$ e é diminuido progressivamente multiplicando-o por um parâmetro d, se a solução Lagrangiana $v_{EMM/P/RL}$ não for melhorada nas últimas $r = r_0$ iterações. Além disso, o limite superior ub é um número grande fixado. Os valores utilizados para os parâmetros são $(1, 50, 0.7)$ e são realizadas 5000 iterações do método.

4. Resultados Computacionais

O procedimento, denominado $EMM/P/RL$, foi testado em um total de 2880 instâncias porpostas em Toledo e Armentano (2006) e divididas em 10 instâncias para cada configuração de número de máquinas ($r = 2, 4, 6$), itens ($n = 6, 12, 25, 50$) e períodos ($m = 6, 12, 18$) e comparado com o procedimento encontrado na literatura denomidado $CLM/I/RL$ (utiliza-se a formulação CLM, aplica-se a decomposição por itens e a técnica de relaxação Lagrangiana). Estas 2880 instâncias são divididas em 8 tipos diferentes de classes de que são geradas com valores altos e baixos para os custos e tempos de preparação e com capacidades normal e apertada.

Os parâmetros foram gerados em intervalos $[a, b]$ com distribuição uniforme e denotado $U[a, b]$:

- custo de produção (vc_{ij}) U[1.5,2.5]
- custo de preparação (sc_{ij}) U[5.0,95.0]

- custo de estoque (hc_i) U[0.2,0.4]
- tempo de produção (vt_{ij}) U[1.0,5.0]
- tempo de preparação (st_{ij}) U[10.0,50.0]
- demanda (d_{it}) U[0,180]

Para gerar exemplares com custos de preparação alto multiplicamos os custos gerados por 10, da mesma forma, para gerar exemplares com tempos de preparação alto multiplicaremos estes por 1.5.

A capacidade foi gerada de seguinte forma: a demanda de cada item e cada período é dividida entre as máquinas e a política lote-por-lote é aplicada a cada máquina. A média é calculada sobre o número de máquinas e períodos, isso resulta na seguinte expressão para a capacidade em cada período:

$$Cap = \frac{\sum_{t=1}^{m}\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}(\frac{d_{it}}{r}vt_{ij} + st_{ij})}{rm}$$

Nesta expressão uma preparação de todos os itens é reservada para todas as máquinas e períodos, o que gera muita capacidade para cada período, principalmente para testes com quatro e seis máquinas. Testes iniciais realizados por Toledo e Armentano (2006) mostram que utilizando esta capacidade as soluções geradas utilizaram um nível de capacidade baixa, em média 70% e 65% para custos de preparação altos e baixos. A fim de gerar instâncias com a utilização da capacidade em torno de 80% para 2, 4 e 6 máquinas, utiliza-se o método dos mínimos quadrados para ajustar uma expressão linear da capacidade em função do número de máquinas:

$$Cap^* = (1.18 - 0.07r)Cap$$

A capacidade apertada é obtida multiplicando Cap^* por 0.9. Para avaliar a qualidade dos limites inferiores calcularemos os GAP da seguinte forma:

$$Gap = \frac{z_{CPLEX} - z_{RL}}{z_{RL}} * 100$$

onde:
z_{CPLEX} é o valor da solução encontrada pelo CPLEX;
z_{RL} limite inferior obtido com a relaxação Lagrangiana;

A Tabela 1 apresenta a quantidade de instâncias para cada configuração, número de períodos, máquinas e itens que o CPLEX 12.2 provou a otimalidade no tempo máximo de dois minutos, para cada instância, o que permite analisar a dificuldade em se obter soluções para os problemas conforme suas características. Observa-se que para problemas com 6 períodos o CPLEX provou a otimalidade para quase todas as instâncias, por outro lado, para os problemas com 18 períodos, na maioria dos casos o solver não provou a otimalidade em nenhum dos exemplos. Verifica-se ainda um aumento considerável na dificuldade dos problemas quando aumenta-se os custos de preparação.

A Tabela 2 mostra a média de todos os *gaps* e tempos encontrados pelas duas formulações para todos os tamanhos de acordo com os três fatores abordados: capacidade, custo e tempo de preparação. Pode-se verificar que os maiores *gaps* e tempos de solução

m	r	n	CNSBTB	CNSATB	CNSBTA	CNSATA	CASBTB	CASATB	CASBTA	CASATA
6	2	6	10	10	10	10	10	10	10	10
		12	10	10	10	10	10	10	10	10
		25	10	10	10	10	10	10	10	9
		50	10	8	10	7	10	3	10	2
	4	6	10	10	10	10	10	10	10	10
		12	10	10	10	10	10	8	10	9
		25	10	8	10	8	10	5	10	4
		50	10	3	10	4	10	0	9	0
	6	6	10	9	10	8	10	9	10	8
		12	10	7	10	6	10	5	10	5
		25	10	8	10	7	10	4	10	4
		50	10	3	10	4	10	1	10	1
12	2	6	10	8	10	6	10	5	9	5
		12	10	6	9	5	9	5	8	5
		25	9	3	9	0	8	0	7	0
		50	10	0	10	0	7	0	7	0
	4	6	8	0	8	0	7	1	5	0
		12	8	2	8	2	6	3	7	2
		25	10	1	10	2	8	0	7	0
		50	10	1	10	1	8	1	7	0
	6	6	5	0	3	0	1	0	1	0
		12	8	0	7	0	6	0	6	0
		25	10	0	9	0	6	0	8	0
		50	10	0	10	0	9	0	10	0
18	2	6	8	1	7	1	6	1	7	1
		12	8	2	7	2	6	0	3	1
		25	5	0	5	0	3	0	3	0
		50	9	0	8	0	6	0	6	0
	4	6	1	0	0	0	0	0	0	0
		12	4	1	3	0	1	0	0	0
		25	7	0	5	0	4	0	3	0
		50	10	0	8	0	6	0	6	0
	6	6	0	0	0	0	0	0	0	0
		12	5	0	4	0	3	0	3	0
		25	8	0	7	0	4	0	4	0
		50	10	0	9	0	8	0	6	0

Tabela 1. Número de soluções ótima encontradas pelo CPLEX

são encontradas no caso de capacidade apertada, custo de preparação alto e tempo de preparação alto (CASATA).

Observe que, apesar da razoável diferença entre os tempos computacionais, o método proposto $EMM/P/RL$ encontrou em média *gaps* 40% melhores que o método clássico $CLM/I/RL$, confirmando a qualidade dos limites inferiores obtidos com a abordagem proposta. A grande diferença dos tempos computacionais entre os dois métodos explica-se pela dificuldade dos subproblemas, enquanto para o método $CLM/I/RL$ os subproblemas são problemas de dimensionamento de lotes com único item em máquinas paralelas sem restrição de capacidade, que são baratos computacionalmente, para o método proposto $EMM/P/RL$ os subproblemas que temos que resolver são problemas da mochila que são caros computacionalmente.

	CLM/I/LR		EMM/P/LR	
Capacidade/Setup	GAP	Tempo	Gap	Tempo
CNSBTB	0,53	0,88	0,27	10,03
CNSATB	3,73	1,25	2,89	15,55
CNSBTA	0,58	0,92	0,23	10,64
CNSATA	4,14	1,30	3,22	16,45
CASBTB	0,82	1,02	0,30	11,75
CASATB	5,02	1,49	4,04	20,07
CASBTA	1,12	1,09	0,47	13,55
CASATA	6,18	1,57	4,22	21,71

Tabela 2. Média de todos resultados

Pode ser observado na Tabela 1, que para os problemas com 18 itens e custos de preparação alto, (CNSATB, CNSATA, CASATB e CASATA) o CPLEX não provou a otimalidade em praticamente nenhuma dessas 480 instâncias, o que mostra uma grande dificuldade encontrada pelo solver para resolver estas instâncias. A Tabela 3 compara os limites inferiores encontrados com o cplex no nó raiz antes e depois de aplicar os cortes e após as ramificações com os gerados pela técnica EMM/P/RL proposta para os problemas com capacidade normal, custo de preparo alto e tempo de preparo baixo (CNSATB) e para os problemas com capacidade apertada, custo e tempo de preparo alto (CASATA). Para as outras duas classes (CNSATA e CASATB) os resultados são similares. Os *gaps* calculados para o CPLEX utilizam como limites inferiores os encontrados no nó raiz após a aplicação dos cortes. Podemos observar que exceto para os casos com 6 itens, a técnica proposta obteve *gaps* em média 35% melhores, sendo que em várias configurações com 25 e 50 itens os *gaps* encontrados com o cplex são maiores que o dobro. Observe ainda, que mesmo após as ramificações os limites inferiores encontrados com a técnica proposta são melhores em todas instâncias com 25 e 50 e em metade das instâncias com 12 itens. Portanto, se utilizarmos os limitantes inferiores gerados pela técnica proposta no nó raiz do cplex, além de obtermos *gaps* melhores, ajudamos o solver fazer várias podas nas árvores de solução e a encontrar soluções factíveis melhores.

				Limites inferiores				Gaps	
	m	r	n	nó raiz	com cortes	ramificações	EMM	cplex	EMM
CNSATB	18	2	6	33222,76	33582,54	34491,22	33152,59	6,07	7,45
			12	65223,02	65356,85	65812,73	65699,10	1,11	0,59
			25	135539,28	135586,39	135739,31	135867,89	0,42	0,21
			50	266736,21	266756,04	266803,56	266967,95	0,12	0,04
		4	6	28948,70	29363,31	30138,46	28842,72	10,09	12,07
			12	57427,38	57627,00	58005,40	57766,87	2,76	2,51
			25	116600,70	116675,68	116808,87	116951,95	0,45	0,22
			50	234976,60	234998,40	235036,33	235151,25	0,13	0,06
		6	6	28319,56	28923,23	29893,48	28642,91	14,83	15,96
			12	54339,62	54574,85	54837,23	55037,62	3,45	2,58
			25	112233,55	112340,82	112432,79	112650,25	0,76	0,48
			50	218875,32	218904,26	218940,32	219055,64	0,11	0,04
CASATA	18	2	6	34003,96	34516,04	36406,75	34595,39	11,55	11,29
			12	66400,96	66568,00	67073,46	67121,71	2,00	1,16
			25	137847,54	137907,29	138040,28	138280,70	0,68	0,41
			50	271162,81	271176,00	271203,22	271409,84	0,24	0,15
		4	6	29318,92	29851,12	31388,89	29060,24	13,64	16,73
			12	57930,92	58216,72	58566,11	58594,37	3,96	3,29
			25	117312,35	117409,55	117513,86	117734,62	0,68	0,41
			50	236042,56	236069,81	236100,82	236488,56	0,28	0,10
		6	6	28639,96	29425,07	30618,21	28263,97	20,71	25,67
			12	54666,65	54979,84	55243,75	55165,84	5,47	5,11
			25	112737,42	112879,53	112941,06	113301,97	1,27	0,89
			50	219529,23	219561,75	219595,36	219784,74	0,28	0,18

Tabela 3. Comparação entre limites inferiores do CPLEX e do EMM/P/RL

A tabela 4 ilustra a performace do método de acordo com o número de itens e máquinas para instâncias com 6, 12 e 18 períodos com capacidade normal, custos de preparação alto e tempos de preparação baixo. Para os outros casos com capacidade normal/apertada, custo de preparação alto/baixo e tempos de preparação altpo/baixo os resultados são similares aos apresentados na tabela 4. Esta tabela mostra que as maiores diferenças dos limites inferiores entre os métodos são para os casos com 6 e 12 itens, onde os *gaps* encontrados com o método proposto são em quase todos os casos são praticamente metade dos escontrados com o método clássico.

A tabela 4 mostra também que para os dois métodos os *gaps* decrescem a medida que o número de itens aumenta, sendo que para os casos com 50 itens para os dois métodos os *gaps* encontrados são bem menores que 1%.

			CPLEX		CLM/I/LR			EMM/P/LR		
m	r	n	LS	Tempo	LI	GAP	Tempo	LI	GAP	Tempo
6	2	6	13672,09	0,84	12859,32	6,32	0,05	13202,48	3,43	0,82
		12	24487,18	2,11	24090,94	1,64	0,08	24244,79	0,98	2,09
		25	50844,82	13,13	50603,94	0,47	0,23	50694,65	0,29	7,73
		50	97745,43	69,19	97631,52	0,27	0,74	97793,49	0,11	21,49
	4	6	11063,14	4,86	10034,90	10,24	0,11	10414,30	5,86	1,01
		12	20515,31	15,69	20059,74	2,27	0,18	20274,78	1,17	2,20
		25	41019,17	48,61	40818,45	0,49	0,38	40930,19	0,21	5,65
		50	83486,66	98,40	83432,76	0,22	1,08	83518,58	0,12	13,06
	6	6	11491,80	45,85	9993,48	14,99	0,21	10355,27	9,88	1,41
		12	19290,97	49,66	18670,88	3,32	0,29	18943,39	1,80	2,59
		25	39085,53	77,36	38816,75	0,69	0,58	38953,85	0,33	6,18
		50	75626,90	99,18	75534,30	0,12	1,31	75593,80	0,04	11,66
12	2	6	24775,37	48,87	23283,43	6,40	0,16	23781,14	4,01	2,05
		12	44890,83	61,75	44282,30	1,37	0,28	44573,05	0,70	5,03
		25	93932,73	100,41	93696,89	0,25	0,65	93838,40	0,10	18,48
		50	181907,30	120,31	181708,30	0,10	1,51	181925,20	0,00	39,02
	4	6	21566,95	120,12	19286,97	11,82	0,31	19654,85	8,86	2,89
		12	39499,80	99,91	38500,71	2,59	0,57	38827,27	1,70	5,77
		25	79294,56	113,50	78981,96	0,39	1,06	79150,66	0,18	13,17
		50	159264,90	116,15	159026,40	0,14	2,15	159156,00	0,06	28,26
	6	6	21870,09	120,10	18652,50	17,25	0,56	18765,88	14,19	4,08
		12	37438,41	120,18	36201,58	3,41	0,99	36546,69	2,38	7,19
		25	75838,95	120,30	75305,25	0,70	1,82	75582,08	0,33	16,36
		50	147764,10	120,46	147581,10	0,12	3,45	147699,50	0,04	30,86
18	2	6	35624,26	111,24	33111,33	7,58	0,35	33152,60	6,93	3,31
		12	66086,89	104,51	65291,05	1,21	0,55	65699,10	0,58	8,21
		25	136164,90	120,24	135641,80	0,38	1,14	135867,90	0,21	28,28
		50	267087,30	120,33	266772,70	0,11	2,53	266968,00	0,04	68,73
	4	6	32326,21	120,12	28672,58	12,74	0,66	28842,72	10,77	5,47
		12	59221,14	115,20	57435,41	3,10	1,15	57766,87	2,45	10,68
		25	117211,00	120,35	116669,90	0,46	2,12	116952,00	0,22	24,62
		50	235106,90	120,60	234953,50	0,15	4,25	235151,30	0,03	54,29
	6	6	33214,92	120,14	28145,79	18,01	1,29	28642,91	13,76	7,82
		12	56461,24	120,30	54343,71	3,89	2,02	55037,62	2,52	13,19
		25	113202,20	120,48	112245,60	0,85	3,70	112650,30	0,48	30,38
		50	219164,00	120,82	218897,80	0,12	6,78	219055,60	0,04	55,93

Tabela 4. Capacidade normal, custo de preparação alto e tempo de preparação baixo(CNSATB)

5. Conclusões

Neste trabalho foi estudado um problema de dimensionamento de lotes capacitado em máquinas paralelas. O trabalho foi inspirado em Jans e Degrave (2004), em que os autores analisam os limites inferiores do problema de dimensionamento de lotes com uma máquina utilizando a relaxação Lagrangiana. Jans e Degraeve (2004) propõem uma reformulação para o problema utilizando a ideia de redefinição de variáveis proposta por Eppen e Martin (1987) e relaxam as restrições de demanda do problema, propondo assim uma decomposição por períodos ao invés da decomposição clássica por itens e encontram limites inferiores melhores comparados com a decomposição clássica.

A ideia foi extendida, no presente trabalho, considerando um ambiente com máquinas paralelas. Foi utilizada a mesma ideia de redefinição de variáveis proposta por Eppen e Martin (1987) e foi proposta uma reformulação para o problema com máquinas paralelas. Os limites inferiores foram gerados utilizando a decomposição por períodos e comparados com os limites inferiores encontrados por Toledo e Armentano (2006) que utilizaram a decomposição clássica por itens e com o cplex (para as instâncias maiores).

Os limitantes foram testados para diferentes tipos de problemas e os resultados foram comparados utilizando como limite superior, soluções encontradas pelo pacote de otimização CPLEX 12.2. A formulação proposta encontrou em todos os testes limites inferiores melhores do que os gerados pela decomposição clássica apesar dos tempos computacionais serem maiores, pois, enquanto na reformulação proposta temos que resolver problemas da mochila como subproblemas, na formulação clássica temos problemas de dimensionamento de lotes com único item sem restrição de capacidade que são baratos computacionalmente. Observamos ainda que, para problemas com poucos itens os *gaps* são maiores, sendo que os maiores gaps encontrados em quase todos testes foram para a configuração 18 períodos, 6 máquinas e 6 itens, entretanto, a medida em que aumentamos o número de itens para 50 os *gaps* encontrados são sempre menores que um, ainda, como esperado, ao aumentar o número de itens e máquinas os tempos computacionais também aumentam chegando a 130 segundos com a formulação proposta.

Em relação ao cplex encontramos limites inferiores em torno de 35% melhores, sendo que para os casos com muitos itens (25 e 50) a técnica EMM/P/RL bate os valores do solver mesmo após as ramificações, o que comprova a qualidade desses limitantes e a eficiência do método proposto.

Referências

Chen, W. H. e Thizy, J. M. (1990), Analysis of relaxation for the multi- item capacitated lot-sizing problem, *Operations Research*, 26, 29-72.

Diaby, M., Bahl, H., Karwan, M. H. e Ziont,S. (1992), Capacitated lot-sizing and scheduling by lagrangean relaxation, *European Journal Of Operational Research*, 59, 444-458.

Eppen,G. B. e Martin, R. K. (1987), Solving multi-item capacitated lot-sizing problems using variable redefinition, *Operations Research*, 6, 832-848.

Jans, R. e Degraeve, Z. (2004), Improved lower bounds for capacitated lot sizing problem with setup time, *Operation Research Letters*, 32, 185-195.

Pimentel, C. M. O., Alvelos,F. P. e Carvalho, J. M. V. (2010), Comparing Dantzig-Wolfe decompositions and branch-and-price algorithms for the multi-item capacitated lot sizing problem, *Optimization Methods and Software*, 25, 229-319.

Sural, H., Denizel, M. e van Wassenhove, L. N. (2009), Lagrangean relaxation based heuristic for lot sizing with setup times, *European Journal of Operational Research*, 195, 51-63.

Toledo, F. M. B. e Armentano, V. A. (2006), A lagrangian-based heuristic for the capacitated lot-sizing problem in parallel machines, *European Journal of Operational Research*, 175, 1070-1083.

Vanderbeck, F. (1998), Lot-sizing with start-up times, *Management Science*, 44, 1409-1425.