MODELO EXATO E MATEHEURÍSTICAS PARA O PROBLEMA DE DIMENSIONAMENTO DE LOTES INTEGRADO AO TRANSPORTE

Heitor Liberalino
Laboratoire d'Informatique, de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes
Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, França
heitor@isima.fr, heitorliberalino@uern.br

Christophe Duhamel
Laboratoire d'Informatique, de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes
Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, França
christophe.duhamel@isima.fr

Alain Quilliot
Laboratoire d'Informatique, de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes
Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, França
alain.quilliot@isima.fr

Dario José Aloise
Departamento de Informática - Mestrado em Ciência da Computação - UERN/UFERSA
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte, Mossoró, Brasil
aloisedj@gmail.com

RESUMO

Este trabalho considera o problema de planejamento da produção em vários sítios e a distribuição dos seus produtos entre eles, e tem por objetivo minimizar os custos globais. O sistema de produção é modelado como o *Capacitated Lot-Sizing Problem*, com estoque e limite de capacidade de produção. O sistema de transporte é baseado no *Vehicle Routing Problem*, onde o tempo é discretizado. Este estudo propõe um modelo matemático do problema integrado e quatro mateheurísticas para a sua resolução. Estes métodos buscam percorrer a árvore de decisão através de delimitações e fixações de variáveis. Três deles são derivados da heurística *Relax-and-fix* e o quarto é uma heurística *Diving* adaptada para o problema. São apresentados resultados computacionais e analises destes, mostrando a eficiência dos métodos.

PALAVARAS CHAVE. Produção, Transporte, Mateheurísticas.

Logística & Transportes

ABSTRACT

We consider the problem of scheduling the production on several sites and of organizing the transportation of the products among them. The objective is to minimize the global cost. The production system is modeled as the Capacitated Lot-Sizing Problem, including stocks and production capacity. The transportation system is based on a Vehicle Routing Problem, considering discretized time. We first propose a mathematical model of the integrated problem. Then four matheuristics are presented. They rely on partial decision tree exploration along with variable fixing. Three are based on the Relax-and-fix heuristic while the fourth one is adapted from the Diving heuristic. Computational results and analysis are presented showing the efficiency of the methods.

KEYWORDS. Production, Transportation, Matheuristics.

Logistic & Transportation

1. Introdução

A vontade de racionalizar os processos de produção é um principio fundador da revolução industrial. Paralelamente a necessidade de responder as exigências do mercado (demanda), o foco é concentrado no domínio de cada elemento do sistema (maquinas, estoque, fornecedores) de maneira a gerar um plano de produção o mais eficaz possível. Um planejamento de produção pode ser considerado como organizar a aquisição dos recursos e de matérias primas, assim como coordenar as atividades necessárias para transformar estas aquisições em produtos finais da forma mais econômica possível.

Hoje em dia tornou-se uma prática comum de indústrias localizarem sítios de fabricação em regiões onde a mão de obra é mais barata, ou adquirirem componentes para seus produtos de outras fábricas distantes. Sendo assim, os atuais sistemas de produção procuram não só reduzir custos ligados às fabricas (manufatura, estoque, matéria-prima, etc.), mas também a logística de transporte. No contexto atual, devido às recentes crises no setor petrolífero, que implicaram em aumento nos preços dos combustíveis, um bom plano de transporte mostra-se fundamental e pode representar uma boa parcela no custo global de produção.

O problema integrado de dimensionamento de lotes e roteamento de veículos (*Lot-Sizing and Vehicle Routing Problem* – LSVRP) considera a fabricação de componentes em diferentes sítios de produção e o transporte destes. Os sítios de produção podem ser compreendidos como usinas em diferentes localidades geográficas, ou blocos de produção dentro de uma mesma usina e ligados por veículos guiados automaticamente (*Automated Guided Vehicles* – AGV). Assumimos que para fabricar um produto é necessário consumir componentes intermediários. Estes componentes por sua vez também podem precisar de subcomponentes, representando assim um modelo generalista de composição da estrutura do produto (ou *Bill of Materials* – BOM). O problema considera um horizonte de planejamento finito dividido em períodos de tempo de mesma duração. Esta escala é aplicável tanto para o problema de produção quanto para o de transporte (Hahm e Yano, 1992). Entretanto, experimentos preliminares realizados com diferentes escalas de tempo mostram que o problema se torna mais difícil uma vez que estas são aproximadas para ambos os aspectos.

Nós utilizamos o modelo *Capacitated Lot-Sizing Problem* (CLSP) proposto por Trigeiro *et al.* (1989), no qual nós utilizamos a reformulação de Pochet e Wolsey (2006). Nesta formulação os custos de estoque e produção são integrados, o que nos leva a exprimir o problema como "quanto produzir no tempo t para satisfazer uma demanda posterior?". Já o modelo de transporte é do tipo *Capacitated Vehicle Routing Problem* (CVRP), onde uma frota de veículos homogêneos localizada em um depósito central deve atender as requisições de carregamento e entrega em cada sítio antes de retornar ao depósito. O sistema de transporte também leva em conta a capacidade de cada veículo, as datas de entrega impostas pelos sítios de fabricação e as restrições de fluxo. O grafo de transporte é um grafo temporal obtido a partir da rede de transporte. Os vértices são duplicados para cada período de tempo e os arcos ligam os vértices entre os períodos de tempo correspondentes à duração do transporte. Este grafo é acíclico pela construção.

Nosso estudo propõe inicialmente um modelo matemático de programação inteira mista (*Mixed Integer Programming* – MIP) do problema LSVRP, o qual considera três conjuntos de variáveis e restrições: de produção, de transporte e de interface de entrada/saída. Em seguida, propomos quatro heurísticas baseadas em mateheurísticas para a resolução do problema. Três delas são do tipo *Relax-and-fix*, onde o conjunto de todas as variáveis é dividido em subconjuntos que, a cada iteração, são fixadas ou relaxadas de forma a simplificar a resolução do problema. A quarta é do tipo *Diving*, onde critérios de limitações de valores são aplicados as variáveis.

Este artigo é organizado da seguinte forma. A seção 2 apresenta uma revisão bibliográfica para o problema. A seção 3 mostra o modelo proposto e a seção 4, as heurísticas para a sua resolução. A seção 5 discute os resultados obtidos com um conjunto de 200 instâncias geradas aleatoriamente. A seção 6 conclui o artigo e apresenta as nossas perspectivas para futuros trabalhos.

2. Revisão Bibliográfica

Existe uma grande variedade de trabalhos sobre o *Lot-Sizing Problem* (LSP) abordando suas variações, modelos e métodos de resolução. Os primeiros trabalhos na área datam do final da década de 1950 e são atribuídos a Manne (1958), que propõe um modelo de programação linear, Rogers (1958), que mostra experimentos computacionais, e Wagner e Whitin (1958), que criaram o mais celebre método de programação dinâmica para se resolver o problema. Revisões bibliográficas que analisam e detalham alguns modelos podem ser encontrados nos trabalhos de Kuik *et al.* (1994), Pochet e Wolsey (2006), e Comelli *et al.* (2008).

Da mesma forma, o *Vehicle Routing Problem* (VRP) possui uma literatura vasta onde podemos encontrar vários modelos e métodos de resolução. Entre os vários trabalhos, citamos os de Toth e Vigo (2002), Pisinger e Ropke (2007) e Bräysy *et al.* (2008). Suas variantes mais conhecidas têm por base o problema capacitado (*Capacitated* VRP, ou CVRP) e compreendem janelas de tempo (VRP *with Time Windows* – VRPTW), *backhauls* (VRPB), coleta e entrega (VRP *with Pick-up and Delievery* – VRPPD), entre outras.

A migração de sítios de produção a países onde a mão de obra é mais barata tornaram os custos de transporte mais caros (Merzouk, 2007). Uma vez que estes custos representam uma boa parcela dos custos globais, os estudos na área do planejamento de produção começaram a gerar novos modelos que integram o transporte. Um dos primeiros trabalhos nesta área pode ser achado em Glover *et al.* (1979), no qual os autores desenvolveram um sistema integrado de produção, estoque e entrega para uma indústria química. O sistema gerado foi baseado em uma rede bem adaptada as necessidades da companhia, e o resultado foi que ele conseguiu reduzir consideravelmente os custos de transporte.

Uma questão freqüente nos modelos integrados é a gerência de tempo de produção e de transporte. Hahm e Yano (1992) inserem na literatura o *Economics Lot and Delivery Scheduling Problem* (ELDSP), que toma como base o *Economic Lot Scheduling* (ELS) e integra o problema de distribuição. Eles mostraram que os períodos de produção (T_p) podem ser expressos como um múltiplo (M) dos intervalos de distribuição (T_d), ou seja, $T_p = M \times T_d$. Neste artigo, os autores propõem uma forma de calcular a freqüência de produção e distribuição de certo produto para um cliente que o consome a uma taxa constante. O modelo proposto permite calcular o tamanho dos períodos e a quantidade de produção, assim como a redução do custo e tempo de *setup*, para alcançar a melhor sincronização entre fabricação e distribuição.

Chandra e Fisher (1994) consideram um cenário especifico onde os sítios de produção fabricam vários produtos e os estoca para serem distribuídos posteriormente por uma frota de veículos. A demanda por cada produto em cada período é conhecida. Os autores consideram a produção como um CLSP com recursos limitados e o transporte como um problema de distribuição local. Duas abordagens são usadas: um método desagregado onde cada problema é resolvido por heurísticas conhecidas e outro baseado em heurísticas de melhoramento local que resolve o problema integrado. Estes métodos permitem a redução entre 3% e 20% dos custos de operação.

Lei *et al.* (2006) considera o problema onde se tem uma produção unitária, um conjunto de sítios de fabricação, cada um com uma característica específica, uma frota heterogênea de veículos atribuída a cada sítio e um conjunto de centros de demanda de clientes. O problema é de coordenar estes elementos de forma a atender demandas e minimizar os custos. Um método de duas fases é proposto para resolver o problema. A primeira etapa consiste em resolver o problema sem considerar restrições de envio direto. O resultado ótimo do subproblema fornece um limite superior para o problema completo. Ele também fornece o número de caminhos viáveis. A segunda etapa consiste em resolver o problema de transporte de forma heurística. O método suprime os caminhos menos interessantes e atribui os melhores aos veículos. Esta abordagem, mesmo trabalhando em duas fases, não divide o problema de produção e transporte, tentando assim otimizá-los simultaneamente.

Vários métodos e abordagens foram desenvolvidos recentemente. Bard e Nananukul (2009) resolvem o problema onde um sítio deve fabricar um só tipo de produto para satisfazer as demandas de um conjunto de clientes. O modelo usa uma frota de veículos para realizar a

distribuição. Os autores propõem uma busca tabu reativa com *path relinking* para a resolução. Merzouk (2007) aborda uma cadeia de produção composta por varias companhias. Dois modelos são propostos: um simples que considera uma estrutura fornecedor-cliente auxiliada por um transportador, e outro para a cadeia de produção completa. Os modelos consideram o tempo de produção, o tempo de carga/descarga de produtos em um veículo, e o tempo de viagem entre os sítios de fabricação. Como métodos de resolução são propostos o *branch-and-bound* e os algoritmos genéticos.

Boudia *et al.* apresentam heurísticas e meta-heurísticas para resolver os problemas de transporte e produção separados ou integrados. Em Boudia *et al.* (2005a) um sítio de fabricação deve atender a demanda de um conjunto de clientes utilizando uma frota homogênea de veículos para a distribuição. Tanto os sítios de fabricação quanto os clientes podem estocar produtos. Os autores propõem uma heurística gulosa que usa o algoritmo dinâmico de Wagner-Whitin para resolver a o problema de produção, e a heurística de Clarke-Wright para o transporte. O algoritmo trabalha em três etapas: 1) determinar a quantidade à ser distribuída em cada período de tempo para cada cliente; 2) estabelecer rotas de distribuição; 3) determinar as datas de produção e as quantidades à serem distribuídas. Boudia *et al.* (2005b, 2007, 2008) apresentam varias versões do GRASP com e sem *path relinking*. Recentemente Boudia e Prins (2009) propõem um algoritmo memético com gerência de população (*Memetic Algorithm with Population Management* - MA|PM). Eles resolvem o problema de forma integrada, o que apresenta os melhores resultados e também o maior tempo de cálculo.

3. Modelo Matemático

O modelo proposto combina o problema de produção em cada sítio de fabricação com o transporte dos componentes produzidos. O objetivo aqui é o de reduzir os custos globais. As variáveis e restrições do modelo podem ser classificadas em 3 blocos, segundo suas características: bloco de produção, bloco de transporte e bloco de interface de entrada/saída de componentes. Este último é o responsável pelo fluxo da produção entre os sítios de fabricação.

A. Hipóteses

Algumas hipóteses são assumidas para simplificar o problema:

- A fabricação em cada sítio é dedicada.
- O sistema assume um único produto final.
- O envio de componentes é feita de maneira direta.
- O tempo de produção corresponde a uma fração do tempo de transporte.

B. Notação

Dados N sítios de fabricação, nós definimos um grafo $G=(V,E)$ onde V representa o conjunto de vértices e E o conjunto de arcos. $V=\{V_0\}\cup V'$, onde V_0 representa o depósito dos veículos e $V'=\{V_1,...,V_N\}$ o conjunto de sítios. Cada arco $(i,j)\in E$ representa o caminho mais curto de i a j, sendo L_{ij} a duração do trajeto dada em períodos. Cada sítio $i\in V'$ fabrica um só produto (fabricação dedicada) k, que pertence a lista U_i de produtos implicados em i. U é a lista de todos os produtos e componentes implicados no sistema de produção.

A produção deve ser planejada em um horizonte de T períodos de tempo de mesmo tamanho. Como definido em Hahm e Yano (1992), tanto o problema de produção quanto o de transporte são definidos na mesma escala de tempo, ambos relacionados por uma função. Para a produção de k, o sítio i consume $A_k^{k'}$ componentes $k'\in U_i$ vindos de outros sítios de fabricação. Ele deve também respeitar um limite M_i de produção, esta sendo renovável a cada período. $P_{i,t}$, $Q_{i,t}$ e $H_{i,t}$ são respectivamente os custos de produção unitária, os custos de *setup* e os custos de

estoque unitário. Os custos $P_{i,t}$ e $H_{i,t}$ podem ser agregados em um custo único $C_{i,tt'}$, que corresponde a fabricação de um produto t destinado a atender a demanda do período t'. Sendo assim:

$$\begin{cases} C_{i,tt} = P_{i,t} & \forall i \in V', \forall t = 1,...,T \\ C_{i,tt'} = P_{i,t} + \sum_{l=t}^{t'-1} H_{i,l} & \forall i \in V', \forall t, t' = 1,...,T \\ C_{i,0t'} = \sum_{t=1}^{t'} H_{i,t} & \forall i \in V', \forall t' = 1,...,T+1 \end{cases}$$

Para cada sítio i e cada período de tempo t são definidas as seguintes variáveis: $w_{i,tt'} \geq 0$, quantidade de produtos à fabricar de forma a satisfazer a demanda $D_{t'}$ no período $t' \geq t$, e $y_{i,t} \in \{0;1\}$, decisão de *setup*. As variáveis $r_{i,t}^k \geq 0$ correspondem à quantidade de recursos e $s_{i,t} \geq 0$ é o estoque dos produtos fabricados.

O problema compreende uma frota de veículos homogêneos de capacidade W, e a utilização de cada veículo esta sujeita a um custo unitário X. Para cada arco $(i, j) \in E$, I_{ij} representa o seu custo e J_{ij}^k o custo unitário de se transportar um item k do sítio i ao j. As variáveis $f_{ij,t}^k \geq 0$ correspondem à quantidade transportada de k do sítio i ao j no tempo t. A variável $v \in \mathbb{N}$ é o número de veículos usados e $g_{ij,t} \geq 0$ é a variável de fluxo de veículos que trafegam entre i e j no tempo t. Para cada sítio, associamos duas variáveis de interface que gerenciam o fluxo de componentes que entra e sai, e a produção que sai de um sítio. Elas são: $\sigma_{i,t}^k \geq 0$ (entrada) e $\tau_{i,t}^k \geq 0$ (saída).

Os sítios de fabricação são classificados pelo tipo de seus produtos: básicos, intermediários ou finais (F). A Figura 1 ilustra uma instância com 4 sítios: S_1, S_2, S_3 e S_F para o produto final. Cada sítio fabrica apenas um produto e pode vir a precisar de produtos vindos de outros sítios (componentes) no processo. A Figura 2 mostra uma possível solução em termos de planejamento para uma instância com 4 sítios e 5 períodos. Dois veículos deixam o depósito (S_0) e pegam alguns produtos no sítio S_1. Então, o primeiro vai para o sítio S_2 enquanto o segundo vai para o S_3.

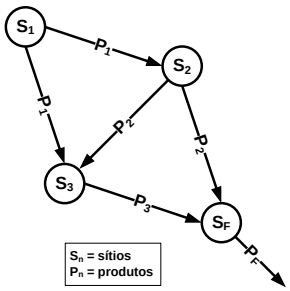
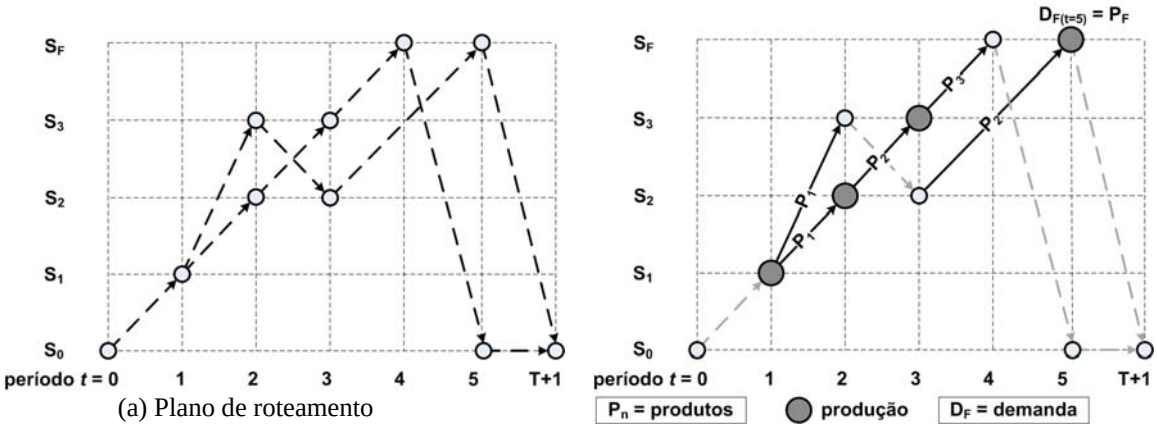


Figura 1: Requisição de produtos

C. Modelo

A função objetivo (1) visa minimizar os custos globais de produção e transporte.

$$\min \sum_{\substack{(i,j)\in E \\ i\neq 0, j\neq 0}} \sum_{t=1}^{T} \left[I_{ij} g_{ij,t} + \sum_{k\in U} J_{ij}^k f_{ij,t}^k \right] + X\, v + \sum_{i\in V'} \sum_{t=1}^{T} \left[Q_{i,t}\, y_{i,t} + H_{i,t} \sum_{k\in U} r_{i,t}^k + \sum_{t'=1}^{t} C_{i,t't}\, w_{i,t't} \right] + \sum_{i\in V'} \sum_{t=1}^{T+1} C_{i,0t}\, w_{i,0t} \quad (1)$$



(a) Plano de roteamento

(b) Plano de produção

Figura 2: Possível solução

O período de tempo 0 é usado para assegurar um estoque inicial e a saída dos veículos do depósito. O período *T+1* é usado para o retorno dos veículos ao depósito.

A restrição (2) gerencia o consumo de estoque inicial.

$$\sum_{t=1}^{T+1} w_{i,0t} = s_{i,0} \qquad \forall i \in V' \tag{2}$$

As restrições (3-5) referem-se ao processo de produção e a consumação de recursos.

$$r_{i,t-1}^{k'} + \sigma_{i,t}^{k'} = r_{i,t}^{k'} + A_{k'}^{k} \sum_{t=t'}^{T} w_{i,tt'} \qquad \forall i \in V', \forall k' \in U, \forall k \in U_i, \forall t' = 1,...,T \tag{3}$$

$$\sum_{t=t'}^{T} w_{i,tt'} \le M_i y_{i,t'} \qquad \forall i \in V', \forall t' = 1,...,T \tag{4}$$

$$\sum_{t=t'}^{T} w_{i,tt'} \ge y_{i,t'} \qquad \forall i \in V', \forall t' = 1,...,T \tag{5}$$

As restrições (6-8) definem a saída dos produtos que irão satisfazer as demandas. A restrição (6) declara que os produtos que deixam os sítios de fabricação foram produzidos no local ou são derivados do estoque. A restrição (7) define um limite superior da produção em relação à demanda. A restrição (8) exprime que a saída dos produtos finais deve satisfazer as demandas.

$$w_{i,0t'} + \sum_{t=t'}^{T} w_{i,tt'} = \tau_{i,t'}^{k} \qquad \forall k \in U_i, \forall i \in V', \forall t' = 1,...,T \tag{6}$$

$$w_{i,tt'} \le D_{t'} y_{i,t} \qquad \forall i \in V', \forall t, t' = 1,...,T, \forall t' \ge t \tag{7}$$

$$\sum_{i \in V'} \tau_{i,t}^{k} = D_{t'} \qquad \forall k \in F, \forall t = 1,...,T \tag{8}$$

As restrições (9-11) são referentes ao fluxo de componentes entre os sítios de fabricação. Elas conectam a produção com o sistema de transporte. A restrição (9) ajusta a conservação de fluxo para cada produto em um sítio. As restrições (10) e (11) fazem a ligação entre o fluxo interno de produtos e seu transporte. Eles constituem a interface de cada sítio.

$$\sum_{i \in V'} f^k_{ij,t-L_{ij}} - \sigma^k_{j,t} = \sum_{i \in V'} f^k_{ji,t} - \tau^k_{j,t} \qquad \forall k \in U, \forall j \in V', \forall t = 1,...,T \qquad (9)$$

$$\sigma^k_{j,t} = \sum_{i \in V'} f^k_{ij,t-L_{ij}} \qquad \forall k \in U, \forall j \in V', \forall t = 1,...,T \qquad (10)$$

$$\tau^k_{j,t} = \sum_{i \in V'} f^k_{ji,t} \qquad \forall k \in U, \forall j \in V', \forall t = 1,...,T \qquad (11)$$

As restrições (12-15) organizam o sistema de transporte entre os sítios de fabricação. A restrição (12) impõe um limite de capacidade de veículo. As restrições (13) e (14) definem o número máximo de veículos usados em cada período de tempo. A restrição (15) define a conservação do fluxo de veículos em cada sítio. O tempo de viagem L_{ij} é levando em conta.

$$\sum_{k \in U} f^k_{ij,t} \le W g_{ij,t} \qquad \forall (i,j) \in E, i \ne 0, j \ne 0, \forall t = 1,...,T \qquad (12)$$

$$\sum_{j \in V'} \sum_{t=1}^{T-1} g_{0j,t} \le v \qquad (13)$$

$$\sum_{\substack{(i,j) \in E \\ i \ne 0}} \sum_{\substack{t' \ge t \\ t+L_{ij} \ge t'+1}} g_{ij,t'} \le v \qquad \forall t = 1,...,T \qquad (14)$$

$$\sum_{\substack{j \in V' \\ t-L_{ji} \ge 0}} g_{ji,t-L_{ji}} = \sum_{\substack{j \in V' \\ t+L_{ij} \le T}} g_{ij,t} \qquad \forall i \in V', \forall t = 1,...,T \qquad (15)$$

4. Heurísticas

O problema é NP-Difícil, uma vez que ele combina vários problemas de *Lot-Sizing*, que por sua vez são NP-Difíceis.

Nós propomos quatro heurísticas baseadas em mateheuristicas para resolver o LSVRP. Elas trabalham modificando diretamente a estrutura do modelo através da relaxação de algumas variáveis, objetivando assim melhorar o tempo de cálculo ou achar bons limites para a solução.

A. *Relax-and-fix* (RF)

As heurísticas RF se baseiam na resolução de relaxações lineares parciais e sucessivas. A cada iteração, o conjunto de variáveis inteiras (normalmente de decisão) é repartido em vários conjuntos disjuntos. As variáveis do primeiro conjunto continuam sendo tratadas como inteiras, enquanto as outras são relaxadas. O problema modificado é então resolvido. Uma vez a solução é obtida, as variáveis do primeiro conjunto são fixadas aos valores encontrados. Elas são removidas do conjunto de variáveis e o processo continua com as demais, iniciando assim uma nova iteração similar à anterior. A operação termina quando todas as variáveis inteiras são fixadas. Esta heurística se baseia no fato de que os problemas modificados são menores e mais fáceis de resolver (Ferreira *et al.*, 2010).

A heurística RF foi proposta pela primeira vez por Dillenberger *et al.* (1994), onde um modelo misto 0-1 foi usado para o problema de alocação de recursos em planejamento de produção em períodos com sobreposição de *setups*. Em um trabalho posterior, Escudero e Salmeron (2005) comparam variações de RF para um problema de planejamento. A estratégia difere na maneira de dividir os conjuntos de variáveis. Recentemente, Federgruen *et al.* (2007) e Ferreira *et al.* (2010) propuseram algumas variações.

Nossas três heurísticas RF primeiramente calculam o número mínimo de períodos para atender a primeira demanda. Em seguida, elas prosseguem iterativamente usando alguns dos seguintes parâmetros:

– *Tamanho do problema* (TP): a dimensão do subproblema pode ser definida a cada

iteração desconsiderando parte do problema inicial.

- *Tamanho do subconjunto* (TS): corresponde à quantidade de variáveis reagrupadas que serão tratadas como fixas, inteiras ou relaxadas.
- *Tipo de variáveis* (TV): são as variáveis utilizadas pelo método.
- *Tempo de execução* (TE): tempo máximo disponível para resolver a cada iteração.

A primeira heurística segue o RF clássico, onde uma parte das variáveis do problema é conservada como inteira a cada iteração, sendo as demais relaxadas. As variáveis consideradas em TV são de *setup* ($y_{i,t}$) e de decisão de arcos ($g_{ij,t}$). O problema é então resolvido e as variáveis são fixadas ao seu valor obtido. O procedimento é repetido até todas as variáveis serem fixadas. Aqui TP não é alterado, de forma que todas as variáveis são utilizadas.

O segundo método, chamado *Insert-and-fix* (IF), apesar de ser baseado em RF, não utiliza a relaxação linear em sua execução. Ao invés de considerar subgrupos como fixos, inteiros e relaxados, ele altera o tamanho do problema de forma que estes que seriam relaxados são desprezados. A cada iteração o tamanho do problema é aumentado devido à inserção de um novo subconjunto (daí o nome "*insert*"), e os que já foram tratados serão fixados aos seus valores encontrados. A aplicação desta heurística requer um cuidado especial na sua inicialização, pois uma vez que ela desconsidera parte do problema, existe um risco de que ela conduza a uma solução inviável pela falta de informação, o que não acontece na RF já que a relaxação indica um possível caminho para uma solução. Neste caso, adotamos um sistema de tratamento de erros onde o método pode retornar à solução prévia para poder agrupar outro subconjunto. Desta forma, um novo subproblema, maior que o anterior e com mais informações, será tratado.

A terceira heurística chama-se *Fractional Relax-and-fix* (FRF), que reúne as características das duas anteriores de forma a tanto melhorar o tempo de execução, devido ao subproblema de tamanho reduzido, quanto achar soluções parciais flexíveis a cada iteração. Neste método, consideraremos apenas parte do problema e este terá suas variáveis reagrupadas em conjuntos de inteiras e de relaxadas. A cada iteração o conjunto inteiro será fixado em seus valores encontrados, o conjunto relaxado será tratado como inteiro e um novo conjunto será inserido no problema. O processo se repete até que o problema inteiro completo seja tratado. Aqui adotamos também os cuidados necessários para uma boa inicialização do problema, assim como o tratamento de erros.

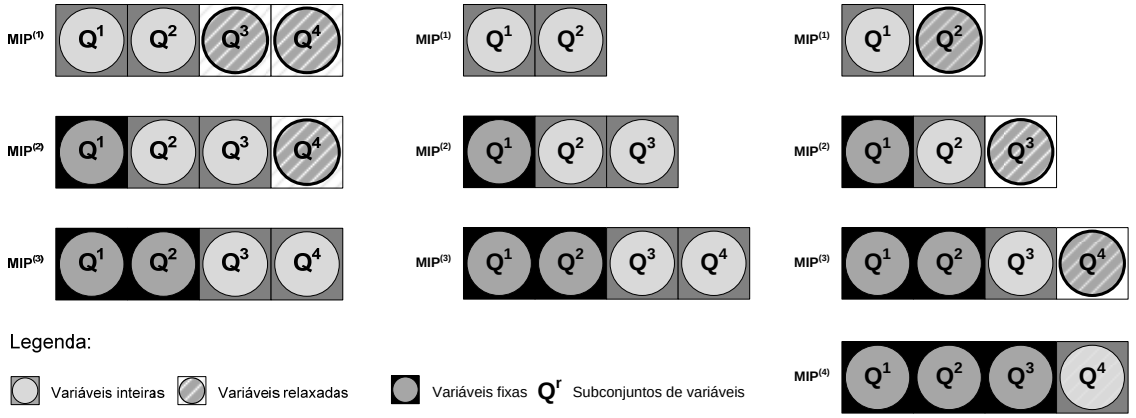
As imagens abaixo mostram os esquemas de composição dos subproblemas tratados em cada heurística. A Figura 3(a) corresponde à heurística RF, 3(b) à heurística IF e 3(c) à FRF. Em cada uma delas, podemos observar a evolução do método e a divisão dos subgrupos de variáveis a cada iteração.

B. *Diving*

O *Diving* (ou *Dive-and-fix*) é uma estratégia que realiza uma busca em profundidade na árvore de decisão, utilizando critérios de limitação e fixação nas variáveis 0-1 do problema. Este processo permite simplificar o problema a cada iteração uma vez que os limites impostos levam a uma solução viável.

O método utiliza a relaxação linear a cada execução e, a partir do resultado obtido, aplica critérios para limitar e fixar os valores fracionários das variáveis em inteiros. Os critérios aplicados por nossa versão do Diving são:

- *Tolerância decrescente:* aqui, as variáveis são fixadas segundo uma tolerância. A cada iteração o método percorre o vetor de variáveis fracionárias arredondando-as. Caso não haja modificação em uma iteração, a tolerância será diminuída e o vetor será re-analisado.
- *Fixação por intervalo:* este método define que as variáveis em um intervalo $[a,b]$ sejam arredondadas e fixadas. Este intervalo é modificado a cada iteração, pois o método percorre o vetor de variável escolhendo os dois maiores valores a e b.



(a) *Relax-and-fix* (b) *Insert-and-fix* (c) *Fractional Relax-and-fix*

Figura 3: Evolução dos métodos e composição dos subgrupos de variáveis

Nossa heurística *Diving* também conta o parâmetro de limite de execução do solver, utilizado também nos métodos RF.

Algumas observações sobre o *Diving* adaptado ao LSVRP é que: 1) ele trabalha apenas com as variáveis de decisão de *setup* ($y_{i,t}$). Foram feitas tentativas de aplicar o método nas variáveis de decisão de arcos ($g_{ij,t}$), mais devido a elas serem inteiras e não binárias o método mostrou-se incompatível. 2) Como a decisão de produção é dominante no problema, a sua fixação à 0 pode vir a comprometer a solução. Neste caso, a fixação foi feita com extrema cautela favorecendo o arredondamento ao limite superior.

5. Resultados computacionais

Nosso conjunto de testes é composto de 200 instâncias geradas aleatoriamente. Elas foram construídas seguindo os intervalos definidos por Armentano e Toledo (2006) com a adição de consumo de componentes (máximo de 2 produtos do mesmo tipo). Para o problema de transporte, foram adotadas as seguintes configurações:

- Custo fixo de transporte: [5; 95]
- Custo unitário de transporte: [12; 45]
- Custo fixo de veículo: 10 vezes a capacidade de produção
- Duração do trajeto: [1; 3] períodos de tempo

Os testes foram feitos em uma máquina munida de um processador Intel Core 2 Quad, com 4Gb de RAM. O código foi escrito em linguagem C++, com o uso da biblioteca Ilog Cplex, em sistema Windows XP. As instâncias foram divididas em 10 grupos de 20 de acordo com suas características principais. Sendo assim, temos grupos que combinam 3 ou 4 sítios de fabricação com 12, 24, 36, 48 ou 60 períodos.

A Tabela I mostra o impacto dos parâmetros de tempo de execução (colunas, TE = 30”, 60” e 90”) e de tamanho dos subconjuntos (linhas, TS = 34%, 25% e 20%) para as heurísticas RF, IF e FRF. Para cada porcentagem de horizonte de tempo usada a cada iteração e para cada limite de tempo de CPU dado para o Cplex a cada iteração, são apresentados os gaps (em porcentagem entre a solução ótima e o valor da heurística) relativos mínimo e o máximo sobre as 200 instâncias.

O tempo de CPU para cada iteração tem um impacto significante no desempenho global. Isto pode ser explicado pelo fato de que, quanto maior for o TE dado ao Cplex, maior serão as chances de se achar uma solução ótima para a iteração atual. Entretanto, as heurísticas divergem com relação aos TS utilizados: a RF tende a fornecer melhores resultados, sobretudo quando TS é menor, já que existem maiores possibilidades de reavaliação das decisões tomadas a

cada iteração. Já a IF responde de maneira oposta, pois a ausência de dados não fornece um direcionamento da solução tão eficaz quanto à relaxação o faz. Na FRF encontramos um equilíbrio entre os outros dois métodos.

	Relax-and-fix			*Insert-and-fix*			*Fractional Relax-and-fix*		
	30"	**60"**	**90"**	**30"**	**60"**	**90"**	**30"**	**60"**	**90"**
34%	0,00	0,00	0,00	0,02	0,02	0,02	0,11	0,05	0,04
	Inviável	2,63	1,82	3,54	2,03	2,03	2,50	2,50	2,50
25%	0,04	0,02	0,00	0,06	0,03	0,03	0,15	0,08	0,04
	2,86	1,57	1,06	3,76	3,76	3,76	2,91	2,91	2,91
20%	0,06	0,03	0,01	0,05	0,05	0,03	0,13	0,10	0,09
	2,51	1,39	0,88	3,76	3,76	3,76	2,91	2,91	2,91

Tabela I: Impacto dos parâmetros nas heurísticas baseadas em RF

Esta análise de impacto dos parâmetros serviu como teste de calibragem para os métodos. Desta forma, chegamos a conclusão de que uma boa estratégia é primeiro selecionar um tempo de CPU razoável em cada iteração e então identificar os melhores ajustes correspondentes para a porcentagem do horizonte de tempo considerado. Dos resultados, nos escolhemos 90'' com 20% de variáveis inteiras por iteração para a RF e a IF, e 90" com 25% de variáveis para a FRF, todas com fixação em "y|g". A Figura 4 mostra dois gráficos de dispersão que exprimem o desempenho das 3 heurísticas baseadas em RF. 4(a) e 4(b) exibem, respectivamente, uma análise feita em cima das instâncias à 3 e 4 sítios de produção.

Em relação ao desempenho da heurística *Diving*, os critérios foram testados com 1", 5", 10", 30", 60" e 90" de TE. Eles forneceram resultados similares, com ligeiras variações.

As duas tabelas à seguir comparam o valor da solução ótima fornecida pelo Cplex com os resultados das 4 heurísticas propostas de acordo com o seus melhores ajustes de parâmetros. A Tabela II refere-se às instâncias de 3 sítios de fabricação, e a Tabela III, às de 4 sítios. Para cada grupo de instâncias é mostrado o valor médio de O*, o valor médio fornecido por cada heurística, e o gap médio relativo entre os dois valores anteriores. Cada grupo é definido como (sítios × períodos).

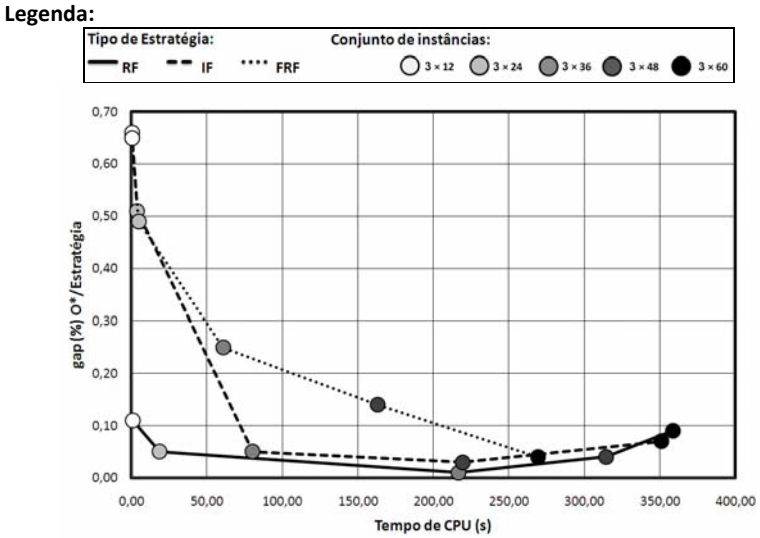
Instância	O*	RF	gap	IF	gap	FRF	gap	Diving	gap
3×12	22115,72	22138,60	0,11	22253,02	0,66	22250,64	0,65	22131,13	0,06
3×24	55309,91	55331,49	0,05	55551,55	0,51	55536,44	0,49	55369,06	0,10
3×36	89075,28	89087,38	0,01	89100,71	0,05	89279,43	0,25	89321,25	0,30
3×48	121232,89	121277,33	0,04	121299,26	0,03	121379,02	0,14	121912,65	0,59
3×60	152041,68	152182,38	0,09	152162,83	0,07	152102,85	0,04	153733,72	1,18

Tabela II: Instâncias com 3 sítios de fabricação.

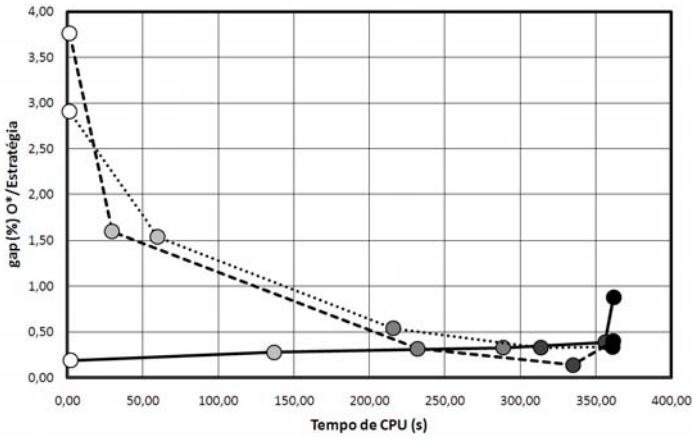
Instância	O*	RF	gap	IF	gap	FRF	gap	Diving	gap
4×12	19397,94	19435,20	0,19	20095,25	3,76	19928,33	2,91	19414,34	0,11
4×24	51378,00	51525,44	0,28	51983,32	1,60	52128,54	1,54	51701,33	0,57
4×36	87543,08	87803,11	0,33	87694,02	0,32	87964,78	0,54	89523,26	2,43
4×48	125063,83	125511,72	0,39	125280,62	0,14	125435,18	0,33	129077,56	3,39
4×60	140585,05	141815,19	0,88	141229,42	0,40	141044,26	0,34	147839,13	5,30

Tabela III: Instâncias com 4 sítios de fabricação.

Podemos observar que cada método possui suas vantagens e desvantagens. RF fornece os valores mais uniformes, enquanto que IF e FRF, mesmo perdendo parte da vantagem do método, que é a relaxação, tendem a melhorar as instâncias mais difíceis. *Diving* se mostra como o menos vantajoso para as grandes instâncias, entretanto ele mostra-se bem adaptado às menores.



(a) Instâncias com 3 sítios de fabricação



(b) Instâncias com 4 sítios de fabricação

Figura 4: Desempenho das heurísticas RF sobre o conjunto de instâncias

6. Conclusão

Este artigo propôs 4 heurísticas para resolver o problema integrado de *Lot-Sizing* e *Vehicle Routing Problem* (LSVRP). Elas se mostraram bem adaptadas ao problema e forneceram boas soluções em um tempo de cálculo razoável. Entre elas, RF se destaca por fornecer os resultados mais equilibrados para um conjunto de testes de 200 instâncias geradas aleatoriamente.

Para trabalhos futuros, uma abordagem interessante seria a elaboração de heurísticas de construção que forneçam uma solução inicial às heurísticas aqui apresentadas, senão uma combinação entre *Diving* e heurísticas RF de forma que a cada iteração haja uma alternância que priorize os pontos mais fortes de cada método.

Referências

Armentano, V. A. e Toledo, F. M. B. (2006), A Lagrangean-based Heuristic for the Capacitated Lot-sizing Problem in Parallel Machines, *European Journal of Operation Research*, 1070-1083.

Bard, J. F. e Nananukul, N. (2009), The Integrated Production-Inventory-Distribution-Routing Problem, *Journal of Scheduling*, 257-280.

Boudia, M. e Prins, C. (2009), A Memetic Algorithm with Dynamic Population Management for an Integrated Production-distribution Problem, *European Journal of Operational Research*, 703-715.

Boudia, M., Louly, M. A. O. e Prins, C., Global Optimization of Production and Distribution, *Proceedings of the International Conference on Industrial Engineering and Systems Management*, Marrakech (Morocco), 2005a.

Boudia, M., Louly, M. A. O. e Prins, C., GRASP for the Combined Optimization of Production and Distribution, *MIC2005: The Sixth Metaheuristics International Conference*, Vienna (Austria), 2005b.

Boudia, M., Louly, M. A. O. e Prins, C. (2007), A Reactive GRASP and Path Relinking for a Combined Production-distribution Problem, *Computers & Operations Research*, 3402-3419.

Boudia, M., Louly, M. A. O. e Prins, C. (2008), Fast Heuristics for a Combined Production Planning and Vehicle Routing Problem, *Production Planning & Control: The Management of Operations*, 85-96.

Bräysy, O., Gendreau, M., Hasle, G., Løkketangen, A. e Potvin, J. Y. Metaheuristics for the vehicle routing problem and its extensions: a categorized bibliography. In Golden, B., Raghavan, S. e Wasil, E. (Eds.), *The Vehicle Routing Problem - Latest Advances and New Challenges*. Springer Verlag, Heidelberg, 143-169, 2008.

Chandra, P. e Fisher, M. L. (1994), Coordination of Production and Distribution Planning, *European Journal of Operational Research*, 503-517.

Comelli, M., Gourgand, M. e Lemoine, D. (2008), A Review of Tactical Planning Models, *Journal of Systems Science and Systems Engineering*, 204-229.

Dillenberger, C., Escudero, L. F., Wollensak, A. e Zhang, W. (1994), On Practical Resource Allocation for Production Planning and Scheduling with Period Overlapping Setups, *European Journal of Operational Research*, 275-286.

Escudero, L. e Salmeron, J. (2005), On a Fix-and-relax Framework for a Class of Project Scheduling Problems, *Annals of Operations Research*, 163-188.

Federgruen, A., Meissner, J. e Tzur, M. (2007), Progressive Interval Heuristics for Multi-Item Capacitated Lot Sizing Problems, *Operations Research*, 490-502.

Ferreira, D., Morabito, R. e Rangel, S. (2010), Relax and Fix Heuristics to Solve One-stage One-machine Lot-scheduling Models for Small-scale Soft Drink Plants, *Computers & Operations Research*, 76-88.

Glover, F., Jones, G., Karney, D., Klingman, D. e Mote, J. (1979), An Integrated Production, Distribution, and Inventory Planning System, *Interfaces*, 21-35.

Hahm, J. e Yano, C. A. (1992), The Economic Lot and Delivery Scheduling Problem: the Single Item Case, *International Journal of Production Economics*, 235-252.

Kuik, R., Salomon, M. e van Wassenhove, L. N. (1994), Batching Decisions: Structure and Models, *European Journal of Operational Research*, 243-263.

Lei, L., Liu, S., Ruszczynski, A. e Park. S. (2006), On the Integrated Production, Inventory, and Distribution Routing Problem, *IIE Transactions*, 955-970.

Manne, A. S. (1958), Programming of Economic Lot Sizes, *Management Science*, 115-135.

Merzouk, S. E., Problème de Dimensionnement de Lots et de Livraisons - Application au cas d'une Chaine Logistique, *Tese de Doutorado*, Université de Technologie de Belfort-Montbéliard, 2007 (http://artur.univ-fcomte.fr/ST/AUTO/these/merzouk_protege.pdf, 4, 2011).

Pisinger, D. e Ropke, S. (2007), A general heuristic for vehicle routing problems. *Computers & Operations Research*, 34: 2403-2435.

Pochet, Y. e Wolsey, L. A., Production Planning by Mixed Integer Programming, *Springer*, 2006.

Rogers, J. (1958), A Computational Approach to the Economic Lot Scheduling Problem, *Management Science*, 264-291.

Toth, D., e Vigo, P., The Vehicle Routing Problem. *SIAM*, 2002.

Trigeiro, W. W., Thomas, L. J. e McClain, J. O. (1989), Capacitated Lot Sizing with Setup Times, *Management Science*, 353-366.

Wagner, H. M. e Whitin, T. M. (1958), Dynamic Version of the Economic Lot Size Model, *Management Science*, 89-96.