O Teorema de Helly Colorido e Hipergrafos Gerais

Rommel Melgaço Barbosa

Instituto de Informática
UFG, Goiânia–GO, Brasil
rommel@inf.ufg.br

Erika Morais Martins Coelho

COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro–RJ, Brasil
INF/UFG, Goiânia–GO, Brasil
erikamorais@inf.ufg.br

Mitre Costa Dourado

NCE e IM
UFRJ, Rio de Janeiro–RJ, Brasil
mitre@nce.ufrj.br

Jayme Luiz Szwarcfiter

NCE, IM e COPPE
UFRJ, Rio de Janeiro–RJ, Brasil
jayme@nce.ufrj.br

Resumo

A definição da propriedade de Helly para hipergrafos foi motivada pelo teorema de Helly para conjuntos convexos. Do mesmo modo, nós definimos a propriedade de Helly colorido para uma família de hipergrafos, motivados pelo teorema de Helly colorido para coleções de conjuntos convexos, por Lovász. Descrevemos alguns fatos gerais sobre a propriedade de Helly colorido e provamos resultados de complexidade. Em particular, mostramos que é co-NP-completo decidir se uma família de p hipergrafos é Helly colorido, mesmo se $p = 2$. No entanto, para qualquer p fixo, descrevemos um algoritmo polinomial para decidir se tal família é Helly colorido, quando $p - 1$ dos hipergrafos são p-Helly.

Palavras-Chave: propriedade de Helly colorido, complexidade computacional, propriedade de Helly.

Abstract

The definition of the Helly property for hypergraphs was motivated by Helly's theorem for convex sets. Similarly, we define the colorful Helly property for a family of hypergraphs, motivated by the colorful Helly theorem for collections of convex sets, by Lovász. We describe some general facts about the colorful Helly property and prove complexity results. In particular, we show that it is Co-NP-complete to decide if a family of p hypergraphs is colorful Helly, even if $p = 2$. However, for any fixed p, we describe a polynomial time algorithm to decide if such family is colorful Helly, provided at least $p - 1$ of the hypergraphs are p-Helly.

Keywords: colorful Helly property, computational complexity, Helly property.

1 Introdução

Eduard Helly publicou, Helly (1923), um teorema célebre que afirma que dado um espaço Euclidiano d-dimensional, se em uma coleção finita de $n > d$ conjuntos convexos qualquer $d+1$ conjuntos tiverem um ponto em comum, então existe um ponto comum a todos os conjuntos da coleção. Este teorema motivou a definição da propriedade p-Helly para hipergrafos.

Um *hipergrafo* $\mathcal{H}$ é um par ordenado $(V(\mathcal{H}), E(\mathcal{H}))$ onde $V(\mathcal{H}) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é um conjunto finito de *vértices* e $E(\mathcal{H}) = \{E_1, \ldots, E_m\}$ é um conjunto não vazio de *hiperarestas* $E_i \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$, para $i = 1, \ldots, m$. Assumiremos em todo o texto que para um hipergrafo $\mathcal{H}$, $V(\mathcal{H}) = \bigcup_{E_i \in E(\mathcal{H})} E_i$. Um *hipergrafo parcial* de $\mathcal{H}$ é um hipergrafo formado por um subconjunto de hiperarestas de $\mathcal{H}$; e um hipergrafo $\mathcal{H}'$ é um *subhipergrafo* de $\mathcal{H}$ *induzido por* $V' \subseteq V(\mathcal{H})$ se $V(\mathcal{H}') = V'$ e suas hiperarestas são $\{E_i \in E(\mathcal{H}) | E_i \cap V' \neq \emptyset, 1 \leq i \leq m\}$. O *núcleo* de $\mathcal{H}$ é definido como $nuc(\mathcal{H}) = E_1 \cap \ldots \cap E_m$.

Dizemos que $\mathcal{H}$ é *p-intersectante* se todo hipergrafo parcial de $\mathcal{H}$, consistindo de no máximo p hiperarestas, tem núcleo não vazio. Finalmente, dizemos que um hipergrafo é *p-Helly* se todo hipergrafo parcial p-intersectante de $\mathcal{H}$ tem núcleo não vazio. Por simplicidade, empregaremos os termos *intersectante* e *hipergrafo Helly* significando 2-intersectante e hipergrafo 2-Helly, respectivamente.

Claramente o teorema de Helly para conjuntos convexos não segue para hipergrafos gerais. Por exemplo, o hipergrafo onde $E(\mathcal{H}) = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$ é 2-intersectante, mas $nuc(\mathcal{H}) = \emptyset$.

O teorema de Lovász, *the Colorful Helly Theorem*, é uma generalização do teorema de Helly.

Teorema 1.1 (Lovász). **Bárány (1982), Lovász (1974)**: *Considere* $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{d+1}$ $d+1$ *coleções finitas de conjuntos convexos em* $\mathbb{R}^d$. *Se* $\bigcap_{i=1}^{d+1} F_i \neq \emptyset$ *para todas as escolhas de* $F_1 \in \mathcal{F}_1, \ldots, F_{d+1} \in \mathcal{F}_{d+1}$, *então* $\bigcap_{F \in \mathcal{F}_i} F \neq \emptyset$ *para algum* $1 \leq i \leq d+1$.

Como a propriedade p-Helly para hipergrafos foi motivada pelo teorema de Helly, utilizamos o teorema de Lovász como uma motivação para definir a propriedade de Helly colorido para hipergrafos. Utilizaremos a seguinte notação.

Considere uma família $\mathcal{F} = \{\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_p\}$ de hipergrafos $\mathcal{H}_i$. Um hipergrafo $\mathcal{H}'$ é um *hipergrafo representativo* de $\mathcal{F}$ se ele contém uma hiperaresta de cada hipergrafo de $\mathcal{F}$. Isto é, $E(\mathcal{H}') = \{E_1, \ldots, E_p\}$, para $E_i \in E(\mathcal{H}_i)$, $i = 1, \ldots, p$. Denote por $|\mathcal{F}|$ o número de hipergrafos na família $\mathcal{F}$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é *fortemente intersectante* se $nuc(\mathcal{H}') \neq \emptyset$, para todo hipergrafo representativo $\mathcal{H}'$ de $\mathcal{F}$. Uma *subfamília* de $\mathcal{F} = \{\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_p\}$ é uma família $\mathcal{F}' = \{\mathcal{H}'_1, \ldots, \mathcal{H}'_p\}$ onde $\emptyset \subsetneq \mathcal{H}'_i \subseteq \mathcal{H}_i$, $i = 1, \ldots, p$. Finalmente, dizemos que $\mathcal{F}$ satisfaz à *propriedade de Helly colorido* (ou é *Helly colorido*) se toda subfamília fortemente intersectante $\mathcal{F}' = \{\mathcal{H}'_1, \ldots, \mathcal{H}'_p\}$ de $\mathcal{F}$ contém um hipergrafo $\mathcal{H}'_i$ tal que $nuc(\mathcal{H}'_i) \neq \emptyset$, para algum $1 \leq i \leq p$.

Observe que, similar ao teorema de Helly, o teorema de Lovász para coleções de conjuntos convexos não segue para famílias de hipergrafos. Por exemplo, considere os hipergrafos $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ onde $E(\mathcal{H}_1) = E(\mathcal{H}_2) = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$. Note que $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ para todas as escolhas de $E_1 \in E(\mathcal{H}_1)$ e $E_2 \in E(\mathcal{H}_2)$, mas $nuc(\mathcal{H}_1) = nuc(\mathcal{H}_2) = \emptyset$.

O teorema de Helly tem sido objeto de estudos em vários tópicos de teoria de grafos, Duchet and Meyniel (1983), Tuza (1993) e tem aplicações em várias áreas, Bretto et al. (2002), Fagin (1983). Existem muitas extensões e generalizações da propriedade de Helly.

De modo similar, o teorema de Lovász tem sido generalizado e estudado em algumas formas diferentes. Veja em Bárány (1982), Bárány and Onn (1997).

O teorema de Helly colorido é equivalente ao teorema de Helly se todas as coleções de conjuntos convexos são idênticas. Consequentemente o teorema de Lovász é uma generalização do teorema de Helly. Apresentamos, na Seção 2, um exemplo simples que o mesmo não ocorre para hipergrafos, no sentido que se todos os p hipergrafos são os mesmos então a propriedade de Helly colorido não é necessariamente equivalente a propriedade de p-Helly.

Neste trabalho, descrevemos resultados de complexidade relacionados a propriedade de Helly colorido, para hipergrafos. Nós consideramos o seguinte problema:

Problema 1.2. (Helly Colorido) *Seja p um inteiro positivo. Dada uma família de hipergrafos $\mathcal{F} = \{\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_p\}$, decidir se $\mathcal{F}$ satisfaz à propriedade de Helly colorido.*

Lembramos que existe um algoritmo polinomial para decidir se um hipergrafo satisfaz à propriedade de Helly, veja Berge (1970), Gilmore (1962). Além disso, para um inteiro fixo, $p \geq 2$, existe um algoritmo polinomial para decidir se um hipergrafo satisfaz à propriedade de p-Helly colorido, Berge and Duchet (1975), Dourado et al. (2008). No entanto, mostramos que decidir se $\mathcal{F} = \{\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_p\}$ satisfaz à propriedade de Helly colorido, para $p \geq 2$ fixo, é Co-NP-completo. Contudo, para qualquer p fixo, apresentamos um algoritmo polinomial para decidir se $\mathcal{F}$ satisfaz à propriedade de Helly colorido, quando $p-1$ dos hipergrafos de $\mathcal{F}$ são p-Helly. Um survey sobre aspectos de complexidade da propriedade de Helly pode ser encontrado em Dourado et al. (2009).

Na Seção 2 mostramos uma representação, através de grafos, da propriedade de Helly quando $|\mathcal{F}| = 2$. Na Seção 3, descrevemos resultados da propriedade de Helly colorido relacionados com a propriedade de Helly. Uma discussão sobre resultados de NP-completude para o problema de Helly Colorido segue na Seção 4, enquanto que caracterizações e algoritmos estão na Seção 5.

Um resumo estendido contendo resultados parciais deste artigo pode ser encontrado em Barbosa et al. (2009).

Concluímos esta seção fornecendo algumas definições usuais. Um hipergrafo $\mathcal{H}$ é *r-uniforme* quando toda hiperaresta de $\mathcal{H}$ contém exatamente r vértices. Um *grafo* é um hipergrafo 2-uniforme. Uma hiperaresta de um grafo G é chamada de *aresta*. Um *conjunto completo* (*conjunto independente*) é um subconjunto de vértices dois a dois adjacentes (não adjacentes). Uma *clique* de G é um conjunto completo maximal. Um *conjunto bipartido* é um subconjunto $B \subseteq V(G)$, que pode ser particionado em $B = V_1 \cup V_2$, onde V_1, V_2 são conjuntos independentes não vazios. Se todo vértice de V_1 é adjacente a todo vértice de V_2, então B é um *conjunto bipartido completo*. Uma *biclique* é um conjunto bipartido completo maximal.

2 A propriedade de Helly colorido quando $|\mathcal{F}| = 2$

Quando $|\mathcal{F}| = 2$, $\mathcal{F} = \{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\}$, podemos representar o Problema 1.2 através de grafos bipartidos. Considere $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ sendo as duas partições de um grafo bipartido G. Cada elemento de $E(\mathcal{H}_1)$ e $E(\mathcal{H}_2)$ representará um vértice do grafo, isto é $V(G) = \{E(\mathcal{H}_1) \cup E(\mathcal{H}_2)\}$. Haverá aresta entre vértices de partições diferentes se houver elemento comum aos conjuntos que eles representam, ou seja, $E(G) = \{(S_i, S_j) : S_i \in E(\mathcal{H}_1),\ S_j \in E(\mathcal{H}_2)$ e $S_i \cap S_j \neq \emptyset\}$. Na Figura 1 (a) observamos uma coleção $\mathcal{F} = \{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\}$ e na mesma figura parte (b) o grafo bipartido correspondente a coleção $\mathcal{F}$.

Note que, toda subfamília fortemente intersectante de uma coleção $\mathcal{F} = \{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\}$ é um conjunto bipartido completo do grafo $G = (E(\mathcal{H}_1), E(\mathcal{H}_2), E)$. Desta forma, um grafo

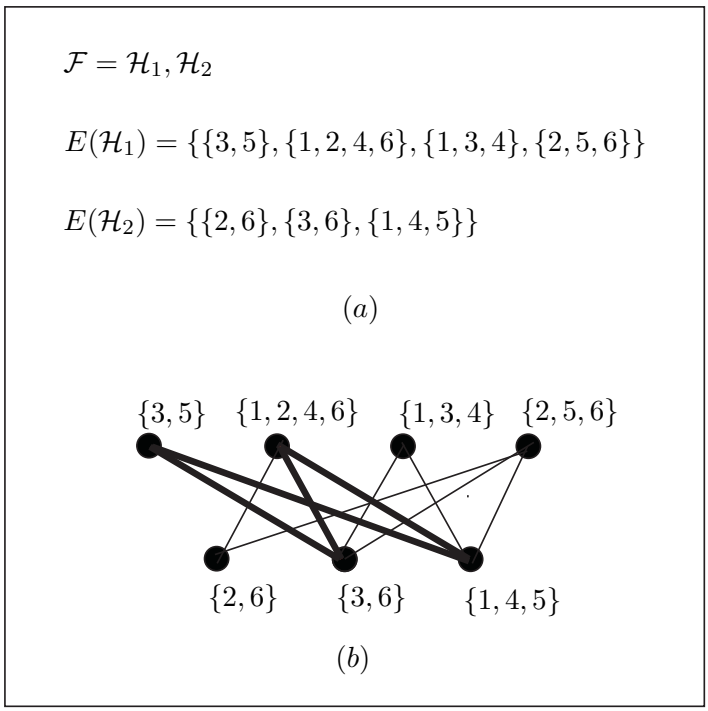

Figura 1: Exemplo de representação do problema de Helly colorido com $|\mathcal{F}| = 2$ através de grafos.

bipartido G é Helly colorido se todo conjunto bipartido completo de G, $(\mathcal{H}'_1, \mathcal{H}'_2)$, onde $\mathcal{H}'_1 \subseteq \mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}'_2 \subseteq \mathcal{H}_2$, satisfizer ou $nuc(\mathcal{H}'_1) \neq \emptyset$ ou $nuc(\mathcal{H}'_2) \neq \emptyset$. O grafo bipartido da Figura 1 não é Helly colorido pois, existe uma biclique $(\mathcal{H}'_1, \mathcal{H}'_2)$ onde $nuc(\mathcal{H}'_1) = nuc(\mathcal{H}'_2) = \emptyset$, para $\mathcal{H}'_1 = \{\{3,5\},\{1,2,4,6\}\}$ e $\mathcal{H}'_2 = \{\{3,6\},\{1,4,5\}\}$.

3 Propriedade de Helly e propriedade de Helly colorido

Nesta seção, primeiro observamos que a propriedade de Helly colorido não é equivalente a propriedade de Helly quando todos os hipergrafos são idênticos, mesmo para famílias de tamanho 2. Considere o seguinte exemplo. Seja $\mathcal{F} = \{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\}$ com $E(\mathcal{H}_1) = E(\mathcal{H}_2) = \{\{a,b\},\{c,d\},\{a,c\},\{b,d\}\}$ e observe que $\mathcal{H}_1$ satisfaz à propriedade de Helly. Considere a subfamília $\mathcal{F}' = \{\mathcal{H}'_1, \mathcal{H}'_2\}$ onde $E(\mathcal{H}'_1) = \{\{a,b\},\{c,d\}\}$ e $E(\mathcal{H}'_2) = \{\{a,c\},\{b,d\}\}$ e note que $\mathcal{F}'$ é uma subfamília fortemente intersectante de $\mathcal{F}$. Porém $nuc(\mathcal{H}'_1) = nuc(\mathcal{H}'_2) = \emptyset$ implicando que $\mathcal{F} = \{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\}$ não satisfaz à propriedade de Helly colorido.

Porém, o inverso segue. Mais genericamente, se uma família de p hipergrafos idênticos $\mathcal{H}$ é Helly colorido, então $\mathcal{H}$ é p-Helly. De fato, podemos fazer a seguinte afirmação:

Proposição 3.1. *Seja $\mathcal{F} = \{\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_p\}$, com $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_i$, $i = 2, \ldots, p$. Se $\mathcal{F}$ é Helly colorido, então $\mathcal{H}_1$ é p-Helly.*

Demonstração. Provaremos a versão contrapositiva. Se $\mathcal{H}_1$ não é p-Helly, então existe algum hipergrafo parcial p-intersectante $A_1 \subseteq \mathcal{H}_1$ com $nuc(A_1) = \emptyset$. Tome $A_i \subseteq \mathcal{H}_i$ com $A_i = A_1$, $i = 2, \ldots, p$. Uma vez que A_1 é um hipergrafo p-intersectante, $\mathcal{F}$ contém uma subfamília fortemente intersectante $\mathcal{F}' = \{A_1, A_2, \ldots, A_p\}$, com $nuc(A_1) = \ldots = nuc(A_p) = \emptyset$. Portanto $\mathcal{F}$ não é Helly colorido. □

Agora, discutiremos sobre o efeito de remover um hipergrafo de uma dada família de hipergrafos. Observe que se um hipergrafo é p-Helly, então ele é $(p+1)$-Helly, isto é, se um hipergrafo não é p-Helly, então ele não é $(p-1)$-Helly. Uma afirmação relacionada segue para a propriedade de Helly colorido.

Proposição 3.2. *Seja $p \geq 2$, $\mathcal{F} = \{\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_p\}$, e $\hat{\mathcal{F}} = \{\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_{p-1}\}$. Se $\mathcal{F}$ não é Helly colorido, então $\hat{\mathcal{F}}$ não é Helly colorido.*

Demonstração. Se $\mathcal{F}$ não é Helly colorido, então $\mathcal{F}$ contém alguma subfamília fortemente intersectante $\{\mathcal{H}'_1, \ldots, \mathcal{H}'_p\}$, com $nuc(\mathcal{H}'_1) = \ldots = nuc(\mathcal{H}'_p) = \emptyset$. Então $\{\mathcal{H}'_1, \ldots, \mathcal{H}'_{p-1}\}$ é um subfamília fortemente intersectante de $\hat{\mathcal{F}}$ com $nuc(\mathcal{H}'_1) = \ldots = nuc(\mathcal{H}'_{p-1}) = \emptyset$. Logo, $\hat{\mathcal{F}}$ não é Helly colorido. □

4 Resultados de NP-Completude

Nesta seção, mostramos que decidir se uma família de p hipergrafos é Helly colorido é Co-NP-completo, para qualquer $p \geq 2$ fixo, mesmo quando no máximo $p-2$ destes hipergrafos são p-Helly.

Primeiro, considere $p = 2$ e seja a seguinte generalização da propriedade de Helly. Para que um hipergrafo $\mathcal{H}$ satisfaça a propriedade (irrestrita) de Helly, é necessário verificar o núcleo de todo hipergrafo parcial intersectante de $\mathcal{H}$. Suponha que essa dependência seja restrita a alguns hipergrafos parciais intersectantes pertencentes a uma dada lista. Porém, a lista será representada como segue. Defina um grafo G qualquer com vértices associados as hiperarestas de um hipergrafo $\mathcal{H}$. Conjuntos completos em G corresponderão aos hipergrafos parciais intersectantes que formarão a lista. Então, dizemos que $\mathcal{H}$ é *Helly relaxado relativo a* G se para todo hipergrafo parcial intersectante $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ tal que, os vértices de G associados as hiperarestas de $\mathcal{H}'$ induzem um conjunto completo, satisfaz $nuc(\mathcal{H}') \neq \emptyset$. Como ilustração, considere o hipergrafo $\mathcal{H}$, com hiperarestas $E_1 = \{1, 2\}$, $E_2 = \{2, 3\}$ e $E_3 = \{1, 3\}$, da Figura 2. Observe que $\mathcal{H}$ não satisfaz à propriedade de Helly colorido mas, $\mathcal{H}$ é Helly relaxado relativo à G.

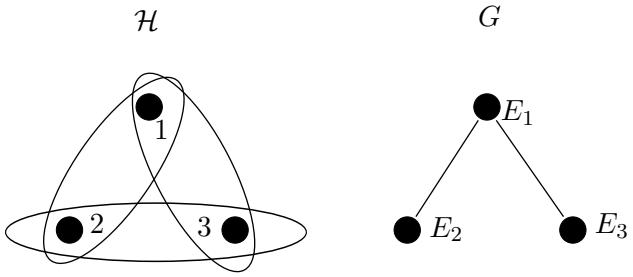

Figura 2: Exemplo de um hipergrafo $\mathcal{H}$ Helly relaxado relativo a G.

Problema 4.1. (Hipergrafo Helly Relaxado). *Dado um hipergrafo $\mathcal{H}$ e um grafo G com vértices associados as hiperarestas de $\mathcal{H}$, decidir se $\mathcal{H}$ é Helly relaxado relativo a G.*

O problema Hipergrafo Helly Relaxado é co-NP-completo, Dourado et al. (2006, 2009). Agora, consideremos o caso $p = 2$ do Problema 1.2.

Teorema 4.2. Helly colorido *com $|\mathcal{F}| = 2$ é Co-NP-completo.*

Demonstração. Considere uma família $\mathcal{F} = \{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\}$, onde $\mathcal{H}_1 = \{S_1, \ldots, S_m\}$ e $\mathcal{H}_2 = \{S'_1, \ldots, S'_{m'}\}$. Um par de conjuntos (A, B), onde $A \subseteq \{1, \ldots, m\}, B \subseteq \{1, \ldots, m'\}$, é um

certificado que este problema pertence a Co-NP se estes conjuntos definem uma subfamília de $\mathcal{F}$ que pode ser verificada em tempo polinomial se é fortemente intersectante e se tem $nuc(\mathcal{H}'_1) = nuc(\mathcal{H}'_2) = \emptyset$.

A prova de completude usa uma redução do HIPERGRAFO HELLY RELAXADO. Dado um hipergrafo $\mathcal{H}$ e um grafo G com vértices associados as hiperarestas $E(\mathcal{H}) = \{S_1, \ldots, S_m\}$, construa uma família $\mathcal{F} = \{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\}$ como segue.

- Para cada $S_i \in E(\mathcal{H})$ faça
  - Crie uma hiperaresta $S'_i = S_i \cup \{a_i, b_i\}$ em $\mathcal{H}_1$, com dois novos vértices a_i e b_i;
  - Crie uma hiperaresta $S''_i = \{b_i\}$ em $\mathcal{H}_2$;
- Para cada aresta S_iS_j de G tal que $S_i \cap S_j \neq \emptyset$ faça
  - Adicione a_i a S''_j e a_j a S''_i em $\mathcal{H}_2$.

A Figura 3 mostra uma redução de um hipergrafo $\mathcal{H}$ e um grafo G, em uma coleção $\mathcal{F} = \{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\}$. Vamos mostrar que $\mathcal{H}$ é Helly relaxado relativo a G se e somente se $\mathcal{F}$ é Helly colorido.

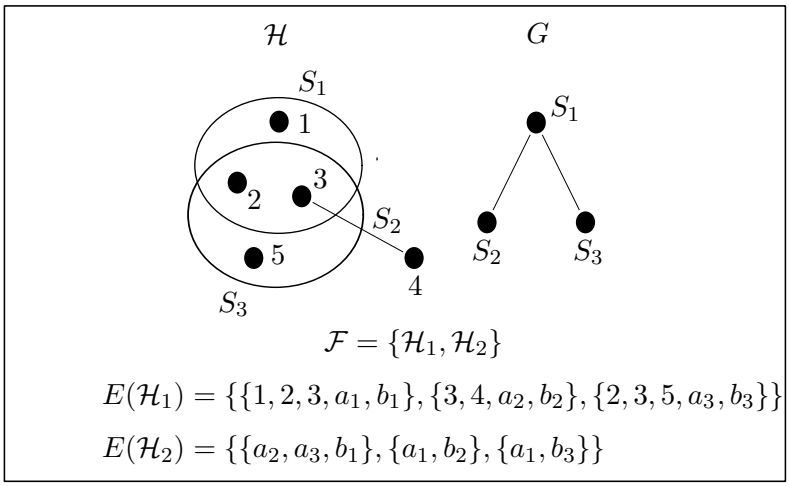

Figura 3: Redução de $\mathcal{H}$ e G em $\mathcal{F} = \{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\}$.

Suponha primeiro que $\mathcal{H}$ não seja Helly relaxado relativo a G. Seja $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ um hipergrafo parcial intersectante de $\mathcal{H}$ com núcleo vazio, tal que, os vértices de G associados as hiperarestas de $\mathcal{H}'$ induzem um conjunto completo. Podemos assumir que $\mathcal{H}'$ é maximal. É claro que $|\mathcal{H}'| \geq 3$. Considere $\mathcal{F}' = \{\mathcal{H}'_1, \mathcal{H}'_2\}$ tal que $S'_i \in E(\mathcal{H}'_1)$ se $S_i \in E(\mathcal{H}')$, e $S''_i \in E(\mathcal{H}'_2)$ se $S_i \in E(\mathcal{H}')$. Pela construção, é fácil ver que $\mathcal{F}'$ é uma subfamília fortemente intersectante de $\mathcal{F}$ e que $nuc(\mathcal{H}'_1) = \emptyset$. O núcleo de $\mathcal{H}'_2$ também é vazio porque se tiver algum $v \in nuc(\mathcal{H}'_2)$, então $v = a_j$, para algum $S''_j \notin \mathcal{H}'_2$. O último implica que $\mathcal{H}' \cup \{S_j\}$ é um hipergrafo parcial intersectante $\mathcal{H}$ com núcleo vazio, tal que, os vértices correspondentes a G induzem um conjunto completo. Este hipergrafo contém $\mathcal{H}'$, que é uma contradição.

Reciprocamente, suponha que $\mathcal{F} = \{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\}$ não é Helly colorido. Então existe uma subfamília fortemente intersectante $\mathcal{F}' = \{\mathcal{H}'_1, \mathcal{H}'_2\}$ de $\mathcal{F}$ tal que, $nuc(\mathcal{H}'_1) = nuc(\mathcal{H}'_2) = \emptyset$. Defina $\mathcal{H}' = \{S_i : S'_i \in E(\mathcal{H}'_1)\}$. Pela construção, para toda $S'_i \in E(\mathcal{H}'_1)$, a hiperaresta correspondente S''_i de $\mathcal{H}_2$ também pertence a $E(\mathcal{H}'_2)$, caso contrário $a_i \in nuc(\mathcal{H}'_2)$. Isto implica que os vértices de G associados as hiperarestas de $\mathcal{H}'$ formam um conjunto completo

em G e $\mathcal{H}'$ é um hipergrafo intersectante. Uma vez que $\mathcal{H}'$ pode ser visto como um sub-hipergrafo induzido de $\mathcal{H}'_1$ com o mesmo número de hiperarestas, seu núcleo está contido no núcleo de $\mathcal{H}'_1$. Então $nuc(\mathcal{H}') = \emptyset$ e $|\mathcal{H}'| \geq 3$. Portanto $\mathcal{H}'$ não é Helly relaxado relativo a G. □

Finalmente, considere qualquer $p > 2$ fixo.

Teorema 4.3. HELLY COLORIDO *com* $|\mathcal{F}| = p$ *é Co-NP-completo, para qualquer* $p > 2$ *fixo.*

Demonstração. O problema está em Co-NP por um argumento similar ao usado na prova do Teorema 4.2. A prova de completude usa uma redução do HELLY COLORIDO com $|\mathcal{F}| = 2$. Dada uma família $\mathcal{F} = \{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\}$, construa uma família $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_p\}$, com cada $\mathcal{E}_i$ sendo um hipergrafo, como segue.

- Inicialmente, faça $\mathcal{E}_1 = \mathcal{H}_1$, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{H}_2$, e $\mathcal{E}_i = \{S_{i,1}, S_{i,2}\}$, para $3 \leq i \leq p$, onde $S_{i,1} = S_{i,2} = \emptyset$;
- Para cada par de hiperarestas $S_i \in E(\mathcal{H}_1)$ e $S_j \in E(\mathcal{H}_2)$ tal que $S_i \cap S_j \neq \emptyset$ faça
  - Crie um conjunto X_{ij} com 2^{p-2} *novos* vértices, ou seja, vértices distintos daqueles contidos em $\mathcal{E}$;
  - Adicione todos os vértices de X_{ij} a cada hiperaresta correspondente $S_i \in E(\mathcal{E}_1)$ e $S_j \in E(\mathcal{E}_2)$;
  - Adicione um vértice distinto de X_{ij} a todas $p-2$ hiperarestas de cada 2^{p-2} hipergrafos representativos da família $\{\mathcal{E}_3, \ldots, \mathcal{E}_p\}$.

Uma vez que p é fixo e o número de conjuntos X_{ij} é no máximo $m_1 m_2$, onde $m_1 = |\mathcal{H}_1|$ e $m_2 = |\mathcal{H}_2|$, a redução pode ser feita em tempo polinomial no tamanho da entrada $\mathcal{F}$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que pelo menos um X_{ij} é criado. Então a construção não termina com conjuntos vazios, como requerido na definição de hipergrafo. A Figura 4 mostra uma redução de uma família $\mathcal{F} = \{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\}$ em uma família $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4\}$, com cada $\mathcal{E}_i$ sendo um hipergrafo. Provaremos que $\mathcal{F}$ é Helly colorido se e somente se $\mathcal{E}$ é Helly colorido.

$\mathcal{F} = \{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\}$

$E(\mathcal{H}_1) = \{\{1,3,5\},\{2,3,4,7\}\}$
$E(\mathcal{H}_2) = \{\{3,4\},\{2,5\}\}$

$\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$

$\mathcal{E}_1 = \{\{1,3,5,a_1,b_1,c_1,d_1,a_2,b_2,c_2,d_2\},\{2,3,4,7,a_3,b_3,c_3,d_3,a_4,b_4,c_4,d_4\}\}$
$\mathcal{E}_2 = \{\{3,4,a_1,b_1,c_1,d_1,a_3,b_3,c_3,d_3\},\{2,5,a_2,b_2,c_2,d_2,a_4,b_4,c_4,d_4\}\}$
$\mathcal{E}_3 = \{\{a_1,a_2,a_3,a_4\},\{c_1,c_2,c_3,c_4\}\}$
$\mathcal{E}_4 = \{\{b_1,b_2,b_3,b_4\},\{d_1,d_2,d_3,d_4\}\}$

Figura 4: Redução de $\mathcal{F} = \{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\}$ em $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4\}$.

Suponha primeiro que $\mathcal{F}$ não é Helly colorido. Considere $\mathcal{F}' = \{\mathcal{H}'_1, \mathcal{H}'_2\}$ uma subfamília fortemente intersectante de $\mathcal{F}$ tal que $nuc(\mathcal{H}'_1) = nuc(\mathcal{H}'_2) = \emptyset$. Considere $\mathcal{E}' = \{\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}'_2, \mathcal{E}_3, \ldots, \mathcal{E}_p\}$, onde $\mathcal{E}'_1 \subseteq \mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}'_2 \subseteq \mathcal{E}_2$ são formadas pelas hiperarestas correspondentes de $\mathcal{H}'_1$ e $\mathcal{H}'_2$, respectivamente. O fato de $\mathcal{F}'$ ser fortemente intersectante implica que $\mathcal{E}'$ é fortemente intersectante, por construção. Uma vez que nenhum dos novos vértices pertencem a mais de uma hiperaresta de qualquer hipergrafo de $\mathcal{E}$, temos que $nuc(\mathcal{E}'_1) = nuc(\mathcal{E}'_2) = nuc(\mathcal{E}_3) = \ldots = nuc(\mathcal{E}_p) = \emptyset$.

Reciprocamente, suponha que $\mathcal{E}$ não é Helly colorido. Então existe uma subfamília fortemente intersectante $\mathcal{E}' = \{\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}'_2, \mathcal{E}_3, \ldots, \mathcal{E}_p\}$ de $\mathcal{E}$ tal que $nuc(\mathcal{E}'_1) = nuc(\mathcal{E}'_2) = nuc(\mathcal{E}_3) = \ldots = nuc(\mathcal{E}_p) = \emptyset$. Seja a subfamília $\mathcal{F}' = \{\mathcal{H}'_1, \mathcal{H}'_2\}$ de $\mathcal{F}$ com $\mathcal{H}'_1$ e $\mathcal{H}'_2$ formadas pelas hiperarestas correspondentes de $\mathcal{E}'_1$ e $\mathcal{E}'_2$, respectivamente. É claro que $nuc(\mathcal{H}'_1) = nuc(\mathcal{H}'_2) = \emptyset$.

Resta mostrar que $\mathcal{F}'$ é fortemente intersectante. Considere um hipergrafo representativo $\hat{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}'$. Temos que $nuc(\hat{\mathcal{E}}) \neq \emptyset$, pois $\mathcal{E}'$ é fortemente intersectante. Que implica, por construção, que as duas hiperarestas de $\mathcal{F}'$ associadas as hipearestas representativas de $\mathcal{E}'_1$ e $\mathcal{E}'_2$ em $\hat{\mathcal{E}}$ compartilham um elemento. □

Corolário 4.4. *A variação do problema* HELLY COLORIDO *para uma família de p hipergrafos, onde q deles são p-Helly, para $q \leq p-2$ e $p \geq 2$ fixo, permanece Co-NP-completo.*

Demonstração. Na prova do Teorema 4.3, uma família $\mathcal{E}$ de p hipergrafos é construída com a propriedade que $p-2$ dos hipergrafos são p-Helly. Tal família é empregada na prova de completude. Podemos transformar $\mathcal{E}$ em uma família de p hipergrafos onde $p-3$ são p-Helly como segue. Selecione um dos $p-2$ hipergrafos p-Helly de $\mathcal{E}$ e adicione a ele um hipergrafo p-intersectante formado por novos vértices tendo um núcleo vazio. Claramente, a nova família $\mathcal{E}$ assim alterada também pode ser empregada na prova de completude do Teorema 4.3, pois as subfamílias fortemente intersectantes foram preservadas. Logo, o Teorema 4.3 é válido quando $q = p-3$ dos hipergrafos são p-Helly. Podemos repetir o mesmo argumento para os restantes $q-1$ hipergrafos p-Helly, completando a prova. □

5 Caracterizações e Algoritmos

Nesta seção, descrevemos um algoritmo de tempo polinomial para decidir se uma família de hipergrafos $\mathcal{F} = \{\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_p\}$ satisfaz à propriedade de Helly colorido, quando $p-1$ dos hipergrafos de $\mathcal{F}$ são p-Helly.

O próximo lema descreve condições para que uma família de p hipergrafos satisfaça a propriedade de Helly colorido.

Lema 5.1. *Considere $\mathcal{F} = \{\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_p\}$ uma família de hipergrafos, onde $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_{p-1}$ são p-Helly, $p \geq 2$. Então $\mathcal{F}$ é Helly colorido se e somente se toda subfamília $\hat{\mathcal{F}} = \{\hat{\mathcal{H}}_1, \ldots, \hat{\mathcal{H}}_{p-1}, \mathcal{H}_p\}$ de $\mathcal{F}$, onde $|E(\hat{\mathcal{H}}_i)| \leq p$ para $i < p$, também é Helly colorido.*

Demonstração. A primeira parte segue da definição do problema. Reciprocamente, suponha que $\mathcal{F}$ não é Helly colorido. Considere $\mathcal{F}' = \{\mathcal{H}'_1, \ldots, \mathcal{H}'_p\}$ uma subfamília fortemente intersectante de $\mathcal{F}$ com $nuc(\mathcal{H}'_1) = \ldots = nuc(\mathcal{H}'_p) = \emptyset$. Uma vez que $\mathcal{H}_i$ é p-Helly, então podemos escolher $\mathcal{H}''_i \subseteq \mathcal{H}'_i$, com $|E(\mathcal{H}''_i)| \leq p$, tal que $nuc(\mathcal{H}''_i) = \emptyset$, para $i = 1, \ldots, p-1$. Assim, existe uma subfamília fortemente intersectante, $\mathcal{F}'' = \{\mathcal{H}''_1, \ldots, \mathcal{H}''_{p-1}, \mathcal{H}'_p\}$ de $\hat{\mathcal{F}}$ onde $|E(\mathcal{H}''_i)| \leq p$, para $i < p$, que não satisfaz à propriedade de Helly colorido. □

Teorema 5.2. *Considere $\mathcal{F} = \{\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_p\}$ uma família de hipergrafos, onde $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_{p-1}$ são p-Helly, $p \geq 2$. Então $\mathcal{F}$ é Helly colorido se e somente se $\mathcal{F}$ não contém uma subfamília*

fortemente intersectante $\mathcal{F}' = \{\mathcal{H}'_1, \ldots, \mathcal{H}'_{p-1}, \mathcal{H}'_p\}$ *onde* $|E(\mathcal{H}'_i)| \leq p$, $1 \leq i \leq p-1$, *satisfazendo* $nuc(\mathcal{H}'_1) = \ldots = nuc(\mathcal{H}'_p) = \emptyset$.

Demonstração. A primeira parte segue da definição do problema. Reciprocamente, suponha que $\mathcal{F}$ não contenha uma subfamília fortemente intersectante $\mathcal{F}' = \{\mathcal{H}'_1, \ldots, \mathcal{H}'_{p-1}, \mathcal{H}'_p\}$ onde $|E(\mathcal{H}'_i)| \leq p$, $1 \leq i \leq p-1$, e $nuc(\mathcal{H}'_1) = \ldots = nuc(\mathcal{H}'_p) = \emptyset$. Logo, toda subfamília $\mathcal{F}'' = \{\mathcal{H}'_1, \ldots, \mathcal{H}'_{p-1}, \mathcal{H}_p\}$ com $|E(\mathcal{H}'_i)| \leq p$, $1 \leq i \leq p-1$, satisfaz à propriedade de Helly colorido, implicando, pelo Lema 5.1, que $\mathcal{F}$ é Helly colorido. □

Observe que, dado um par qualquer de subfamílias fortemente intersectantes arbitrárias $\mathcal{F}' = \{\mathcal{H}'_1, \ldots, \mathcal{H}'_{p-1}, \mathcal{H}'_p\}$ e $\mathcal{F}'' = \{\mathcal{H}'_1, \ldots, \mathcal{H}'_{p-1}, \mathcal{H}''_p\}$ de $\mathcal{F}$, diferindo somente por $\mathcal{H}'_p \subset \mathcal{H}''_p$, não precisamos considerar os primeiros para verificar se $\mathcal{F}$ é Helly colorido. Além disso, existe alguma subfamília (maximal) $\mathcal{F}''' = \{\mathcal{H}'_1, \ldots, \mathcal{H}'_{p-1}, \mathcal{H}'''_p\}$ que contém toda subfamília fortemente intersectante de $\mathcal{F}$ tendo $\mathcal{H}'_1, \ldots, \mathcal{H}'_{p-1}$ como seus primeiros $p-1$ hipergrafos. Estas observações e o teorema acima conduzem a um algoritmo de tempo polinomial para decidir se $\mathcal{F} = \{\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_p\}$ é Helly colorido, sempre que p é fixo e $p-1$ dos hipergrafos de $\mathcal{F}$ são p-Helly.

Algoritmo 5.3. *Seja* $\mathcal{F} = \{\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_p\}$ *uma família de hipergrafos tal que* $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_{p-1}$ *são p-Helly. Para cada escolha de hipergrafos parciais* $\mathcal{H}'_1, \ldots, \mathcal{H}'_{p-1}$, *de* $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_{p-1}$, *respectivamente, tal que* $|E(\mathcal{H}'_i)| \leq p$, *verifique se é fortemente intersectante. Se sim, selecione* $\mathcal{H}'_p \subseteq \mathcal{H}_p$, *onde* $|E(\mathcal{H}'_p)|$ *é maximal e* $\mathcal{F}' = \{\mathcal{H}'_1, \ldots, \mathcal{H}'_{p-1}, \mathcal{H}'_p\}$ *é fortemente intersectante. Então* $\mathcal{F}$ *é Helly colorido precisamente quando* $nuc(\mathcal{H}'_i) \neq \emptyset$, *para algum* i, $1 \leq i \leq p$, *para toda subfamília fortemente intersectante* $\mathcal{F}'$.

Denote $m = \max\{|E(\mathcal{H}_i)| : i = 1, 2, \ldots, p\}$ e $n = |\bigcup V(\mathcal{H}_i)|$. Primeiro, devemos selecionar hipergrafos parciais $\mathcal{H}'_1, \ldots, \mathcal{H}'_{p-1}$ tal que $\mathcal{H}'_i \subseteq \mathcal{H}_i$, para $1 \leq i \leq p-1$, e $|E(\mathcal{H}'_i)| \leq p$. Existem $O(m^{p(p-1)})$ destas famílias. A complexidade para verificar se cada uma destas famílias é fortemente intersectante e selecionar o maior $\mathcal{H}'_p \subseteq \mathcal{H}_p$ tal que $\mathcal{F}' = \{\mathcal{H}'_1, \ldots, \mathcal{H}'_{p-1}, \mathcal{H}'_p\}$ é fortemente intersectante, é $O(mnp^p)$. Finalmente, para cada $\mathcal{F}'$ devemos verificar se $nuc(\mathcal{H}_i) \neq \emptyset$, o que requer $O((p-1)(p-1)n + (m-1)n)$. Portanto, podemos concluir que o número total de operações é polinomial para p fixo.

Em particular, a complexidade do algoritmo para o caso $p = 2$ é $O(m^3 n)$.

6 Conclusão

Consideramos a propriedade de Helly colorido para hipergrafos em geral, motivados pelo teorema de Helly colorido de Lovász para conjuntos convexos.

O principal resultado do artigo foi provar a seguinte dicotomia.

Teorema 6.1. *Seja* $\mathcal{F}$ *uma família de* p *hipergrafos,* p *fixo. Então, se* $P \neq NP$, *podemos decidir em tempo polinomial se* $\mathcal{F}$ *é Helly colorido se e somente se pelo menos* $p-1$ *hipergrafos de* $\mathcal{F}$ *são p-Helly.*

Finalmente, mencionamos a possibilidade de estender o conceito da propriedade de Helly colorido. Dada uma família de p hipergrafos $\mathcal{F} = \{\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_p\}$ e um parâmetro $q \leq p$, dizemos que $\mathcal{F}$ é *q-Helly colorido* se toda família $\mathcal{F}'$ formada por q hipergrafos de $\mathcal{F}'$ é Helly colorido. A questão natural é então caracterizar famílias de hipergrafos q-Helly.

Referências

Barbosa, R. M., Dourado, M. C., Martins, E. M., and Szwarcfiter, J. L. (2009). The Colorful Helly Property for Hypergraphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 34:647–651.

Berge, C. (1970). *Graphes et Hypergraphes.* North-Holland, Dunod, Paris.

Berge, C. and Duchet, P. (1975). A generalization of Gilmore's theorem. In M. Fiedler, editor. *Recent Advances in Graph Theory*, pages 49–55.

Bretto, A., Cherifi, H., and Aboutajdine, D. (2002). Hypergraphs imaging: an overview. *Pattern Recognition*, 35:651–658.

Bárány, I. (1982). A generalization of Carathéodory's theorem. *Discrete Mathematics*, 40:141–152.

Bárány, I. and Onn, S. (1997). Colorful Linear Programming and its Relatives. *Mathematics of Operations Research*, 22:557–567.

Dourado, M. C., Lin, M. C., Protti, F., and Szwarcfiter, J. L. (2008). Improved algorithms for recognizing p-Helly and hereditary p-Helly hypergraphs. *Information Processing Letters*, 108:247–250.

Dourado, M. C., Protti, F., and Szwarcfiter, J. L. (2006). Complexity aspects of generalized Helly hypergraphs. *Information Processing Letters*, 99:13–18.

Dourado, M. C., Protti, F., and Szwarcfiter, J. L. (2009). Complexity aspects of the Helly property: Graphs and hypergraphs. *The Electronic Journal of Combinatorics, Dynamic Surveys*, 17.

Duchet, P. and Meyniel, H. (1983). Ensembles convexes dans les graphes. I: Théorèmes de Helly et de Radon pour graphes et surfaces. *European Journal of Combinatorics*, 4:127–132.

Fagin, R. (1983). Degrees of acyclicity for hypergraphs and relational database systems. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 30:514–550.

Gilmore, P. C. (1962). Families of sets with Faithful Graph Representations. *Res. Note N. C.*, 184.

Helly, E. (1923). Ueber Mengen konvexer Koerper mit gemeinschaftlichen Punkten, Jahresbericht. *Math. Verein*, 32:175–176.

Lovász, L. (1974). Problem 206. *Matematikai Lapok*, 25:181.

Tuza, Z. (1993). Helly property in finite set systems. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 62:1–14.