

PERTURBAÇÕES EM GRAFOS E SEUS EFEITOS SOBRE A CONECTIVIDADE ALGÉBRICA

Márcia Bengio de Albuquerque

Centro Federal de Educação Tecnológica, CEFET-RJ

marcia_bengio@ig.com.br

Leonardo Silva de Lima

Centro Federal de Educação Tecnológica, CEFET-RJ

llima@cefet-rj.br

Carla Silva Oliveira

Escola Nacional de Ciências Estatísticas, ENCE/IBGE

carla.oliveira@ibge.gov.br

RESUMO

Neste artigo, determinamos as variações sofridas pela conectividade algébrica, um parâmetro espectral do grafo e denotado por $a(G)$, ao aplicarmos a operação de remoção de um vértice nos grafos das famílias *split* completo, abacaxi e em grafos resultantes das operações de coalescência de vértices e de arestas de grafos completos. A função utilizada para medir esta variação é dada por $\phi(v) = a(G) - a(G \setminus v)$, onde $G \setminus v$ é o grafo obtido de G pela remoção do vértice v e de todas as suas arestas incidentes.

PALAVRAS-CHAVE: Grafos. Remoção de vértice. Conectividade algébrica.

ABSTRACT

In this work, we determine the changes undergone by algebraic connectivity, a spectral parameter of a graph and denoted by $a(G)$, when we applied the operation of removing vertices in the families of complete split graphs, pineapple and graphs resulting from vertices and edges coalescence of complete graphs. In order to measure this variation we used the function $\phi(v) = a(G) - a(G \setminus v)$, where $G \setminus v$ is the graph obtained by G removing the vertex v and all edges incident in this vertex.

KEYWORDS: Graphs. Vertex removal. Algebraic Connectivity.

1 – Introdução

Toda matriz quadrada M , de ordem n , está associada a um polinômio característico, definido como o determinante da matriz $M - \lambda I$, denotado por $p_M(\lambda) = \det(M - \lambda I)$. As raízes desse polinômio são os autovalores de M e o espectro de M é representado por uma matriz $1 \times s$, cujos elementos são os autovalores distintos de M e seus super índices indicam a multiplicidade algébrica de cada autovalor como raiz de $p_M(\lambda)$. Assim, se os autovalores distintos de M são $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ com as respectivas multiplicidades algébricas $m(\alpha_i), i = 1, \dots, s$, o espectro de M é dado por:

$$\text{Spec } M = (\alpha_1^{m(\alpha_1)} \alpha_2^{m(\alpha_2)} \dots \alpha_s^{m(\alpha_s)}).$$

Todo grafo simples $G = (V, E)$, não orientado com n vértices e m arestas, pode ser representado por diversas matrizes, dentre as quais destacamos a de adjacência e a laplaciana que são as utilizadas nesse artigo. A matriz de adjacência de G , denotada por $A(G) = [a_{ij}]$, é uma matriz quadrada de ordem n para a qual $a_{ij} = 1$, se $(v_i, v_k) \in E$ e $a_{ij} = 0$, se $(v_i, v_k) \notin E$ e a matriz laplaciana de G , denotada por $L(G)$, é definida por $L(G) = D(G) - A(G)$, onde $D(G)$ é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são os graus dos vértices de G . Denotam-se os autovalores de $L(G)$ por $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-1} \geq \mu_n$. Em Fiedler (1973), tem-se que $L(G)$ é semidefinida positiva e que $\mu_{n-1} = 0$. O segundo menor autovalor, μ_{n-1} é conhecido como *conectividade algébrica* do grafo e denotado por $a(G) = \mu_{n-1}$. A conectividade algébrica é um invariante que desempenha um papel importante na Teoria Espectral dos Grafos e está associado a outros invariantes importantes, como por exemplo, conectividade de vértice e de aresta, número isoperimétrico e diâmetro, corte maximal, número independente, dentre outros, como por ser visto em Abreu (2007). Além disso, uma aplicação bastante interessante desse parâmetro é como medida de vulnerabilidade de uma rede, que é a sensibilidade de uma rede ao ser destruída ou interceptada após sofrer um ataque, Swamy e Thwlasiraman (1981). Esta pode ser considerada destruída se após a remoção de alguns vértices ou arestas, o grafo resultante for desconexo. A vulnerabilidade de uma rede também está relacionada com a conectividade de vértices e de arestas do grafo, Amim e Hakini (1973), Boesch e Felze (1972), Boesch e Thomas (1970), Cvetkovic *et al.* (1995), Diestel (1996), Harary (1969), Michaels e Rosen (1992), Swamy e Thwlasiraman (1981) e Oliveira (2003). Essas aplicações motivaram e impulsionaram a pesquisa no tema. Em Kirkland (2010), é apresentado um estudo em que mensura mudanças relativas e absolutas na conectividade algébrica de um grafo G com a remoção de um vértice v , utilizando para esta análise a função $\phi(v) = a(G) - a(G \setminus v)$, onde $G \setminus v$ é o grafo obtido de G pela remoção do vértice v e de todas as suas arestas incidentes. Nesta linha, estabelece tanto limites superiores quanto inferiores e caracteriza os casos de igualdade para esta função quando $\phi(v) = 1$. Neste artigo, nosso objetivo é avaliar as variações da conectividade algébrica e, conseqüentemente, da vulnerabilidade da rede, ao perturbarmos o grafo com operações de remoção de vértices em famílias específicas. A questão tem relevância no fato de que a identificação dos vértices, que provocam maior queda na vulnerabilidade da rede ao sofrerem uma falha, pode nos levar a tomar medidas como o aumento de investimento para manter estes vértices em funcionamento, já que há um aumento significativo da vulnerabilidade da rede com as falhas destes. Para isto, aplicaremos a função $\phi(v)$ para buscarmos resultados onde $\phi(v) = 0$ e posteriormente caracterizá-los.

O desenvolvimento do trabalho está estruturado da seguinte maneira: na Seção 2, são apresentados conceitos básicos e resultados existentes na literatura sobre Teoria dos Grafos e Teoria Espectral dos Grafos necessários para a compreensão do texto. Na Seção 3, são apresentados resultados envolvendo o estudo da perturbação da conectividade algébrica em algumas famílias de grafos quando um vértice é removido do grafo original. E, finalmente, na Seção 4, é apresentada a conclusão.

2 – Notações, definições e resultados da literatura

Consideramos ao longo do texto que $G = G(V, E)$ é um grafo simples, não orientado e conexo com n vértices e m arestas. O grau de um vértice v_i , $d(v_i)$, é o número de arestas incidentes a ele e dois vértices são denominados adjacentes se existe uma aresta entre eles. O grafo complementar de um grafo $G = G(V, E)$ é o grafo $\bar{G} = \bar{G}(\bar{V}, \bar{E})$, onde $\bar{V} = V$ e $(v_i, v_j) \in \bar{E}$ quando $(v_i, v_j) \notin E$. Um grafo completo, denotado por K_n , é o grafo no qual quaisquer dois vértices distintos são adjacentes. Um grafo G é totalmente desconexo se G é um grafo sem arestas. G é um grafo bipartido quando existe uma partição do seu conjunto de vértices em dois subconjuntos não vazios e disjuntos dois a dois (isto é, $V = V_1 \cup V_2$, com $V_1 \cap V_2 = \emptyset$), de modo que as arestas de G sejam sempre da forma (p, q) , para $p \in V_1$ e $q \in V_2$. Assim, não há vértices adjacentes em um mesmo subconjunto da partição. Um grafo bipartido completo é um grafo denotado por $K_{m,n} = (V_1 \cup V_2, E)$ em que $V_1 = \{x_1, \dots, x_m\}$, $V_2 = \{y_1, \dots, y_n\}$ e $E = \{(x_i, y_j) / i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}\}$. Um vértice de grau $n-1$ é chamado de vértice universal. Sejam $G(V, E)$ e $G'(V', E')$ dois grafos simples e não orientados. Se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$, então G' é um subgrafo de G e ainda, se $G' \subseteq G$ e G' contém todas as arestas $(v_i, v_j) \in E$, com $v_i, v_j \in V'$, então G' é denominado um subgrafo induzido de G . A união de dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ é um grafo G denotado por $G = G_1 \cup G_2$, onde $V = V_1 \cup V_2$ e $E = E_1 \cup E_2$. Uma clique de um grafo G é um subconjunto de vértices que induz um subgrafo completo. Um conjunto independente de G é um subconjunto de vértices que não são adjacentes entre si. Neste artigo, trabalhamos com a família dos grafos *split* completo, abacaxi e as operações coalescência de vértices e de arestas, que são definidas a seguir, conforme Aouchiche *et al.* (2008), Lima *et al.* (2011).

Definição 2.1. Um grafo G é denominado *split* se, e somente se, o seu conjunto de vértices pode ser particionado em um conjunto independente e uma clique.

Definição 2.2. Sejam q e n inteiros tais que $1 \leq q \leq n$. Um grafo *split* completo, denotado por $SC(n, q)$, é um grafo com n vértices e uma clique de tamanho q , tal que o conjunto independente tem cada um de seus $n - q$ vértices adjacentes a todos os q vértices da clique.

A Figura 1 exibe exemplos de grafos $SC(n, q)$.

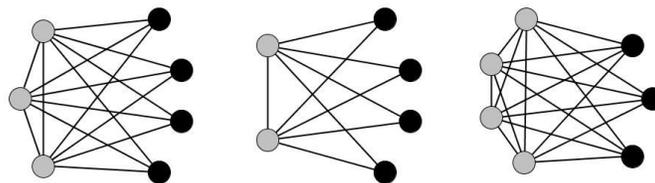


Figura 1 – $SC(7,3)$, $SC(6,2)$ e $SC(7,4)$

Definição 2.3. Sejam q e n inteiros tais que $1 \leq q \leq n$. Um grafo abacaxi (*pineapple graph*), denotado por $PA(n, q)$, é aquele com n vértices consistindo de uma clique de tamanho q e um conjunto independente com $n - q$ vértices no qual cada vértice do conjunto independente é ligado ao mesmo vértice da clique.

A Figura 2 exibe exemplos de grafos $PA(n, q)$.

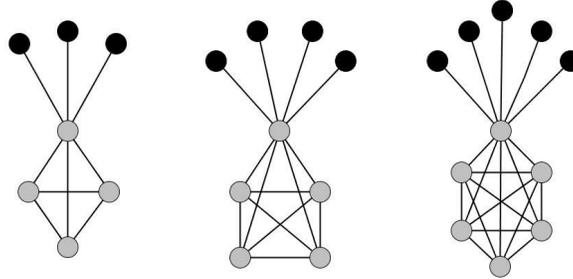


Figura 2 – $PA(7,4)$, $PA(9,5)$ e $PA(11,6)$

A seguir são apresentados alguns resultados que relacionam o posto da matriz laplaciana com o número de componentes conexas dos grafos e o espectro de um grafo com o espectro do seu complementar. As provas desses resultados se encontram em Biggs (1993), Cvetkovic (1971), Godsil e Royle (2001) e eles serão utilizados mais adiante para provar os resultados obtidos nesse trabalho.

Proposição 2.4. O posto de $L(G)$ é $n - w(G)$, onde $w(G)$ é o número de componentes conexas de G .

Como consequência da Proposição 2.4, tem-se que $\mu_n = 0$ e, portanto, $Spec L(G) = (\mu_1^{m(\mu_1)} \mu_2^{m(\mu_2)} \dots \mu_s^{m(\mu_s)} 0)$.

Proposição 2.5. Se o espectro da matriz laplaciana de G é

$$Spec L(G) = (\mu_1^{m(\mu_1)} \mu_2^{m(\mu_2)} \dots \mu_s^{m(\mu_s)} 0),$$

então o espectro de seu complementar \bar{G} é

$$Spec L(\bar{G}) = (n - \mu_s^{m(\mu_s)} \ n - \mu_{s-1}^{m(\mu_{s-1})} \ \dots \ n - \mu_1^{m(\mu_1)} \ 0).$$

As próximas proposições exibem o espectro da matriz laplaciana do grafo completo, do grafo totalmente desconexo e do grafo bipartido, que podem ser encontrados em Biggs (1993).

Proposição 2.6. O espectro da matriz laplaciana do grafo completo K_n é

$$Spec L(K_n) = (n^{n-1} \ 0).$$

Proposição 2.7. O espectro da matriz laplaciana do grafo bipartido completo $K_{s,t}$, tal que $s \leq t$ é

$$Spec L(K_{s,t}) = (s + t \ t^{s-1} \ s^{t-1} \ 0).$$

Proposição 2.8. Seja O_n um grafo totalmente desconexo com n vértices. Então o espectro da matriz laplaciana de O_n é

$$\text{Spec } L(G) = (0^n).$$

Proposição 2.9. Seja G um grafo. Então $a(G) = 0$ se, e somente se, G é desconexo.

A seguir, as operações de coalescência de vértices e de arestas são introduzidas.

Definição 2.10. Sejam os grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ disjuntos com relação aos seus conjuntos de vértices e de arestas, isto é, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ e $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

i) A operação de coalescência de vértices entre os grafos G_1 e G_2 , denotada por $G_1 \circ G_2$, é dada pela identificação dos vértices $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$.

ii) A operação de coalescência de arestas entre os grafos G_1 e G_2 , denotada por $G_1 \bullet G_2$, é dada pela identificação das arestas $e_1 \in E_1$ e $e_2 \in E_2$.

As Figuras 3 e 4 ilustram as operações coalescência de vértices e de arestas respectivamente.

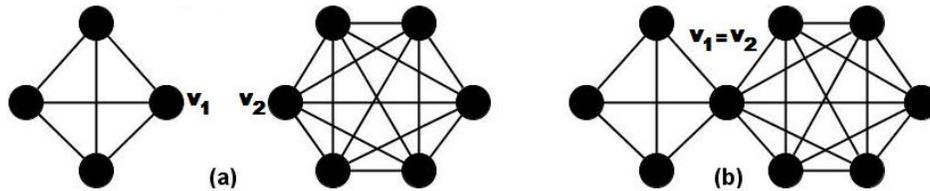


Figura 3 – (a) K_4 e K_6 ; (b) $K_4 \circ K_6$

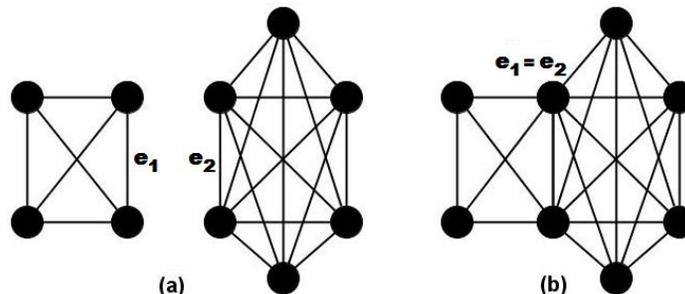


Figura 4 – (a) K_4 e K_6 ; (b) $K_4 \bullet K_6$

3 – Resultados obtidos

Para mensurar o impacto da remoção de vértices numa rede, Kirkland (2010) considera a função $\phi(v) = a(G) - a(G \setminus v)$, onde $G \setminus v$ é o grafo obtido de G pela remoção do vértice v e de todas as arestas incidentes nele, e determina limites superiores e inferiores para esta função, assim como os grafos extremais. Veja que esta função avalia a variação da conectividade algébrica ao perturbarmos o grafo com a operação de remoção de um vértice. Nesta seção, provamos alguns resultados da função $\phi(v)$ na família dos grafos *split* completo, abacaxi e de grafos resultantes das operações coalescência de vértices e de arestas.

Proposição 3.1. O espectro da matriz laplaciana do grafo $SC(n, q)$, com $n > q \geq 1$, é $\text{Spec } L(SC(n, q)) = (n^q \quad q^{n-q-1} \quad 0)$.

Demonstração:

O grafo complementar de $SC(n, q)$ é o grafo $K_{n-q} \cup O_q$, como pode ser visto na Figura 5.

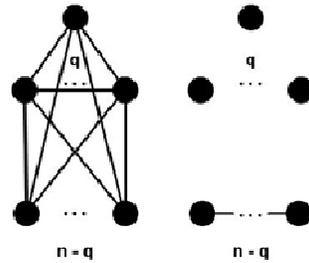


Figura 5 – $SC(n, q)$ e $\overline{SC(n, q)}$

Através das Proposições 2.6 e 2.8, tem-se que

$$Spec L(K_{n-q} \cup O_q) = ((n-q)^{n-q-1} \ 0^{q+1}).$$

Assim, da Proposição 2.5, tem-se que

$$Spec L(SC(n, q)) = (n^q \ q^{n-q-1} \ 0). \blacksquare$$

Corolário 3.2. Seja $SC(n, q)$. Então

- i) $a(SC(n, q)) = q$, se $n - q > 1$,
- ii) $a(SC(n, q)) = n$, se $n - q = 1$.

Demonstração:

Segue-se imediatamente da Proposição 3.1. ■

Corolário 3.3. Seja $SC(n, q) \setminus v$. Então

- i) $a(SC(n-1, q-1)) = q-1$, se $n - q > 1$,
 $a(SC(n-1, q-1)) = n-1$, se $n - q = 1$,
- ii) $a(SC(n-1, q)) = q$, se $n - q > 2$,
 $a(SC(n-1, q)) = n-1$, se $n - q = 2$.

Demonstração:

Segue-se imediatamente da Proposição 3.1 que

$$Spec L(SC(n-1, q-1)) = ((n-1)^{q-1} \ (q-1)^{n-q-1} \ 0).$$

Assim, se $n - q > 1$, $a(SC(n-1, q-1)) = q-1$ e se $n - q = 1$, $a(SC(n-1, q-1)) = n-1$.

Além disso, também pela Proposição 3.1, tem-se que

$$Spec L(SC(n-1, q)) = ((n-1)^q \ q^{n-q-2} \ 0).$$

Assim, conclui-se que se $n - q > 2$, $a(SC(n-1, q)) = q$ e se $n - q = 2$, $a(SC(n-1, q)) = n-1$. ■

Proposição 3.4. O espectro da matriz laplaciana do grafo $PA(n, q)$, com $n > q > 2$, é

$$Spec L(PA(n, q)) = (n \ q^{q-2} \ 1^{n-q} \ 0).$$

Demonstração:

O grafo complementar do $PA(n, q)$ é $SC(n-1, n-q) \cup O_1$, como pode ser visto na Figura 6.

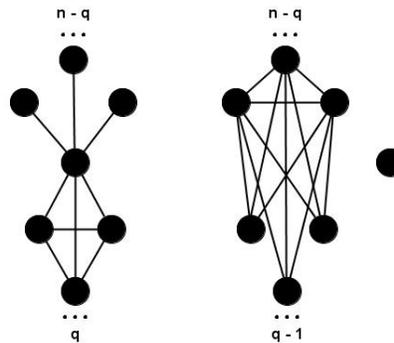


Figura 6 – $PA(n, q)$ e $\overline{PA(n, q)}$

De acordo com a Proposição 3.1, tem-se que

$$\text{Spec } L(SC(n-1, n-q)) = ((n-1)^{n-q} \quad (n-q)^{q-2} \quad 0).$$

Logo,

$$\text{Spec } L(SC(n-1, n-q) \cup O_1) = ((n-1)^{n-q} \quad (n-q)^{q-2} \quad 0^2).$$

Através da Proposição 2.5, obtém-se que

$$\text{Spec } L(PA(n, q)) = (n \quad q^{q-2} \quad 1^{n-q} \quad 0). \blacksquare$$

Corolário 3.5. Seja $PA(n, q)$. Então, $a(PA(n, q)) = 1$, se $n > q > 2$.

Demonstração:

Segue-se imediatamente da Proposição 3.4. \blacksquare

Corolário 3.6. Seja $PA(n, q) \setminus v$, tal que $q \geq 3$ e $n - q > 1$. Então, se v não é o vértice universal, $a(G) = 1$; caso contrário, $a(G) = 0$.

Demonstração:

Seja $PA(n, q)$. Retirando um vértice da clique, que não seja o universal, obtém-se o grafo $PA(n-1, q-1)$, como pode ser visto na Figura 7.

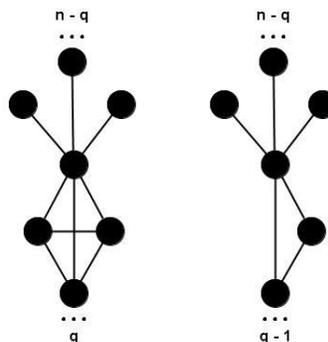


Figura 7 – $PA(n, q)$ e $PA(n, q) \setminus v$, onde v não é o universal e pertença a clique

Segue imediatamente da Proposição 3.4 que

$$\text{Spec } L(PA(n-1, q-1)) = (n-1 \quad (q-1)^{q-3} \quad 1^{n-q} \quad 0).$$

Logo, $a(PA(n-1, q-1)) = 1$, pois $q \geq 3$ e $n - q > 1$.

Suponhamos agora, que o vértice removido pertença ao conjunto independente, conforme Figura 8.

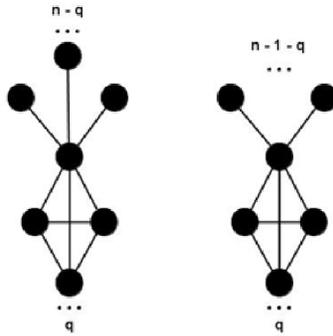


Figura 8 – $PA(n, q)$ e $PA(n-1, q)$

Segue imediatamente da Proposição 3.4 que

$$\text{Spec } L(PA(n-1, q)) = (n-1 \quad q^{q-2} \quad 1^{n-q-1} \quad 0).$$

Portanto, $a(PA(n-1, q)) = 1$.

Finalmente, suponhamos que v é o vértice universal. Logo, G é desconexo e pela Proposição 2.9 tem-se $a(G) = 0$. ■

Proposição 3.7. Seja $G = K_r \circ K_p$ o grafo obtido pela coalescência de vértices entre dois grafos completos K_r e K_p , onde $2 \leq r \leq p$. Então, o espectro da matriz laplaciana do grafo G é $\text{Spec } L(G) = ((r+p-1) \quad p^{p-2} \quad r^{r-2} \quad 1 \quad 0)$.

Demonstração:

Seja $G = K_r \circ K_p$. É fácil ver que o grafo G tem $r+p-1$ vértices e, além disso, que o grafo complementar de G é o grafo $K_{r-1, p-1} \cup O_1$.

Logo, pelas Proposições 2.5 e 2.7 tem-se

$$\text{Spec } L(K_{r-1, p-1} \cup O_1) = ((r+p-2) \quad (p-1)^{p-2} \quad (r-1)^{r-2} \quad 0^2)$$

Conseqüentemente,

$$\text{Spec } L(G) = ((r+p-1) \quad p^{p-2} \quad r^{r-2} \quad 1 \quad 0). \quad \blacksquare$$

Corolário 3.8. Seja $G = K_r \circ K_p$. Então, $a(G) = 1, \forall 2 \leq r \leq p$.

Demonstração:

Segue-se imediatamente da Proposição 3.7. ■

Corolário 3.9. Seja $G = K_r \circ K_p \setminus v$, onde $3 \leq r \leq p$. Então, se v não é o vértice universal, $a(G) = 1$; caso contrário, $a(G) = 0$.

Demonstração:

Suponhamos inicialmente que v pertence a clique K_r , mas não é o vértice universal. Assim, $G = K_r \circ K_p \setminus v = K_{r-1} \circ K_p$.

Segue imediatamente da Proposição 3.7 que

$$\text{Spec } L(K_{r-1} \circ K_p) = ((r+p-2) \quad p^{p-2} \quad (r-1)^{r-3} \quad 1 \quad 0).$$

Portanto, $a(G) = 1$.

De maneira similar, obtemos o espectro de G obtido pela remoção de um vértice v pertencente a clique K_p , mas que não seja o vértice universal e concluímos que $a(G) = 1$.

Finalmente, suponhamos que v é o vértice universal. Como G é desconexo, segue-se pela Proposição 2.9 que $a(G) = a(K_{r-1} \cup K_{p-1}) = 0$. ■

Proposição 3.10. Seja $G = K_r \bullet K_p$ o grafo obtido pela coalescência de arestas entre dois grafos completos K_r e K_p , onde $3 \leq r \leq p$. Então, o espectro da matriz laplaciana do grafo G é $Spec L(G) = ((r + p - 2)^2 \quad p^{p-3} \quad r^{r-3} \quad 2 \quad 0)$.

Demonstração:

Seja $G = K_r \bullet K_p$. Daí, tem-se que G tem $r + p - 2$ vértices e, além disso, que o grafo complementar do grafo G é o grafo $K_{r-2, p-2} \cup O_2$. Através das Proposições 2.5 e 2.7, tem-se que

$$Spec L(K_{r-2, p-2} \cup O_2) = ((r + p - 4) \quad (p - 2)^{(r-3)} \quad (r - 2)^{(p-3)} \quad 0^3).$$

Conseqüentemente,

$$Spec L(G) = ((r + p - 2)^2 \quad p^{p-3} \quad r^{r-3} \quad 2 \quad 0). \blacksquare$$

Corolário 3.11. Seja $G = K_r \bullet K_p$. Então, $a(G) = 2, \forall 3 \leq r \leq p$.

Demonstração:

Segue-se imediatamente da Proposição 3.10. ■

Corolário 3.12. Seja $G = K_r \bullet K_p \setminus v$, onde $4 \leq r \leq p$. Então, se v não é o vértice universal, $a(G) = 2$; caso contrário, $a(G) = 1$.

Demonstração:

Seja v o vértice da clique de tamanho r . Assim, temos $G = K_r \bullet K_p \setminus v = K_{r-1} \bullet K_p$ e da Proposição 3.10, tem-se que $Spec L(K_{r-1} \bullet K_p) = ((r + p - 3)^2 \quad p^{p-3} \quad (r - 1)^{(r-4)} \quad 2 \quad 0)$.

Logo, $a(G) = 2$.

Se v é o vértice da clique de tamanho p , e não é o vértice universal, tem-se de maneira similar que $a(G) = 2$.

Se v é um dos vértices universais, obtém-se que $G = (K_r \bullet K_p) \setminus v = K_{r-1} \circ K_{p-1}$. Então, segue-se pela Proposição 3.7 que

$$Spec L(K_{r-1} \circ K_{p-1}) = (r + p - 3 \quad (p - 1)^{(p-3)} \quad (r - 1)^{(r-3)} \quad 1 \quad 0).$$

Logo, $a(G) = 1$. ■

4 - Conclusões

A Tabela 1 apresenta as principais contribuições do artigo, uma vez que resume os resultados obtidos nas proposições e corolários da Seção 3.

Grafo	$a(G)$	$a(G \setminus v)$	$\phi(v) = a(G) - a(G \setminus v)$
$SC(n, q)$	$q, se n - q > 1$	1° caso: $v \in K_q$ $q - 1, se n - q > 1$	1
		2° caso: $v \notin K_q$ $q, se n - q > 2$ $n - 1, se n - q = 2$	0 -1
	$n, se n - q = 1$	$v \in K_q$ $n - 1, se n - q = 1$	1
$PA(n, q)$	$1, se n > q > 2$	0, se v é universal 1, caso contrário	1 0
$K_r \circ K_p$	$1, se p \geq r \geq 2$	0, se v é universal 1, caso contrário	1 0
$K_r \bullet K_p$	$2, se p \geq r \geq 3$	1, se v é universal 2, caso contrário	1 0

Tabela 1: Resultados obtidos

A primeira coluna da tabela apresenta as famílias de grafos e os grafos resultantes de operações, utilizados neste trabalho. A segunda coluna indica os resultados da conectividade algébrica em cada caso e a terceira mostra os efeitos sobre a conectividade algébrica das perturbações sofridas por estes grafos ao se remover um vértice. Por fim, a quarta apresenta os valores da função $\phi(v)$. Os grafos em que $\phi(v) = 1$ foram caracterizados em Kirkland (2010) e os casos em que $\phi(v) = 0$ não se obteve até o momento nenhuma caracterização. Por isso, a motivação em analisar a função $\phi(v)$ nesta situação. Observe que em todas as famílias de grafos estudadas aqui, ocorre um caso em que $\phi(v) = 0$. Em estudos futuros visaremos determinar outras classes de grafos tais que $\phi(v) = 0$ e caracterizá-los.

Agradecimentos: Os autores agradecem ao *CNPq* e ao *IBGE* pelo financiamento dessa pesquisa.

Referências

Abreu, N. M. M. de. (2007). Old and new results on algebraic connectivity of graphs, *Linear Algebra and its Applications*, v. 423, pp. 53-73.

Amim, A. T.; Hakini, S. L. (1973). Graphs with Given Connectivity and Independence Number or Networks with Given Measures of Vulnerability and Survivability, *IEEE Trans. Circuit Theory*, v. CT-20, pp.2-10.

Aouchiche, M., Bell, F., Cvetkovic, D., et al. (2008). Variable neighborhood search for extremal graphs. 16. Some conjectures related to the largest eigenvalue of a graph, *European Journal of Operational Research*, v.191, n.3, pp.661-676.

- Biggs, N.** (1993). Algebraic Graph Theory, 2 ed. Great Britain, Cambridge University Press.
- Boesch, F. T.; Felze, A. P.** (1972). A General Class of Invulnerable Graphs, Networks, v.2, pp. 261-283.
- Boesch, F. T.; Thomas, R. E.** (1970). On graphs of Invulnerable Communications Nets, IEEE Trans. Circuit Theory, v. CT-17, pp. 183-192.
- Cvetkovic, D.** (1971). Graphs and their Spectra, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn, Fak., Ser. Mat. Fiz., v. 354, pp. 1-50.
- Cvetkovic, D.; Doob, M.; Sachs, H.** (1995). Spectra of Graphs, 1 ed. New York, Academic Press.
- Diestel, R.** (1996). Graph Theory, Springer-Verlag.
- Fiedler, M.** (1973). Algebraic Connectivity of Graphs, Czechoslovak Math. J. 23, 298- 305.
- Godsil, C. & Royle, G.** (2001). Algebraic Graph Theory. Graduate Texts in Mathematics 207, Springer Verlag NY.
- Harary, F.** (1969). Graph Theory, Addison Wesley.
- Kirkland, S.** (2010). Algebraic connectivity for vertex-deleted subgraphs, and a notion of vertex centrality, Discrete Mathematics, issue 4, v. 310, pp. 911-921.
- Lima, L., Oliveira, C., Abreu, N. M. M., Nikiforov, V.** (2011). The smallest eigenvalue of the signless laplacian, Linear Algebra and its Applications, to appear.
- Michaels, J. G., Rosen, K. H.** (1992). Applications of Discrete Mathematics, Mc Graw-Hill.
- Oliveira, C. S.** (2003). Laplaciano de Grafos e Vulnerabilidade em Redes, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ.
- Swamy, M. N. S., Thwlasiraman, K.** (1981). Graphs, Networks and Algorithms.