TOMADA DE DECISÃO MULTICRITÉRIO EM GRUPO COM ESTRUTURA HIERÁRQUICA USANDO MODELAGEM DAS RELAÇÕES DE PREFERÊNCIA *FUZZY*

Roberta Parreiras
Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
Av. Dom José Gaspar, 500, 30535-610, Belo Horizonte, MG, Brasil
roberta.parreiras@terra.com.br

Petr Ekel
Pontifícia Universidade Católica De Minas Gerais
Av. Dom José Gaspar, 500, 30535-610, Belo Horizonte, MG, Brasil
ekel@pucminas.br

Fernando Bernardes Jr.
Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
Av. Dom José Gaspar, 500, 30535-610, Belo Horizonte, MG, Brasil
gontijao@yahoo.com.br

Iguatinan Monteiro
Companhia Energética de Minas Gerais
Av. Barbacena, 1200, 30190-131, Belo Horizonte, MG, Brasil
igmontei@cemig.com.br

RESUMO

Este trabalho descreve um procedimento para tomada de decisão multicritério em grupo, cujo ambiente apresenta uma estrutura hierárquica, em que vários especialistas são convidados a participar como consultores, mas apenas um especialista (decisor) tem autoridade para tomar a decisão. O procedimento proposto baseia-se na modelagem das preferências por meio de relações de preferência *fuzzy*. Ele prevê o uso de ferramentas computacionais para apoiar o decisor no tratamento de discordâncias de opiniões e de julgamentos duvidosos (com o nível não nulo de incomparabilidade). A aplicabilidade do procedimento é demonstrado por meio da resolução de um problema de decisão associado ao planejamento estratégico em uma empresa de geração de energia elétrica.

PALAVRAS CHAVE. Tomada de decisão multicritério, Tomada de decisão em grupo, Relações de preferência *fuzzy*.

ABSTRACT

This paper presents a procedure for multicriteria decision-making in a group environment with hierarchical structure, where a group of experts is invited to act as consultants and only one expert, named decision-maker (DM), has authority to make the final decision. The procedure being proposed is based on preference modeling by means of fuzzy preference relations. It offers computational resources to help a DM to deal with discordant opinions and hesitant judgments (i.e. judgments with non-null level of incomparability). The applicability of the procedure is demonstrated through the solution of a decision-making problem associated with the strategic planning in an electric energy generation organization.

KEYWORDS. Multicriteria decision-making, Group decision-making, Fuzzy preference relations,

1. Introdução

Problemas de tomada de decisão multicritério em grupo podem ser estruturados a partir da especificação de um conjunto de alternativas $X=\{X_1, X_2,...,X_n\}$ a serem avaliadas, comparadas, escolhidas, ordenadas e/ou priorizadas, por um conjunto de especialistas E, considerando-se um conjunto de critérios $C=\{C_1, C_2,...,C_m\}$. Levando-se em conta a possibilidade de diferentes equipes de especialistas participarem da avaliação de cada critério, usamos aqui o símbolo $E_p = \{E_p^1, E_p^2,..., E_p^v\}$ para representar o grupo de especialistas convidado a dar seu parecer para o p-ésimo critério.

Conceitualmente, pode-se dizer que o processo de decisão multicritério em grupo envolve três etapas principais Ngwenyama et al. (1996):

Etapa 1) definição do problema de decisão, incluindo o conjunto de possíveis soluções (alternativas) e os critérios para sua avaliação;

Etapa 2) aquisição de informação sobre as preferências dos especialistas envolvidos no processo (nesta etapa é particularmente interessante o uso de esquemas de consenso, como por exemplo aqueles apresentados em Herrera-Viedma et al. (2002), em Herrera-Viedma et al. (2007) ou em Pedrycz et al. (2011), para reunir a informação relevante para a análise do problema e para reduzir discordâncias de opiniões dentro dos grupos de especialistas);

Etapa 3) processamento e análise da informação obtida na Etapa 2, gerando recomendações para o problema.

No presente trabalho é proposto um procedimento para ser utilizado na Etapa 3, para o processamento e análise da informação, em um ambiente de grupo com estrutura hierárquica, ou seja, onde vários especialistas são convidados a colaborar como consultores, mas apenas um especialista (o decisor) tem autoridade para tomar a decisão.

Uma possível abordagem para a modelagem e análise de problemas de decisão em grupo baseia-se na construção e processamento de relações de preferência *fuzzy* que refletem as preferências do(s) especialista(s) pelas alternativas do conjunto X, segundo os diferentes critérios do conjunto C Herrera-Viedma et al. (2002); Pedrycz et al. (2011). As relações de preferência *fuzzy* são conjuntos *fuzzy* bidimensionais cuja função de pertinência, dada por $R_p(X_k, X_l): X \times X \to [0,1]$, reflete no intervalo unitário o nível de preferência da alternativa X_k sobre a alternativa X_l Orlovsky (1978). O procedimento que está sendo proposto permite ao decisor processar a informação fornecida por cada especialista para a modelagem de um conjunto de relações de preferência coletivas $R^C = \{R_1^C,..., R_m^C\}$ (aqui o sobrescrito C indica que as matrizes R_p^C, p=1, 2, ..., m refletem a preferência do grupo), que podem ser processadas pelos tradicionais métodos de decisão multicritério baseados no processamento das relações de preferência *fuzzy*. Para apoiar o decisor no processo de construção de relações de preferência para o grupo são disponibilizadas as seguintes ferramentas:

- índice de discordância para auxiliar na identificação de tendências de opinião no grupo e de opiniões discordantes a X_l;
- índice de consenso para verificar se o nível de concordância entre as preferências dos especialistas e a preferência coletiva é satisfatório;
- índice de incomparabilidade, que pode ser entendido como um índice de hesitação ou dúvida do especialista em relação ao seu próprio julgamento em relação à cada par de alternativas;
- operador de agregação que permite diferenciar o grau de importância da opinião de cada especialista e o nível de compensação adequado entre julgamentos favoráveis e desfavoráveis à cada alternativa, no caso de haver discordâncias no grupo.

É necessário indicar que os índices de discordância e de consenso vêm sendo tradicionalmente utilizados para guiar processos de discussão nos esquemas de consenso

Herrera-Viedma et al. (2002); Herrera-Viedma et al. (2007); Pedrycz et al. (2011) e para auxiliar a agregação das preferências individuais para formação de modelos de preferências coletivas Ben-Arieh e Chen (2006); Parreiras et al. (2010). Por outro lado, a inclusão do índice de incomparabilidade no processamento das preferências individuais para a construção do modelo da preferência coletiva é uma contribuição original deste trabalho. Para demonstrar a aplicabilidade do procedimento proposto, este é associado a um método de decisão multicritério e aplicado na tomada de decisão associada ao planejamento estratégico de uma empresa.

2. Modelagem da Preferência por Relações de Preferência *Fuzzy*

Conforme foi mencionado anteriormente, aqui a modelagem das preferências coletivas R_p^C, p=1,2,...,m exige que as preferências de cada especialista E_p^y sobre as alternativas do conjunto X sejam refletidas por uma relação de preferência *fuzzy* para cada critério R_p^y, p=1,2,...,m. O procedimento aqui proposto baseia-se em relações de preferência *fuzzy* codificadas em conformidade com o seguinte esquema (que também é utilizado em outros trabalhos como, por exemplo, em Fodor e Roubens (1994) e em Pedrycz et al. (2011)):

- se $R_p(X_k, X_l) = 1$ e $R_p(X_l, X_k) = 1$, então X_k é indiferente a X_l;
- se $R_p(X_k, X_l) = 1$ e $R_p(X_l, X_k) = 0$, então X_k é estritamente preferido a X_l;
- se $R_p(X_k, X_l) = 0$ e $R_p(X_l, X_k) = 1$, então X_l é estritamente preferido a X_k;
- se $R_p(X_k, X_l) = 0$ e $R_p(X_l, X_k) = 0$, então X_k e X_l não são comparáveis;
- a diagonal principal é toda preenchida com 1, devido a propriedade reflexiva da relação de preferência não-estrita $R_p(X_k, X_l)$.

Julgamentos intermediários a esses listados logo acima também são permitidos. A interpretação para tais julgamentos é descrita a seguir:

- se $0 < R_p(X_k, X_l) < 1$ e $R_p(X_l, X_k) = 1$, então X_l é fracamente preferido a X_k;
- se $R_p(X_k, X_l) = 1$ e $0 < R_p(X_l, X_k) < 1$, então X_k é fracamente preferido a X_l;
- se $0 < R_p(X_k, X_l) < 1$ e $R_p(X_l, X_k) = 0$, então X_k é fracamente preferido a X_l e, ao mesmo tempo, X_k e X_l são considerados incomparáveis em um certo nível;
- se $R_p(X_k, X_l) = 0$ e $0 < R_p(X_l, X_k) < 1$, então X_l é fracamente preferido a X_k e, ao mesmo tempo, X_k e X_l são considerados incomparáveis em um certo nível.

Lembrando que os formatos de preferência baseados em comparações das alternativas admitem que o decisor forneça julgamentos inconsistentes (ou intransitivos), é importante indicar que a literatura não apresenta ainda um critério universalmente aceito para avaliar a consistência de relações de preferência *fuzzy* não-recíprocas Pedrycz et al. (2011). Embora a transitividade min, a qual é dada por

$$R_p(X_k, X_j) \geq \min(R_p(X_k, X_l), R_p(X_l, X_j)), \tag{1}$$

tenha sido tradicionalmente adotada como condição de consistência, ela pode ser considerada excessivamente rigorosa para aplicações práticas Herrera-Viedma et al. (2004). Neste artigo, a consistência fraca, a qual é dada por

$$\text{se } R_p(X_k, X_j) \geq R_p(X_j, X_k) \text{ e } R_p(X_j, X_l) \geq R_p(X_l, X_j), \tag{2}$$
$$\text{então } R_p(X_k, X_l) \geq R_p(X_l, X_k), \forall X_k, X_j, X_l \in X$$

é considerada adequada para a aplicação do procedimento que estamos propondo, tendo em vista que a função de escolha de Orlovsky (1978), na qual baseia-se o método de análise multicritério aqui utilizado, exige apenas a transitividade fraca da preferência para que seja garantido um comportamento racional do método Sengupta (1998).

3. Ferramentas para Processamento de Preferências Particulares

Na tomada de decisão em grupo, tendo em mãos as opiniões de cada especialista, é importante compará-las e analisá-las antes de utilizá-las para a tomada de decisão. Por exemplo, é natural que haja discordâncias no grupo, visto que cada especialista em geral tem sua maneira particular de enxergar e tratar o problema. Se houver um alto nível de concordância entre as opiniões, a tarefa de construir relações de preferência *fuzzy* capazes de refletir a preferência do grupo fica bastante simplificada. Por outro lado, a ocorrência de opiniões discordantes levanta questões como: "quais opiniões devem ser priorizadas?", uma "avaliação negativa feita por um especialista pode ser compensada por uma opinião positiva feita por outro especialista?", "é razoável negligenciar as opiniões mais discordantes do grupo?".

Além disso, conforme foi visto na Seção 2, o formato de relação de preferência *fuzzy* não-recíproca oferece a possibilidade de cada especialista atribuir um nível de incomparabilidade aos seus julgamentos. Se levarmos em consideração o nível de incomparabilidade atribuído por cada especialista a cada par de alternativas, torna-se possível executar certas ações com a finalidade de aumentar a qualidade e a racionalidade das relações de preferências coletivas. Por exemplo, é possível identificar os julgamentos com alto nível de incomparabilidade e considerar na análise apenas aqueles que estiverem dentro de um nível aceitável de incomparabilidade. Além disso, o fato de que todos os especialistas atribuíram um alto grau de incomparabilidade à comparação entre duas alternativas pode ser tomado como um indício de que é necessário rever a colocação do problema ou melhorar a descrição dessas alternativas.

Tendo em vista os aspectos descritos acima, a seguir são apresentados três índices que podem ser utilizados para aumentar a racionalidade da etapa de processamento das preferências: o índice de incomparabilidade, o índice de discordância e o índice de consenso.

Por definição, a relação de incomparabilidade *fuzzy* $J_p(X_k, X_l)$ implica que o decisor tenha motivos para afirmar que $(X_k, X_l) \notin R_p$ e $(X_l, X_k) \notin R_p$. Portanto, a relação de incomparabilidade pode ser definida como Fodor e Roubens (1994):

$$J_p = (R_p)^c \cap (R_p)^d, \tag{3}$$

onde $(R_p)^c$ representa a relação complementar a R_p, sendo dada por $(R_p(X_k, X_l))^c = 1 - R_p(X_k, X_l)$, e R_p^d corresponde a relação dual de R_p, ou seja $(R_p(X_k, X_l))^d = 1 - R_p(X_l, X_k)$. Quando o operador min é utilizado para implementar a interseção em (3), a relação de incomparabilidade, que aqui é compreendida como um índice de incomparabilidade associado a cada julgamento, pode ser calculada para o *y*-ésimo especialista por meio da seguinte expressão Fodor e Roubens (1994):

$$J_p^y(X_k, X_l) = \min(1 - R_p^y(X_k, X_l), 1 - R_p^y(X_l, X_k)). \tag{4}$$

O índice de discordância reflete o nível de incompatibilidade de opiniões no intervalo unitário, sendo que 0 representa concordância perfeita e 1 representa discordância máxima. Uma forma simples de se estimar o nível de discordância entre as preferências de dois especialistas expressa por meio de relações de preferência *fuzzy* não-recíprocas é por meio da seguinte expressão Pedrycz et al. (2011):

$$D_p^{y,z}(X_k, X_l) = \frac{(|R_p^y(X_k, X_l) - R_p^z(X_k, X_l)| + |R_p^y(X_l, X_k) - R_p^z(X_l, X_k)|)}{2}, \tag{5}$$

onde R_p^y corresponde a relação de preferência *fuzzy* fornecida pelo *y*-ésimo especialista para o *p*-ésimo critério. Dado o conjunto de julgamentos com nível aceitável de incomparabilidade (este nível deve ser definido empiricamente pelo decisor)

$$T_p^y = \{(X_k, X_l) \in X \times X \mid J_p^y(X_k, X_l) < J_{\max}\}, \tag{6}$$

cujo número de elementos é dado por $|T_p^y|$, a seguinte expressão pode ser usada para estimar o nível médio de discordância entre as relações de preferência R_p^y e R_p^z, desconsiderando sempre os julgamentos com alto nível de incomparabilidade:

$$Dm_p^{y,z} = \frac{2}{|T_p^y|(|T_p^y|-1)} \sum_{\forall (X_k, X_l) \in T_p^y | l>k} D_p^{y,z}(X_k, X_l). \tag{7}$$

O nível médio de discordância do especialista E_y em relação ao grupo pode ser calculado como a média aritmética das discordâncias entre todas as relações de preferência R_p^y, y=1,…,v, como mostra a equação a seguir:

$$Dm_p^y = \frac{1}{(v-1)} \sum_{z=1, z \neq y}^{v} Dm_p^{y,z}. \tag{8}$$

Quando se tem em mãos a relação de preferência *fuzzy* coletiva R_p^C, as expressões (6)-(8) podem ser utilizadas para comparar R_p^C e as relações de preferência fornecidas por cada especialista R_p^y, y=1,...,v. A seguinte expressão permite calcular para cada especialista o nível médio de discordância em relação à relação de preferência coletiva:

$$Dm_p^{y,C} = \frac{2}{|T_p^y|(|T_p^y|-1)} \sum_{\forall (X_k, X_l) \in T_p^y | l>k} D_p^{y,C}(X_k, X_l). \tag{9}$$

O nível médio de concordância entre as relações de preferência dos especialistas e a relação de preferência coletiva é calculado por meio do índice de consenso sobre a relação de preferência *fuzzy* coletiva R_p^C, conforme mostra a seguinte expressão:

$$Cons_p = 1 - \left(\frac{1}{v} \sum_{y=1}^{v} Dm_p^{y,C} \right). \tag{10}$$

4. Pré-processamento de preferências discordantes e/ou hesitantes

Tendo em mãos o nível de discordância e o nível de incomparabilidade de cada julgamento $R_p^y(X_k, X_l)$ feito pelo *y*-ésimo especialista, o decisor pode analisar a informação disponível e determinar de forma racional o nível de influência da opinião de cada especialista na formação das preferências coletivas. Idealmente, seria desejável alcançar um consenso nos julgamentos do grupo, uma consistência perfeita nas relações de preferência *fuzzy* individuais e coletivas, e um nível nulo de incomparabilidade em todos os julgamentos. No entanto, tendo em vista que nem sempre é possível alcançar este ideal, é necessário que o decisor determine:

- quais relações de preferência *fuzzy* tem um nível aceitável de consistência;
- quais julgamentos tem um nível aceitável de incomparabilidade;
- atribua pesos à contribuição de cada especialista, baseados no conhecimento e experiência do especialista acerca do critério de decisão por ele considerado;
- escolha um operador de agregação para construir relações de preferência *fuzzy*.

Conforme foi mencionado anteriormente, existem diferentes operadores que podem ser usados para construir relações de preferência *fuzzy* coletivas e, com isso, estender métodos de análise multicritério para a consideração de opiniões dadas por diferentes especialistas. Ente os operadores normalmente utilizados com esta finalidade podemos citar Pedrycz et al. (2011): média aritmética ponderada, média geométrica ponderada, o operador min e o operador paramétrico média ordenada ponderada também conhecido por OWA (*ordered weighted arithmetic*). Aqui propomos o uso da média aritmética ponderada, em que os pesos atribuídos às preferências individuais são baseados no nível de concordância da opinião de cada especialista em relação à opinião do grupo e na avaliação subjetiva feita pelo decisor do nível de conhecimento e experiência de cada especialista sobre o critério em estudo.

Para apoiar o decisor nessas situações de escolha que estão descritas acima, estamos propondo o procedimento a seguir, que deve ser aplicado para cada critério separadamente. Este procedimento permite ao decisor tratar os julgamentos com nível não nulo de incomparabilidade e os julgamentos discordantes, supondo que cada especialista foi capaz de fornecer relações de preferência *fuzzy* que satisfazem a preferência fraca. Esta suposição não é considerada excessivamente restritiva, à medida que forem oferecidas aos especialistas ferramentas que os auxiliem na construção e correção dessas matrizes, como a que é proposta em Ma et al. (2006). Além disso, aqui também é assumido que, para todo par de alternativas, existe pelo menos um julgamento com nível aceitável de incomparabilidade. A inexistência de julgamentos aceitáveis para algum par de alternativas é um indício de que o conjunto de alternativas e/ou o critério de decisão em estudo devem ser mais bem definidos, o que exige uma nova execução da Etapa 1 e da Etapa 2 do processo de decisão, descritas na Introdução:

Passo 1. Calcular a incomparabilidade para cada par de alternativas a partir da matriz fornecida por cada especialista e selecionar apenas os julgamentos com um nível de incomparabilidade superior ao nível máximo aceitável J_{max} determinado pelo decisor. Para simplificar a tarefa do decisor, é sugerido o uso da escala de incomparabilidade exibida na Tabela 1. Assim, por exemplo, se o decisor quiser levar em conta somente os julgamentos com baixo nível de incomparabilidade, sendo na pior das hipóteses classificados como levemente incomparáveis, então deve utilizar J_{max}=0,1.

Tabela 1. Escala de incomparabilidade.

0,9	0,7	0,5	0,3	0,1	0
Incomparável	Muito incomparável	Moderadamente Incomparável	Pouco incomparável	Levemente incomparável	Comparável

Passo 2. Determinar o peso w_p^y, y=1,…,v a ser associado à opinião de cada especialista. Aqui propomos o cálculo do peso levando-se em conta os seguintes componentes:

- λ_p^y: componente associado à competência, experiência e conhecimento do especialista a ser determinado subjetivamente pelo decisor. Conforme sugerido por Saaty (1980), os pesos das contribuições de cada especialista podem ser avaliados por meio do AHP, levando em conta o conhecimento de cada especialista, sua capacidade de persuasão, e etc.
- $Dm_p^{y,z}$: componente correspondente ao nível médio de discordância entre as relações de preferência R_p^y e R_p^z, dada pela equação (4).

O peso $w_p^y(X_k, X_l)$ a ser associado à cada um dos julgamentos com nível admissível de incomparabilidade, fornecidos pelo especialista E_y, penaliza a discordância em relação à opinião emitida por especialistas cuja contribuição tem maior peso λ_p^z, conforme mostra a seguinte equação (esta abordagem para o cálculo de pesos é similar a abordagem proposta por Hsu e Chen (1996) para a agregação de estimativas *fuzzy*):

$$w_p^y(X_k, X_l) = \frac{1}{(s-1)} \sum_{z=1, z\neq y}^{s} \lambda_p^z (1 - D_p^{y,z}(X_k, X_l)), \tag{11}$$

onde z varia somente entre os índices dos especialistas que forneceram o julgamento $R_p(X_k, X_l)$ com um nível admissível de incomparabilidade e s é o número de especialistas que forneceram o julgamento $R_p(X_k, X_l)$ com um nível admissível de incomparabilidade.

Passo 3. Aplicar o operador de agregação média aritmética ponderada utilizando os pesos calculados por meio da expressão (11), conforme mostra a expressão abaixo:

$$R_p^C(X_k, X_l) = \sum_{z=1}^{s} \frac{w_p^z(X_k, X_l)}{W_p(X_k, X_l)} R_p^z(X_k, X_l), \tag{12}$$

onde $W_p(X_k, X_l) = \sum_{z=1}^{s} w_p^z(X_k, X_l)$. É importante indicar que na expressão (12), z varia somente entre os índices dos especialistas que forneceram julgamento $R_p(X_k, X_l)$ com um nível admissível de incomparabilidade.

Passo 4. Avaliar se a relação de preferência *fuzzy* R_p^C satisfaz a transitividade fraca. Caso não satisfaça, o decisor deve fazer as devidas correções utilizando para isso ferramentas como a que é proposta em Ma et al. (2006). Se o método de análise multicritério a ser utilizado baseia-se no procedimento de escolha proposto por Orlovsly, a transitividade fraca da matriz coletiva deve ser satisfeita para que o método comporte-se segundo certas propriedades racionais Sengupta (1998).

Passo 5. Calcular o índice de consenso. Aqui o índice de consenso é utilizado apenas para uma validação do resultado. Se o valor não estiver satisfatório, o decisor pode ainda ajustar os pesos de modo a reduzir a contribuição das relações de preferência mais discordantes.

5. Método de Decisão Multicritério Baseado em Relações de Preferência *Fuzzy*

O método de análise multicritério descrito a seguir foi originalmente proposto para o contexto da decisão individual Orlovsky (1981). No entanto, pode ser naturalmente adaptado para a decisão em grupo a partir da construção de matrizes coletivas para cada critério (agregação de relações de preferência *fuzzy*). Este método baseia-se no procedimento de escolha proposto por Orlovsky (1978), que constrói a relação de preferência estrita e o conjunto *fuzzy* de soluções não-dominadas a partir do processamento das relações de preferência *fuzzy* não-estritas fornecidas pelos especialistas.

A relação de preferência *fuzzy* não estrita pode ser representada como a união de uma relação de preferência estrita P_p e a relação de indiferença I_p:

$$R_p = P_p \cup I_p. \tag{13}$$

A relação de preferência estrita, por sua vez, corresponde a todos os pares de alternativas que satisfazem simultaneamente às condições: X_k é fracamente preferido a X_l, isto é $(X_k, X_l) \in R_p$, e X_l não é fracamente preferido a X_k, ou seja $(X_l, X_k) \notin R_p$. Essas duas condições são refletidas pela seguinte expressão:

$$P_p = R_p \cap (R_p)^d . \tag{14}$$

Se $(X_k, X_l) \in P_p$, pode-se dizer que X_k é estritamente melhor do que X_l (ou, equivalentemente que X_k domina X_l) Orlovsky (1978). A função de pertinência de P_p pode ser obtida por meio do operador t-norma de Lukasiewicz como segue Fodor e Roubens (1994):

$$P_p(X_k, X_l) = \max(R_p(X_k,X_l) - R_p(X_l,X_k)\ ,0) . \tag{15}$$

Como $P_p(X_l, X_k)$ descreve o conjunto de alternativas X_k que são estritamente dominadas por X_l, seu complemento $(P_p(X_l, X_k))^c$ corresponde ao conjunto de alternativas pertencentes a X que não são dominadas por X_l. Portanto, para encontrar o conjunto de alternativas que não são dominadas por nenhuma outra alternativa, basta obter para cada alternativa X_k a interseção de $(P_p(X_l, X_k))^c$, levando-se em conta as demais alternativas $X_l \in X$. Essa interseção corresponde ao conjunto *ND* de alternativas não-dominadas. Se o operador min for usado para realizar esta interseção, sua função de pertinência

$$ND_p(X_k) = \min_{X_l \in X} \{1 - P_p(X_l, X_k)\} \tag{16}$$

reflete o nível de não-dominância de cada alternativa Orlovsky (1978). A melhor escolha para um problema monocritério, baseado nesse modelo, devem ser as alternativas:

$$X_{R_p}^{ND} = \{X_k^{ND} \in X \mid ND_p(X_k^{ND}) = \max_{X_k \in X} \{ND_p(X_k)\} . \tag{17}$$

É válido ressaltar que as alternativas que satisfazem

$$X_{R_p}^{ND} = \{X_k^{ND} \in X \mid ND_p(X_k^{ND}) = 1\} \tag{18}$$

são na realidade não *fuzzy* não-dominadas e podem ser consideradas como as soluções não-*fuzzy* do problema *fuzzy* Orlovsky (1978).

As expressões (15)-(17) podem ser usadas para resolver problemas monocritério de escolha ou de ordenação, mas também podem ser usadas na construção de procedimentos para resolver tais tipos de problemas, levando-se em conta múltiplos critérios. Existem várias maneiras de se extender o procedimento de escolha de Orlovsky (1978) para se resolver problemas multicritério. Uma possível forma consiste em obter uma relação global *G* por meio da interseção dessas relações:

$$G(X_k, X_l) = \min(R_1(X_k, X_l),..., R_q(X_k, X_l)) . \tag{19}$$

Nesse caso, as Equações (15)-(17) podem ser aplicadas levando-se em conta a relação global (19). O conjunto *fuzzy* resultante corresponde ao conjunto de Pareto Orlovsky (1978). Se for necessário, em uma análise subseqüente, esse conjunto pode ser contraído a partir da atribuição de um fator de importância a cada relação R_p, p=1,…,q Orlovsky (1981).

6. Exemplo de Aplicação

O problema de tomada de decisão aqui considerado consiste em selecionar a iniciativa estratégica de maior prioridade para ser desenvolvida nos próximos cinco anos em uma empresa de geração de energia elétrica. Quatro principais alternativas estão em estudo:

- Projeto X_1: investir na compra de energia de outras empresas geradoras;
- Projeto X_2: investir em tecnologia para gerenciamento de carga;
- Projeto X_3: investir na construção de novos sistemas de transmissão e de distribuição;
- Projeto X_4: investir na ampliação de usinas existentes.

Esses projetos serão comparados e ordenados de acordo com sua importância levando em conta os critérios: C_1) Perspectiva econômica; C_2) Perspectiva da qualidade da energia; C_3) Perspectiva operacional. Para ilustrar o uso do procedimento proposto, vamos considerar o critério C_1. As matrizes de comparações fornecidas pelos cinco especialistas para a avaliação do primeiro critério são as seguintes:

$$R_1^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}65 & 1 \end{bmatrix}, R_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}8 & 0{,}4 & 1 \\ 0{,}5 & 1 & 1 & 1 \\ 0{,}7 & 1 & 1 & 0{,}5 \\ 1 & 0{,}6 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_1^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0{,}7 & 0{,}65 & 1 \end{bmatrix},$$
$$R_1^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0{,}8 \\ 0 & 1 & 1 & 0{,}2 \\ 0 & 1 & 1 & 0{,}35 \\ 0{,}4 & 1 & 0{,}8 & 1 \end{bmatrix}, R_1^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0{,}6 & 1 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

No Passo 1, o nível de incomparabilidade para cada julgamento é calculado conforme mostra a Tabela 2. O decisor definiu o nível máximo de incomparabilidade como J_{max}=0,3, que na escala da Tabela 1 corresponde a "*Pouco Incomparável*".

No Passo 2, o decisor subjetivamente determinou os pesos $\lambda_1^1 = 0{,}3$, $\lambda_1^2 = 0{,}2$, $\lambda_1^3 = \lambda_1^4 = \lambda_1^5 = 0{,}167$, às matrizes dos pesos dos julgamentos de cada especialista são dadas por:

$$w_1^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}158 & 0{,}233 & 0{,}159 \\ 0{,}158 & 1 & 0{,}175 & 0 \\ 0{,}233 & 0{,}175 & 1 & 0 \\ 0{,}159 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, w_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}130 & 0 & 0{,}184 \\ 0{,}130 & 1 & 0{,}200 & 0{,}167 \\ 0 & 0{,}200 & 1 & 0 \\ 0{,}184 & 0{,}167 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$w_1^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}191 & 0{,}278 & 0{,}192 \\ 0{,}191 & 1 & 0{,}209 & 0 \\ 0{,}278 & 0{,}209 & 1 & 0 \\ 0{,}192 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, w_1^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}191 & 0{,}278 & 0{,}125 \\ 0{,}191 & 1 & 0{,}208 & 0{,}348 \\ 0{,}278 & 0{,}208 & 1 & 1 \\ 0{,}125 & 0{,}348 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$w_1^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}191 & 0{,}278 & 0{,}192 \\ 0{,}191 & 1 & 0{,}208 & 0{,}339 \\ 0{,}278 & 0{,}208 & 1 & 0 \\ 0{,}192 & 0{,}339 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(21)

No Passo 3, aplicando-se o operador de agregação média aritmética ponderada com os pesos calculados no Passo 2, é obtida a seguinte relação de preferência *fuzzy* para o grupo:

$$R_1^C = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}970 & 1 & 0{,}971 \\ 0{,}076 & 1 & 1 & 0{,}275 \\ 0 & 1 & 1 & 0{,}350 \\ 0{,}912 & 0{,}924 & 0{,}800 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (22)$$

Para efeito de comparação, a Tabela 3 apresenta o nível médio de discordância para cada especialista e o nível de consenso levando em conta as relações de preferência *fuzzy* calculadas para o grupo segundo diferentes abordagens:

• média aritmética ponderada implementada conforme abordagem tradicionalmente utilizada, ou seja, sem avaliar o nível de incomparabilidade dos julgamentos e adotando para os pesos apenas os componentes determinados subjetivamente pelo decisor:

$$R_1^{C*} = \lambda_1^1 R_1^1 + \lambda_1^2 R_1^2 + \lambda_1^3 R_1^3 + \lambda_1^4 R_1^4 + \lambda_1^5 R_1^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}940 & 0{,}820 & 0{,}965 \\ 0{,}150 & 1 & 1 & 0{,}335 \\ 0{,}210 & 1 & 1 & 0{,}211 \\ 0{,}895 & 0{,}757 & 0{,}490 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (23)$$

• média aritmética ponderada, sendo os pesos determinados subjetivamente pelo decisor, mas excluindo os julgamentos com nível inaceitável de incomparabilidade:

$$R_1^{C**}(X_k, X_l) = \sum_{y=1}^{v} \lambda_1^y R_1^y (X_k, X_l), = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}940 & 1 & 0{,}965 \\ 0{,}150 & 1 & 1 & 0{,}515 \\ 0 & 1 & 1 & 0{,}350 \\ 0{,}895 & 0{,}815 & 0{,}8 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (24)$$

É importante indicar que o cálculo da matriz (24) exige uma normalização dos pesos λ_p^y, y=1,2,...,v para cada julgamento. A exclusão da contribuição de um ou mais especialistas, cujos julgamentos possuem níveis inaceitáveis de incomparabilidade, exige que os especialistas restantes tenham seus pesos alterados de modo que o somatório de seus pesos permaneça sendo igual a 1. Analisando os dados expostos na Tabela 3, é possível notar que o nível de consenso sobre R_1^C foi superior aos demais. É válido indicar que no caso de R_1^{C*}, o nível de consenso foi obtido conforme a expressão (10), de tal modo que os julgamentos com nível inaceitável de comparabilidade foram excluídos também do cálculo.

No Passo 4, verificou-se que R_1^C satisfaz a transitividade fraca, não sendo portanto necessário corrigi-la (é possível verificar que R_1^{C*} e R_1^{C**} também satisfazem a transitividade fraca). Uma maneira simples proposta por Orlovsky (1981) para fazer esse teste consiste em processar a relação de preferência *fuzzy* e obter o nível de não-dominância de cada alternativa por meio das expressões (15) e (16). Se pelo menos uma alternativa satisfaz $ND_p(X_k) = 1$, então a relação de preferência *fuzzy* satisfaz a transitividade fraca.

No Passo 5, o nível de consenso associado à relação de preferência *fuzzy* coletiva foi considerado satisfatório. Portanto, não foi necessário fazer novo ajuste dos pesos. Dando continuidade ao processo de solução do problema de decisão, será assumido que um procedimento similar ao utilizado para gerar a matriz (22) foi utilizado para os demais critérios, gerando as seguintes matrizes de comparações coletivas para os critérios C_2 e C_3:

$$R_2^C = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}30 & 0{,}2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0{,}67 & 1 & 1 \\ 0{,}74 & 0{,}08 & 0{,}35 & 1 \end{bmatrix}, \tag{25}$$

$$R_3^C = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}94 & 0{,}5 & 0{,}21 \\ 0{,}86 & 1 & 0{,}57 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0{,}55 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{26}$$

A Tabela 4 apresenta os níveis de não-dominância obtidos pelo processamento dos conjuntos de relações de preferência $R^C = \{R_1^C, R_2^C, R_3^C\}$, $R^{C*} = \{R_1^{C*}, R_2^C, R_3^C\}$ e $R^{C**} = \{R_1^{C**}, R_2^C, R_3^C\}$ pela aplicação da expressão (20), seguida de (16), (17) e (18). É importante notar que no exemplo considerado, o processamento dos diferentes conjuntos de relações de preferência levou a diferentes ordenações das alternativas. Embora X_4 tenha permanecido na primeira posição e X_1 tenha permanecido na última posição, as posições de X_2 e X_3 variaram.

Tabela 2. Nível de incomparabilidade de cada julgamento.

	E_1^1	E_1^2	E_1^3	E_1^4	E_1^5
(X_1, X_2) e (X_2, X_1)	0	0,20	0	0	0
(X_1, X_3) e (X_3, X_1)	0	0,30	0	0	0
(X_1, X_4) e (X_4, X_1)	0	0	0	0,20	0
(X_2, X_3) e (X_3, X_2)	0	0	0	0	0
(X_2, X_4) e (X_4, X_2)	0,40	0	0,30	0	0
(X_3, X_4) e (X_4, X_3)	0,35	0,50	0,35	0,20	0,40

Tabela 3. Discordância e consenso.

	R_1^C	R_1^{C*}	R_1^{C**}
$Dm_1^{1,C}$	0,026	0,092	0,044
$Dm_1^{2,C}$	0,221	0,181	0,166
$Dm_1^{3,C}$	0,026	0,093	0,044

$Dm_1^{4,C}$	0,077	0,174	0,114
$Dm_1^{5,C}$	0,031	0,073	0,058
$Cons_1$	0,924	0,877	0,915

Tabela 4. Níveis de não-dominância

	$ND(X_1)$	$ND(X_2)$	$ND(X_3)$	$ND(X_4)$
R^C	0,47	0,77	0,80	1
R^{C*}	0,47	0,85	0,86	1
R^{C**}	0,47	0,85	0,80	1

7. Conclusões

Foi proposto neste trabalho um procedimento para tomada de decisão multicritério em grupo cujo ambiente apresenta uma estrutura hierárquica, havendo a participação de um único decisor (pessoa responsável pela decisão) e de vários especialistas convidados a contribuir informando suas preferências. O procedimento proposto faz uso de vários índices para orientar o processamento das relações de preferência individuais, permite aos especialistas expressarem dúvidas, permite ao decisor desconsiderar julgamentos com um nível inaceitável de dúvidas e privilegia julgamentos concordantes em favor de um maior nível de consenso. Uma importante contribuição deste procedimento corresponde ao uso do índice de incomparabilidade que permite ao decisor distinguir julgamentos confiáveis e duvidosos e dar a cada tipo de julgamento um tratamento adequado.O resultado tem ampla aplicabilidade, pois pode ser utilizado com outros métodos de decisão multicritério baseados em relações de preferências *fuzzy* e pode ser usado para apoiar decisões em grupo de diferentes áreas.

Agradecimentos

Esta pesquisa foi financiada pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) – PQ: 307474/2008-9, PQ: 307406/2008-3.

Referências

Ben-Arieh, D. e Chen, Z. (2006), Linguistic-labels aggregation and consensus measure for autocratic decision making using group recommendations, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics – Part A: Systems and Humans*, 36, 558-568.

Fodor J.C., e Roubens M., *Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support*, Kluwer, Boston, 1994.

Herrera-Viedma, E., Alonso, S., Chiclana, F. e Herrera, F. (2007), A consensus model for group decision making with incomplete fuzzy preference relations, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15, 863–877

Herrera-Viedma, E., Herrera, F. e Chiclana, F. (2002), A consensus model for multiperson decision making with different preference structures, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics – Part A: Systems and Humans*, 32, 394-402.

Herrera-Viedma, E., Herrera, F., Chiclana, F. e Luque M. (2004), Some issues on consistency of fuzzy preference relations, *European Journal of Operational Research*, 154, 394-402.

Hsu, H.M. e Chen, C.T. (1996), Aggregation of fuzzy opinions under group decision making, *Fuzzy Sets and Systems*, 79, 279-285.

Ma, J., Fan, Z.P., Jiang, Y. P., Mao, J.Y. e Ma, L. (2006), A method for repairing the inconsistency of fuzzy preference relations, *Fuzzy Sets and Systems*, 157, 20-33.

Ngwenyama, O.K., Bryson, N. e Mobolurin, A. (1996), Supporting facilitation in group support systems: techniques for analyzing consensus relevant data, **Decision Support Systems**, 16, 155-168.

Orlovsky, S.A. (1978), Decision making with a fuzzy preference relation, *Fuzzy Sets and Systems*, 1, 155-167.
Orlovsky S.A., *Problems of Decision Making with Fuzzy Information* (em russo), Nauka, Moscow, 1981.
Parreiras, R., Ekel, P., Martini, J.S.C., e Palhares, R.M. (2010), A flexible consensus scheme for multicriteria group decision making under linguistic assessments, *Information Sciences*, 180, 1075-1089.
Pedrycz, W., Ekel, P. e Parreiras, R., *Fuzzy Multicriteria Decision-Making: Models, Methods, and Applications*, John Wiley & Sons, Chichester, 2011.
Saaty, T., *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw Hill, New York, 1980.
Sengupta, K. (1998), Fuzzy preference and Orlovsky choice procedure, *Fuzzy Sets and Systems*, 93, 1998, 231-234.