UMA GENERALIZAÇÃO DO CONCEITO DE SALTOS EM ORDENS PARCIAIS

Adriana Pimenta de Figueiredo
DME, Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO
Rio de Janeiro - RJ
adriana.pimenta@uniriotec.br

Jayme L. Szwarcfiter
IM, NCE e COPPE/Sistemas, Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ
Rio de Janeiro - RJ
jayme@cos.ufrj.br

Sulamita Klein
IM e COPPE/Sistemas, Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ
Rio de Janeiro - RJ
sula@cos.ufrj.br

RESUMO

Seja P uma ordem parcial e A sua extensão arbórea. Um salto de A é uma relação no diagrama de Hasse de A que não ocorre na ordem P. O número de saltos arbóreos de A é o número de saltos desse tipo. Nesse trabalho estudamos a extensão arbórea de P que tenha número de saltos arbóreos mínimo - um problema conhecido relacionado com este, é o problema do número de saltos de uma extensão linear. Descrevemos vários resultados para esse problema, sua NP-completude, casos onde temos soluções polinomiais e discutimos o conceito de extensão arbórea minimal.

PALAVRAS CHAVE: extensões arbóreas, número de saltos arbóreos, Otimização e Teoria de Grafos.

Área principal: (Teoria de Grafos e Otimização)

ABSTRACT

Let P be a partial order and A an arboreal extension of it. A jump of A is a relation contained in the Hasse diagram of A, but not in the order P. The arboreal jump number of A is the number of jumps contained in it. In this work we study the arboreal extension of P having minimum arboreal jump number - a problem related to the well-known jump number problem. We describe several results for this problem, NP-completeness, polynomial time solvable cases and we also discuss the concept of a minimal arboreal extension.

KEYWORDS: arboreal extension, arboreal jump number, Optmization and Graph Theory.

Main area: (Graph Theory and Optmization)

1. Introdução

O estudo do número de saltos de uma ordem desperta grande interesse teórico e algorítmico. Dada uma ordem P, seu número de saltos lineares corresponde ao número mínimo de elementos consecutivos em uma extensão linear que são incomparáveis em P. A motivação para este estudo está na área escalonamento de tarefas. Suponha que se deseja realizar um conjunto de tarefas com restrições de precedência, em uma única máquina. Se duas tarefas que são incomparáveis pelas restrições de precedência e são processadas consecutivamente, é necessário um custo adicional, correspondente ao tempo de configuração da máquina. A minimização destes custos corresponde ao número de saltos do problema.

Sob o ponto de vista algoritmico, determinar o número de saltos de uma ordem é NP-completo [14, 2], ainda que restrito às ordens de intervalo [13]. No entanto, o número de saltos de semi-ordens pode ser computado em tempo polinomial [21]. Uma heurística para resolver o problema do número de saltos foi proposto por [6], enquanto um algoritmo exato foi descrito por [1]. Uma algoritmo 3/2-aproximativo, para encontrar o número de saltos de ordens de intervalos, foram descritos em [7, 19]. O problema pode ser resolvido em tempo polinomial para ordens série-paralelas [3]. Esse resultado foi generalizado para ordens livre de N [10, 15, 18]. Aplicando uma técnica de decomposição e substituição, um algoritmo de tempo polinomial foi obtido para classes mais gerais, [20]. Outras classes especiais que foram consideradas incluem as de largura fixada [4] e ordens livre de ciclos [5], ver também [17]. Além disso, o número de saltos pode ser determindo por algoritmos de tempo pseudo-polinomiais, que torna-se polinomial quando certos parâmetros da ordem são fixados [4, 11, 18]. Limites para o número de saltos foi descrito por [8].

Neste trabalho, propomos considerar um conceito equivalente de número de saltos, porém aplicada a uma extensão arbórea ao invés da extensão linear. Uma extensão $\mathcal{A}$ de uma ordem $\mathcal{P}$ é dita *arbórea* se seu diagrama de Hasse é uma árvore enraizada com um único elemento minimal. Portanto, nosso problema é, dada uma ordem $\mathcal{P}$, queremos encontrar uma extensão arbórea de $\mathcal{P}$, que minimiza o número de relações incomparáveis em seu diagrama de Hasse. Esse parâmetro é então chamado de número de saltos *arbóreos*. Para distinguir o número de saltos arbóreos, vamos nos referir a forma anterior de número de saltos *lineares*. Para citar uma motivação para considerar o caso arbóreo, temos a área de linguagem orientada a objetos. Neste contexto, a relação entre um conjunto de classes por uma aplicação especial, pode ser descrita como uma ordem parcial $\mathcal{P}$. Em uma etapa anterior, durante a fase de implementação, nos deparamos com linguagens de programação que muitas vezes só permitem herança única. Isso significa que vamos transformar P numa ordem parcial $\mathcal{Q}$, que é *hierarquia* e corresponde precisamente a uma extensão arbórea de $\mathcal{P}$. O interese é fazer essa transformação, adicionando o menor número possível de relações no diagrama de Hasse da ordem que minimiza o número de arestas que não constam nas relações das classes, anteriormente obtidas.

Mostramos que determinar o número arbóreo de saltos é um problema NP-completo. Mais ainda, por um simples argumento mostramos que o número de saltos arbóreos não é uma invariante de comparabilidade. Isso vem em contradição com o número de saltos lineares, que é invariante por comparabilidade [9]. Por outro lado, mostramos que o número de saltos arbóreos de uma ordem livre de N pode ser determinado também em tempo

polinomial. Finalmente, também introduzimos o conceito de uma extensão arbórea minimal, descrevemos propriedades do mesmo e um algoritmo de tempo polinomial para determinar a extensão solicitada.

2. Preliminares

Um par ordenado $\mathcal{P} = (X, P)$ é dito ser um conjunto parcialmente ordenado, onde X é um conjunto finito e P é um conjunto de relações, quando existe uma relação binária P entre os elementos de X que é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Se X é um conjunto parcialmente ordenado e vale que (x, y) ou (y, x) em P , ou seja, quaisquer dois elementos de X são comparáveis, então dizemos que X é um *conjunto totalmente ordenado* ou uma *cadeia*. Usamos as notações $x \parallel y$ para indicar que x e y não são comparáveis em P e $x \perp y$ se (x, y) ou (y, x) em P.

Uma ordem $\mathcal{P} = (X, P)$ é *conexa* se para todo $x, y \in X$ com $x \neq y$, existe uma sequência finita $x = x_0, x_1, \cdots, x_n = y$ de pontos de X tal que $x_i \perp x_{i+1}$ em P, para $i = 0, 1, \cdots, n-1$. Uma subordem $(Y, P(Y))$ de (X, P) é chamada uma componente de (P) se $(Y, P(Y))$ é conexo e não existe um subcontunto $Z \subset X$ contendo Y como subconjunto próprio para que $(Z, P(Z))$ é conexo.

Um *elemento maximal* de uma ordem P, denotado $\max(P)$, é um elemento x tal que, se $x \leq y$ então $x = y$. Não se exige que $y \leq x$ para todo $y \in P$, portanto, podem haver vários elementos maximais. Analogamente, definimos um *elemento minimal* de P, denotado $\min(P)$, como um elemento x tal que, se $y \leq x$, então $y = x$.

Em uma ordem finita P, vamos definir a relação (x, y) em termos de relação de cobertura: para os elementos $x, y, z \in X$ dizemos que y *cobre* x, quando $(x, y) \in P$, e não existe z tal que $(x, z), (z, y) \in P$, por outro lado, dizemos que x é *coberto* por y. Denote por $C^+_{\mathcal{P}}(x) = \{y \in X; y \text{ cobre } x\}$ e $C^-_{\mathcal{P}}(x) = \{y \in X; y \text{ é coberto por } x\}$. Nas notações citadas, podemos descartar o índice quando estiver claro no contexto.

A idéia de cobertura sugere uma maneira de representar uma ordem por meio de um diagrama de vértices, chamado de *diagrama de Hasse* de um conjunto parcialmente ordenado P. Ele é um grafo desenhado no plano Euclidiano, em que cada vértice corresponde a um ponto de P e para cada par de cobertura $x < y$, os vértices representando x e y são ligados por uma aresta e o ponto que representa x está "abaixo"do ponto que representa y.

O diagrama de Hasse de uma ordem P, pode ser construído através de seu digrafo G removendo as orientações, todos os loops e os arcos transitivos. O digrafo de Hasse de uma ordem não possui ciclos orientados e é reduzido transitivamente.

Quando x, y são incomparáveis, escrevemos $\mathcal{P} + (x, y)$ para representar a ordem $\mathcal{P}'$ obtida pela adição a $\mathcal{P}$ a relação (x, y) juntamente com as demais relações obtidas pela transitividade. Sendo assim, escrevemos $\mathcal{P} = \mathcal{P}' - (x, y)$. Denote por

$$N^+_{\mathcal{P}}(x) = \{y \in X; (x, y) \in P\}$$

$$N^-_{\mathcal{P}}(x) = \{y \in X; (y, x) \in P\}$$

enquanto que

$$N^+_{\mathcal{P}}[x] = N^+_{\mathcal{P}}(x) \cup \{x\}$$

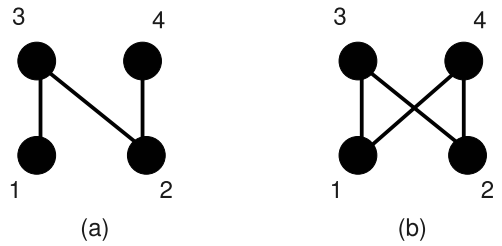

Figura 1: N e $K_{2,2}$

$$N^-_{\mathcal{P}}[x] = N^-_{\mathcal{P}}(x) \cup \{x\}.$$

Sendo assim, um elemento $x \in X$ é *maximal* em $\mathcal{P}$ quando $N^+_{\mathcal{P}}(x) = \emptyset$, e *minimal* quando $N^-_{\mathcal{P}}(x) = \emptyset$. Denote por $M^+(\mathcal{P})$ e $M^-(\mathcal{P})$ os conjuntos de elementos maximais e minimais, respectivamente.

Exemplos de ordens:

A ordem formada pelos elementos $\{1, 2, 3, 4\}$ e as relações $\{(1, 3), (2, 3), (2, 4)\}$ é denotada por N, enquanto que a ordem obtida pela adição da relação $(1, 4)$ é chamada de $K_{2,2}$. As figuras 1(a) e 1(b) ilustram N e $K_{2,2}$, respectivamente. Uma ordem P é dita livre de N, se ela não possui nenhuma subordem isomorfa a N, isomorfismo que preserva a ordem. Uma ordem que não contém N como subordem induzida, é chamada de *série paralela*, enquanto que uma ordem que não contém N em seu diagrama de Hasse é chamada livre de N. As ordens série paralelas são livre de N. Uma ordem $P = (X, P)$ é uma ordem de intervalo se a cada elemento x de X existe correspondência a um intervalo I_x da reta real de modo que I_u está totalmente à esquerda de I_v se e somente se $u < v$.

Sejam P e Q duas ordens parciais sobre o mesmo conjunto X. Se $P \subset Q$, dizemos que Q é uma extensão de P. Se Q é uma cadeia então Q é uma *extensão linear de* P.

Na teoria das extensões lineares, definimos um elemento importante: os saltos. Um par consecutivo (x_i, x_{i+1}) de elementos é um *salto* na extensão linear L se (x_i, x_{i+1}) em L e $x_i \parallel x_{i+1}$ na ordem P. Denotamos por $s_L(\mathcal{P})$ o menor número de saltos lineares dentre todas as extensões lineares de P.

Uma cadeia C de uma ordem $\mathcal{P}(X, P)$ é *gulosa* se seus elementos maximais y satisfazem $N^-[y] = C$ e C é maximal com essa propriedade. A *decomposição por cadeias gulosas* de $\mathcal{P}$ é uma partição de seus elementos em cadeias $C_1, \ldots, C_k$, tal que para $i \geq 1$, C_i é uma cadeia gulosa na ordem $\mathcal{P} - \cup_{j<i} C_j$. Para $Y, Z \subseteq X$, a operação $Y \oplus Z$ define o conjunto $Y \cup Z$ e as relações $\{(x_1, x_2) | (x_1, x_2) \in P$, ou $x_1 \in Y$ e $x_2 \in Z\}$, juntamente com as relações que são implicadas pela transitividade. Qualquer decomposiçao por cadeias $C_1, \ldots, C_k$ corresponde a uma extensão linear $C_1 \oplus \ldots \oplus C_k$, que é chamada de *gulosa*. Por outro lado existem extensões lineares que não são gulosas. Se o número de saltos de uma ordem P é k, então existe uma extensão linear que possui este número de saltos.

3. Extensões Arbóreas

Definição: Um conjunto ordenado $\mathcal{P} = (X, P)$ é uma ordem arbórea se, e somente se, dados x e y elementos incomparáveis de X, não existe $z \in X$ com (x, z) e (y, z).

Equivalentemente, uma ordem $\mathcal{P} = (X, P)$ é arbórea se para todo $x \in X$, $C^-(x)$ é uma cadeia.

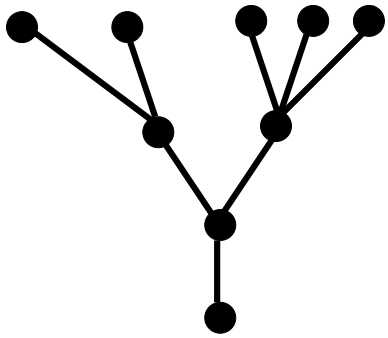

Figura 2: Exemplo de uma ordem arbórea

Uma extensão A de uma ordem P é *arbórea*, se A é uma ordem arbórea.

O número de saltos de $\mathcal{A}$ é o seu *número de saltos arbóreos*. Como no caso linear, o *número de saltos arbóreos* de $\mathcal{P}$ é o menor número de saltos arbóreos dentre todas as extensões arbóreas. A extensão linear que satisfaz essa condição é chamada de *mínima*. Por outro lado, uma *extensão arbórea minimal* é a extensão arbórea cuja remoção de qualquer de seus saltos viola a condição de ser arbórea. Claramente, qualquer extensão mínima é minimal, o contrário nem sempre acontece, existem extensões arbóreas minimais que estão longe de ser mínimas.

As Figuras 4(a), 4(b) e 4(c) são exemplos de extensões arbóreas da ordem do exemplo da Figura 3. Os saltos arbóreos são as relações $(6, 1)$ na Figura 4(a), $(1, 2), (3, 4)$ na Figura 4(b) e $(1, 2), (3, 4), (5, 6)$ na Figura 4(c) .

Na Figura 4(a) a extensão arbórea é mínima, enquanto que na Figura 4(b) a extensão é minimal e na Figura 4(c) não é mínima nem minimal.

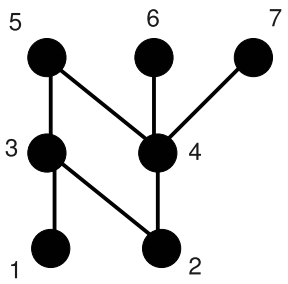

Figura 3: Ordem P

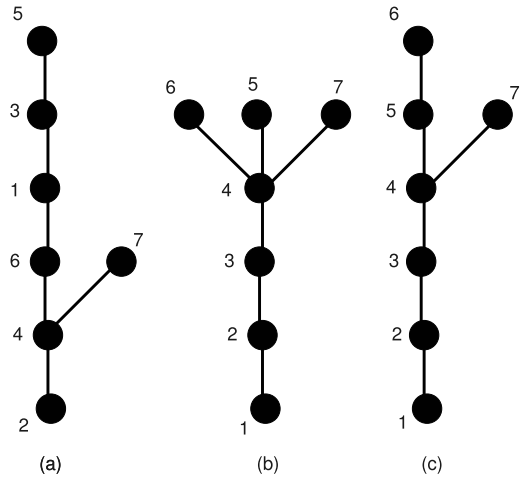

Figura 4: Exemplos de extensões arbóreas da ordem P

Vamos examinar a complexidade do *problema do número de saltos arbóreos.*

O problema de decisão correspondente: existe extensão linear L de P com número de saltos menor ou igual a k?

Π: Extensão linear

Instância: Ordem P, inteiro k

Pergunta: Existe extensão linear L de P com número de saltos menor ou igual a k?

Π': Extensão arbórea

Instância: Ordem P', inteiro k'

Pergunta: Existe extensão arbórea A de P' com número de saltos menor ou igual a k?

Teorema 1. *Construir uma extensão arbórea ótima $\mathcal{A}$ de uma ordem $\mathcal{P}$ é um problema NP-completo, mesmo se P for uma ordem de intervalo.*

Prova: Vamos mostrar que o problema $\Pi' \in NP$.

É fácil ver que $\Pi' \in NP$, pois dada uma extensão arbórea A de P', basta verificar quais relações, (ou arestas, no caso de diagrama de Hasse da ordem) estão contidas em A e não estão em P'.

Para provar que $\Pi' \in$ NP-difícil utilizaremos a seguinte transformação polinomial: P' é formado pela ordem P mais um elemento v, onde v é o único elemento maximal de P'. Seja P é uma ordem de intervalo, P' naturalmente também o é pois, em uma representação de P por intervalos, basta acrescentar um novo intervalo correspondente a v de tal modo que ele preceda os demais. Note que v é o único elemento maximal de P'. Além disso, tome $k' = k$.

Se a resposta a Π for verdade, então Π' também é válido pois toda extensão linear é uma extensão arbórea.

Se a resposta a Π' for verdade, então Π também é válido pois, como P' possui um único elemento máximal, toda extensão arbórea de P' é um extensão linear. Consequentemente, encontrar a extensão arbórea de P' é equivalente a encontrar a extensão linear de P.

Portanto, encontrar a extensão arbórea A para uma ordem P qualquer é um problema NP-completo. □

Diferentemente do problema do número de saltos lineares, o número de saltos arbóreos não possui a propriedade de invariante de comparabilidade. O número de saltos lineares é invariante por comparabilidade em uma ordem [9], enquanto que o mesmo não ocorre com o caso arbóreo.

Observe os exemplos das ordens P_1 e P_2:

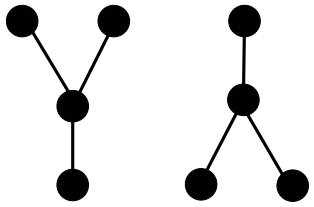

Figura 5: Ordens P_1 e P_2

O grafo de comparabilidade das duas ordens é:

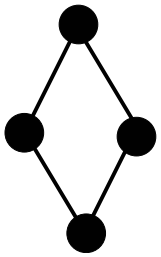

Figura 6: Grafo de comparabilidade das ordens P_1 e P_2

Porém a ordem P_1 é uma ordem arbórea, possui número de saltos arbóreo igual a 0. Já a ordem P_2 possui número de saltos arbóreos igual a 1.

As ordens arbóreas podem ser caracterizadas em termos de estrutura proibida. Seja $\mathcal{P}(X, P)$ uma ordem e $v, x_1, x_2 \in X$.

Dizemos v, x_1, x_2 que forma uma *violação* de $\mathcal{P}$, quando $x_1, x_2 \in C^-(v)$. Nesse caso, chamamos v de *violador* (Figura 7).

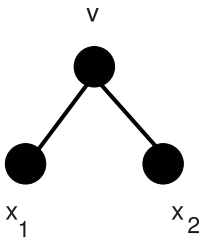

Figura 7: A violação

obs: Violação Uma ordem é arbórea se, e somente se, não contém violações.

Vamos examinar as extensões arbóreas minimais. Descrevemos uma caracterização de tal extensão.

Teorema 2. *Seja $\mathcal{P}(X,P)$ uma ordem e $\mathcal{A}$ sua extensão arbórea. Então $\mathcal{A}$ é minimal se, e somente se, para todo salto (y,z) de $\mathcal{A}$ existem elementos $v,x_1,x_2 \in X$ tal que*

$$y \in N^+_{\mathcal{A}'}[x_2] \setminus N^+_{\mathcal{A}'}[x_1],$$
$$z \in N^-_{\mathcal{A}'}[x_1] \setminus N^-_{\mathcal{A}'}[x_2]$$
$$e$$
$$x_1, x_2 \in C^-_{\mathcal{A}'}(v),$$

onde $\mathcal{A}' = \mathcal{A} - (y,z)$.

Prova: Assuma que $\mathcal{A}$ é minimal. Então $\mathcal{A}$ é arbórea, mas $\mathcal{A}'$ não é. Seja v,x_1,x_2 uma violação de $\mathcal{A}'$. Já que v,x_1,x_2 não é uma violação de $\mathcal{A}$ esses três vértices devem estar numa ordem linear em $\mathcal{A}$. Claramente, v precede x_1 e x_2 nessa ordem. Sem perda de generalidade, assuma que x_2 precede x_1. A ordem linear pode ser formada pela adição do salto (y,z), concluímos assim que, $y \in N^+_{\mathcal{A}'}[x_2]$. Podemos, também concluir que $y \notin N^+_{\mathcal{A}'}[x_1]$, por outro lado $\mathcal{A}$ não pode ser antissimétrica. Consequentemente, $y \in N^+_{\mathcal{A}'}[x_2] \setminus N^+_{\mathcal{A}'}[x_1]$. A prova que $z \in N^-_{\mathcal{A}'}[x_1] \setminus N^-_{\mathcal{A}'}[x_2]$ é similar.

Para mostrar o outro lado, assuma que todos os saltos de $\mathcal{A}$ satisfazem as condições acima. Pelo contrário, suponha que $\mathcal{A}$ não é minimal. Nessa situação, existe um salto (y,z) de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A}' = \mathcal{A} - (y,z)$ é arbóreo. No entanto, pelas condições do teorema, existem elementos v,x_1,x_2 satisfazendo $x_1,x_2 \in C^-_{\mathcal{A}'}(v)$. Isso significa que v,x_1,x_2 forma uma violação em $\mathcal{A}'$, implicando que $\mathcal{A}'$ não é arbóreo. Então $\mathcal{A}$ é minimal. $\triangledown$

Agora, descrevemos um algoritmo para encontrar uma extensão minimal de uma ordem. A idéia é incluir somente os saltos que garantem a eliminação das violações existentes, sem criar novas violações. O algoritmo é o seguinte. Seja $\mathcal{P}(X,P)$ uma ordem dada.

alg: minimal Encontrando extensões arbóreas minimais

Passo inicial: $\mathcal{A} := \mathcal{P}$.

Passo geral: se $\mathcal{A}$ não contém violação, então: $\mathcal{A}$ é uma extensão arbórea minimal.

Por outro lado, escolha uma violação v, x_1, x_2, com v o violador. Seja z um elemento minimal de

$$N^-_{\mathcal{A}}[x_1] \setminus N^-_{\mathcal{A}}[x_2].$$

Então temos o conjunto $\mathcal{A} := \mathcal{A} + (x_2, z)$ e repita o passo geral.

Vamos mostrar a corretude do algoritmo.

Teorema 3. *O algoritmo* **alg:minimal** *constrói uma extensão arbórea minimal da ordem dada* $\mathcal{P}$

Prova: Considere uma interação específica do passo geral, e $\mathcal{A}$ a extensão de $\mathcal{P}$ no início dessa iteração. Seja v, x_1, x_2 uma violação $\mathcal{A}$, escolhida nessa iteração e $z \in X$, como determinado no algoritmo. Como $z \in N^-_{\mathcal{A}}[x_1] \setminus N^-_{\mathcal{A}}[x_2]$ segue que $x_2 \parallel z$. Então $\mathcal{A} + (x_2, z)$ é antissimétrica e portanto é uma extensão atual de $\mathcal{P}$. Além disso, a escolha do salto (x_2, z) elimina a violação v, x_1, x_2. Mais ainda, o fato que z é um elemento minimal de $N^-_{\mathcal{A}}[x_1] \setminus N^-_{\mathcal{A}}[x_2]$ significa que a adição desse salto (x_2, z) não cria novas violações. Então, a cada passo do algoritmo eliminamos pelo menos uma violação e não criamos novas. Portanto o algoritmo termina e a extensão obtida é de fato arbórea.

Resta mostrar que a extensão arbórea $\mathcal{A}$, construída pelo algoritmo, é minimal. Suponha que não é. Então existe um salto (x_2, z) de $\mathcal{A}$, tal que a extensão $\mathcal{A}' = \mathcal{A} - (x_2, z)$ é também arbórea. Sendo assim, (x_2, z) foi adicionado em algum passo do algoritmo e o algoritmo não cria novas violações, sabemos que existem $x_1, v \in X$, tal que $x_1, x_2 \in N^-_{\mathcal{P}}(v)$, onde x_2, z, x_1, v estão ordenados linearmente em $\mathcal{A}$. Também sabemos que $z \in N^-_{\mathcal{A}'}[x_1] \setminus N^-_{\mathcal{A}'}[x_2]$. Consequentemente, z, x_1, v estão em ordem linear em$\mathcal{A}'$, além de ser assim em $\mathcal{A}$. Em seguida, analizamos a relação entre x_2 e z, em $\mathcal{A}'$. Concluímos que ou eles são incomparáveisl ou $x_2 \in N^-_{\mathcal{A}'}(z)$. No primeiro caso, $\mathcal{A}'$ não é arbóreo, porque v, x_1, x_2 forma uma violação em $\mathcal{A}'$, implicando que $\mathcal{A}$ é minimal. No segundo caso, existe um elemento w, tal que $w \in N^-_{\mathcal{A}'}(z)$ e $x_2 \in N^-_{\mathcal{A}'}(w)$. O último caso contradiz (x_2, z) pertencer ao diagrama de Hasse de $\mathcal{A}$. Portanto a extensão construída pelo algoritmo é de fato minimal. $\triangledown$.

4. Ordens livre de N

Nesta seção, descrevemos propriedades relacionadas as extensões arbóreas de ordens livre de N. Em particular, descrevemos uma expressão para o número de saltos arbóreos de uma ordem livre de N, que corresponde a um algoritmo de tempo polinomial par determiná-la.

Empregamos a decomposição de cadeias gulosas. Seja $\mathcal{P}$ uma ordem livre de N e $\mathcal{G}$ uma decomposição por cadeias gulosas de $\mathcal{P}$. Classificamos cada cadeia C de $\mathcal{G}$ como segue. Se o elemento maximal $x \in C$ de C é também maximal em $\mathcal{P}$ então C é uma *cadeia extremal* , por outro lado ela é uma *cadeia violadora*.

O método para determinar o número de saltos arbóreos de uma ordem livre de N é baseado no resultado correspondente para o número de saltos lineares dado por I. Rival.

Teorema 4. I. Rival *[15] Seja $\mathcal{P}$ uma ordem livre de N e $\mathcal{G}$ uma decomposição por cadeias gulosas de P. Então*

$$s_L(\mathcal{P}) = |\mathcal{G}| - 1$$

A seguinte observação caracteriza as extensões arbóreas de ordens arbitrárias em termos de cadeias gulosas.

Obs: Seja $\mathcal{P}$ uma ordem e $\mathcal{G}$ uma decomposição por cadeias gulosas de P. As seguintes afirmativas são equivalentes:

1. $\mathcal{P}$ é arbórea.
2. $\mathcal{G}$ consiste somente de cadeias extremais.
3. $\mathcal{G}$ contém exatamente $|M^+(\mathcal{P})|$ cadeias.

O próximo teorema determina o número de saltos arbóreos de uma ordem livre de N.

Teorema 5. *Seja $\mathcal{P}$ uma ordem livre de N. Então*

$$s_A(\mathcal{P}) = s_L(\mathcal{P}) - |M^+(\mathcal{P})| + 1$$

Prova: Seja $\mathcal{G}$ uma decomposição por cadeias gulosas de uma ordem livre de N $\mathcal{P}$, formada pelas cadeia $C_1, \ldots, C_k$, talque todas as cadeias violadoras precedem as cadeias extremais nessa sequência. Claramente tal decomposição sempre existe, porque sempre tomar as cadeias violadoras até que não reste nenhuma cadeia violadora nessa ordenação. Seja C_t a última cadeia violadora de $\mathcal{G}$. Considere a extensão $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}$ formada por

$$(C_1 \oplus \ldots \oplus C_t \oplus C_{t+1}) \cup [\mathcal{P} \setminus \{C_1 \cup \ldots \cup C_{t+1}\}],$$

juntamente com a relação (x, y), onde $x \in C_i$, $y \in C_j$, $i \leq t$, $j > t$. Em outras palavras, o subconjunto de cadeias violadora é transformado em cadeias simples $(C_1 \oplus \ldots \oplus C_t)$, a primeira cadeia extremal é colocada acima desta, e as outras cadeias extremais permanecem como antes. Observe que t saltos foram adicionados a $\mathcal{P}$ nessa operação , isto é, $s_L(\mathcal{A}) = t$. Claramente, $(C_1 \oplus \ldots \oplus C_t \oplus C_{t+1}), C_{t+2}, \ldots, C_k$ é uma decomposição por cadeias gulosas de $\mathcal{A}$ e consiste somente de cadeias extremais. Pela observação anterior, concluímos que $\mathcal{A}$ é arbórea. Novamente pela observação anterior, segue que $k - t = |M^+(\mathcal{P})|$. Portanto, o Teorema de Rival implica que para uma ordem livre de N, k constante é igual a $s_L(\mathcal{P}) + 1$. Consequentemente, t tem que ser também constante, isso significa que $s_A(\mathcal{P}) = t$. Isto é, $s_A(\mathcal{P}) = s_L(\mathcal{P}) - |M^+(\mathcal{P})| + 1$. $\triangledown$

Finalmente, discutimos a aplicação do algoritmo **alg:minimal** para construir extensões minimais, quando aplicadas a ordens livre de N. Começamos com o seguinte lema simples.

Lema 1. *Seja $\mathcal{P}$ uma ordem arbitrária e $\mathcal{A}$ uma extensão arbórea minimal de $\mathcal{P}$ construída pelo algoritmo* **alg: minimal**. *Então $\mathcal{A}$ preserva os elementos maximais de $\mathcal{P}$.*

Prova: Todos os saltos (x, z) do Algoritmo **alg: minimal** adicionados em $\mathcal{P}$ são tais que x não é um elemento maximal de $\mathcal{P}$. $\triangledown$

Teorema 6. *Seja $\mathcal{P}$ uma ordem livre de N e $\mathcal{A}$ uma extensão arbórea minimal de $\mathcal{P}$, obtida pelo Algoritmo* **alg: minimal**. *Então $\mathcal{A}$ é mínima.*

Prova: Seja $\mathcal{G}$ uma decomposição gulosa de$\mathcal{P}$. Pela última Observação, sabemos que $\mathcal{G}$ tem $|M^+(\mathcal{P})|$ cadeias extremais. Então, utilizando o Teorema 5, concluímos que $s_A(\mathcal{P})$ é igual a cardinalidade do subconjunto de cadeias violadoras de $\mathcal{G}$. Daí, associamos a cada cadeia violadora de $\mathcal{G}$ o salto adicionado em $\mathcal{P}$ pelo Algoritmo **alg: minimal**, como segue. Seja C uma cadeia violadora de $\mathcal{P}$ e x seu elemento maximal. Então existe uma violação v, x, x' em $\mathcal{P}$. Assiciamos a cadeia C o salto x, y ou x', y, empregado pelo algoritmo de eliminação da violação. Observe que numa ordem livre de N, não existe outro caminho para o algoritmo eliminar essa violação, exceto empregando um salto começando ou de x ou de x'. Similarmente, cada salto x, y escolhido pelo algoritmo, podemos associal uma cadeia violadora de $\mathcal{G}$, sendo x seu elemento maximal. Consequentemente, $s_A(\mathcal{P})$ é igual ao número de saltos adicionados pelo Algoritmo **alg: minimal**. Isso significa que o algoritmo de fato constrói uma extensão arbórea mínima de $\mathcal{P}$. $\triangledown$

5. Conclusões

Consideramos o problema de determinar o número mínimo de saltos arbóreos de $\mathcal{A}$ de uma ordem dada $\mathcal{P}$. Descrevemos vários resultados para esse problema, incluindo sua NP-completude, casos especiais de tempo polinomiale o conceito de extensões minimais.

Referências

[1] **Bianco L., Dell'olmo P. , Giordani S.** (1997), An optimal algorithm to find the jump number of partially ordered sets, *Computational Optimization and Applications*, 8 , pp 197-210.

[2] **Bouchitt V. , Habib M.** (1987), NP-completeness properties about linear extensions *Order* , 4, pp 143-154

[3] **Cogis, O. e Habib, M.** (1979), Nombre de sauts et graphes série-paralèles, *RAIRO Inf. Thèor.*, 13, pp 3–18.

[4] **Colburn C. J. , Pulleyblank W. R.** (1985), Minimizing setups in ordered sets of fixed width, *Order*, 1, pp 225-229.

[5] **Duffus, P. W. D. e Rival, I.** (1982), Minimizing setus for cycle-free ordered sets, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 85, pp 509–513.

[6] **Faigle U. , Schrader R.** (1995), A setup heuristic for interval orders, *Operations Research Letters*, 4, pp 185-188.

[7] **Felsner S.** (1990), A 3/2-approximation algorithm for the jump number of interval orders, *Orders*, 6, pp 325-334.

[8] **Felsner S.** (1991), Bounds for the jump number of partially ordered sets, *TU Berlin*.

[9] **Habib M.** (1984), Comparability invariants, *Ordres: Description et Rôles*, M. Pouzet and D. Richard, eds., North-Holland, Amsterdam, pp 371-386.

[10] **Habib M ,Jegou R.**(1985), N-free posets as generalizations of series-parallel posets, *Disc. Appl. Math.* 12 , pp 279-291.

[11] **Habib M. , Möhring R.** (1987), On some complexity properties of N-free posets with bounded decomposition diameter, *Discrete Mathematics* 63, pp 157-182.

[12] **Kelly D.** (1986), Invariants of finite comparability graphs, *Order* 3, pp 155-158.

[13] **Mitas, J.** (1992), Tackling the jump number of intervalorders *Order*, v.8, pp 115–132.

[14] **Pulleyblank, W. R. F.** (1981), On minimizing setups in precedence-constrained scheduling, *Discrete Applied Math.*

[15] **Rival, I.** (1983), Optimal linear extensions by interchanging chains *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 89, pp 387–394

[16] **Steiner G.** (1986), On finding the jump number of a partial order by substitution decomposition, *Order* 2 , pp 9-23.

[17] **Syslo, M. M.** (1985),A graph theoretic approach to the jump number problem, *Graphs and Orders*, pp 195-215.

[18] **Syslo, M. M.** (1988),An algorithm for solving the jump number problem, *Discrete Mathematics*, pp 337-346.

[19] **Syslo, M. M.** (1995), The jump number problem on interval orders: A $\frac{3}{2}$-approximation algorithm, *Discrete Mathematics*, 144, pp 119–130.

[20] **Steiner G.** (1986) , On finding the jump number of a partial order by substitution decomposition, *Order*, 2 , pp 9-23.

[21] **Von Arnim A. , de la Higuera C.** (1994), Computing the jump number on semi-orders is polynomial, *Discrete Applied Mathematics*, 51 , pp 219-232..