Um algoritmo FPT para o problema da $L(2,1)$-coloração

Márcia R. Cerioli[1], Nicolas A. Martins[2], Daniel F. D. Posner[1], Rudini Sampaio[2]

Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, Universidade Federal do Rio de Janeiro
{cerioli,posner}@cos.ufrj.br

Departamento de Computação, Universidade Federal do Ceará
{nicolasam,rudini}@lia.ufc.br

Resumo

Dado um grafo simples G, uma $L(2,1)$-coloração (ou λ-coloração) de G é uma atribuição c de inteiros aos vértices de G de modo que $|c(x)-c(y)| \geq 2$, se x e y são vértices adjacentes e $|c(x)-c(y)| \geq 1$ se x e y possuem um vizinho em comum. O número λ-cromático $\lambda(G)$ de G é o menor inteiro k tal que existe uma λ-coloração de G com cores em $\{0,1,\ldots,k\}$. Sabe-se que determinar $\lambda(G)$ é NP-difícil. Nesse artigo, nós provamos que o problema da λ-coloração é FPT e obtemos um algoritmo polinomial para obter o número λ-cromático para grafos com $q(G)$ limitado, onde $q(G)$ é o menor inteiro q tal que todo subgrafo de G com no máximo q vértices induz no máximo $q-4$ P_4's.
PALAVRAS-CHAVE: $L(2,1)$**-coloração, decomposição primeval,** $(q,q-4)$**-grafos.**
ÁREA: Teoria e Algoritmos em Grafos (TAG).

Abstract

Given a graph G, a $L(2,1)$-coloring (λ-coloring) of G is an assignment of integers to the vertices of G such that $|c(x)-c(y)| \geq 2$, if x and y are adjacent vertices and $|c(x)-c(y)| \geq 1$ if x and y have a common neighbor. The λ-chromatic number $\lambda(G)$ of G is the minimum integer k such that there exists a λ-coloring of G with colors in $\{0,1,\ldots,k\}$. It is known that determining the λ-chromatic number is NP-Hard. In this paper, we prove that the λ-coloring problem is FPT and we obtain a polynomial time algorithm to determine the λ-chromatic number for graphs with bounded $q(G)$, where $q(G)$ is the minimum integer q such that every subgraph with at most q vertices has at most $q-4$ P_4's.
KEYWORDS: $L(2,1)$**-coloring, primeval decomposition,** $(q,q-4)$**-graphs.**
AREA: Graph Theory and Algorithms.

1 Introdução

O problema de atribuir frequências de rádio a transmissores evitando interferência é, em muitos casos, estudado como um problema de coloração de grafos, onde os vértices representam os transmissores, as arestas representam transmissores que se interferem mutuamente e as cores representam as frequências. Uma $L(2,1)$-coloração (ou λ-coloração) de um grafo G é uma atribuição c de inteiros aos vértices de G de modo que $|c(x) - c(y)| \geq 2$, se x e y são vértices adjacentes e $|c(x) - c(y)| \geq 1$ se x e y possuem um vizinho em comum. Ou seja, a diferença entre as frequências de vértices vizinhos deve ser de no mínimo 2 e vértices com um vizinho em comum não podem ter a mesma frequência.

O número λ-cromático $\lambda(G)$ de G é o menor inteiro k tal que existe uma λ-coloração de G com cores em $\{0, 1, \ldots, k\}$.

A $L(2,1)$-coloração foi estudado primeiramente por Griggs e Yeh [Griggs e Yeh, 1992] como uma generalização de T-colorações para o problema de atribuição de frequências.

Algoritmos polinomiais para obter L(2,1)-colorações mínimas são conhecidos apenas para árvores [Griggs e Yeh, 1992], cografos [Chang e Kuo, 1996], grafos com largura em árvore limitada [Fiala et al., 1999] e para grafos específicos, como grades [Calamoneri e Petreschi, 2002]. Recentemente em 2009, [Havet et al., 2009] apresentaram algoritmos exatos moderadamente exponenciais para o caso geral.

Como se conhecem poucas classes de grafos com algoritmos polinomiais para o problema da L(2,1)-coloração, é relevante a descoberta de novas classes com esta propriedade. Neste artigo, obtemos algoritmos polinomiais para diversas classes de grafos. Dado um inteiro $q \geq 4$ fixo, dizemos que um grafo é um $(q, q-4)$-grafo se todo conjunto com q vértices induz no máximo $q - 4$ diferentes P_4's (caminhos com quatro vértices). Por exemplo, $(4, 0)$-grafos são cografos, $(5, 1)$-grafos são grafos P_4-esparsos, $(6, 2)$-grafos são grafos P_4-*estensíveis* livres de C_5 e $(7, 3)$-grafos contém os grafos P_4-*leves*.

Nosso principal resultado é a prova de que, fixado q e dado qualquer $(q, q-4)$-grafo G como entrada, existe um algoritmo polinomial para obter uma L(2,1)-coloração mínima de G (e consequentemente determinar $\lambda(G)$). Consequentemente, obtemos um algoritmo FPT para o parâmetro $q(G)$ que representa o mínimo q tal que G é um $(q, q-4)$-grafo.

2 Resultados estruturais sobre $(q, q-4)$-grafos

[Babel e Olariu, 1998] definiram um grafo como $(q, q-4)$-*grafo* se nenhum conjunto com q vértices induz mais do que $q - 4$ diferentes P_4's. Cografos são $(4, 0)$-grafos, ou seja, não possuem P_4's induzidos [Corneil et al., 1981]. Grafos P_4-esparsos são $(5, 1)$-grafos [Hoàng, 1985]. Estruturalmente, sabe-se que todo cografo é desconexo ou seu complemento é desconexo, e que todo grafo P_4-esparso é um cografo ou é uma *aranha*.

Dizemos que um grafo é uma *aranha* (R, C, S) se o seu conjunto de vértices pode ser particionado em conjuntos R, C e S, onde $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ e $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ para $k = |C| = |S|$ tais que:

i. C induz uma clique;

ii. S induz um conjunto independente;

iii. Todo vértice de R é adjacente aos vértices de C e não-adjacente aos vértices de S;

iv. (a) s_i é adjacente a c_i se e só se $i = j$, para todos $1 \leq i, j \leq k$ (*aranha magra*); ou
(b) s_i é adjacente a c_i se e só se $i \neq j$, para todos $1 \leq i, j \leq k$ (*aranha gorda*)

Podemos visualizar R, C e S respectivamente como a cabeça, o corpo e as pernas da aranha. Note que R pode ser vazio e, nesse caso, dizemos que a aranha é sem cabeça.

A *união disjunta* (ou simplesmente *união*) de dois grafos G_1 e G_2 é o grafo $G_1 \cup G_2$, onde $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ e $E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$. A *junção* de dois grafos G_1 e G_2 é o grafo $G_1 \vee G_2$, onde $V(G_1 \vee G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ e $E(G_1 \vee G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup V(G_1) \times V(G_2)$. A operação de junção é a operação de união com a inclusão de todas as arestas possíveis entre G_1 e G_2.

[Jamison e Olariu, 1995] provaram um importante resultado estrutural para grafos quaisquer, usando *grafos p-conexos*. Um grafo é *p-conexo* se, para toda partição dos vértices de G em conjuntos A e B não vazios, existe um P_4 com vértices de A e B. Uma *p-componente separável* é um subgrafo p-conexo maximal com uma bipartição (H_1, H_2) tal que todo P_4 $wxyz$ com vértices em H_1 e H_2 é tal que $x, y \in H_1$ e $w, z \in H_2$.

Teorema 2.1 ([Jamison e Olariu, 1995])**.** *Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. Então G satisfaz um dos itens abaixo:*

(i) G é desconexo;

(ii) $\overline{G}$ é desconexo (onde $\overline{G}$ é o complemento de G);

(iii) G é p-conexo;

(iii) G possui uma p-componente separável $H = (H_1, H_2)$ tal que todo vértice de $V(G) - H$ é adjacente aos vértices de H_1 e não-adjacente aos vértices de H_2.

Além disso, tal caracterização pode ser obtida em tempo linear no número de arestas de G.

[Babel e Olariu, 1998] também provaram que todo $(q, q-4)$-grafo p-conexo é uma aranha sem cabeça ou tem menos do que q vértices. Portanto, pelo teorema acima e pelo fato de que o complemento de um $(q, q-4)$-grafo é também um $(q, q-4)$-grafo, temos diretamente o seguinte resultado.

Corolário 2.2. *Seja $q \geq 4$ um inteiro fixo. Dado um $(q, q-4)$-grafo $G = (V, E)$, então G satisfaz um dos itens a seguir:*

(a) $G = G_1 \cup G_2$ é a união de dois $(q, q-4)$-grafos G_1 e G_2;

(b) $G = G_1 \vee G_2$ é a junção de dois $(q, q-4)$-grafos G_1 e G_2;

(c) G é uma aranha (R, C, S) tal que $G[R]$ é um $(q, q-4)$-grafo;

(d) G tem menos de q vértices;

(e) G possui uma p-componente separável $H = (H_1, H_2)$ com menos de q vértices tal que todo vértice de $V(G) - H$ é adjacente aos vértices de H_1 e não-adjacente aos vértices de H_2.

Além disso, tal caracterização pode ser obtida em tempo linear no número de arestas de G.

3 $L(2,1)$-Coloração de $(q, q-4)$-grafos

Se $G = G_1 \cup G_2$ é a união disjunta de dois grafos G_1 e G_2, é fácil ver que $\lambda(G) = \max\{\lambda(G_1), \lambda(G_2)\}$, pois toda cor usada em G_1 também pode ser usada em G_2 e vice-versa.

Dado um grafo G, seja $c(G)$ o menor número de caminhos disjuntos necessários para cobrir todos os vértices de G. Seja $\overline{G}$ o complemento de G.

Teorema 3.1 ([Georges et al., 1994]). *Se G é um grafo com n vértices, temos que*

(a) $\lambda(G) \leq n - 1$, se e somente se $c(\overline{G}) = 1$.

(b) Para $r \geq 2$, $\lambda(G) = n + r - 2$ se e somente se $c(\overline{G}) = r$.

Intuitivamente, dada uma cobertura de caminhos no complemento $\overline{G}$ de G, podemos obter uma λ-coloração onde cada vértice tem uma cor distinta do seguinte modo: a cor do $(i+1)$-ésimo vértice do j-ésimo caminho é igual a cor i-ésimo vértice do mesmo caminho mais um para $i > 1$ e a cor do primeiro vértice do $(j+1)$-ésimo caminho é igual a cor do último vértice do j-ésimo caminho mais dois para $j > 1$ (a cor do primeiro vértice do primeiro caminho é 0).

Corolário 3.2 ([Georges et al., 1994]). *Sejam G_1 e G_2 grafos com n_1 e n_2 vértices respectivamente e seja $G = G_1 \vee G_2$ o grafo resultante da junção de G_1 e G_2. Então*

$$\lambda(G) \;=\; \max\Big\{n_1 - 1,\ \lambda(G_1)\Big\} \;+\; \max\Big\{n_2 - 1,\ \lambda(G_2)\Big\} \;+2$$

Lema 3.3. *Seja G uma aranha com partição (R, C, S). Seja $k = |C| = |S|$. Se G é uma aranha magra com $|C| > 3$, então*

$$\lambda(G) \;=\; \max\Big\{|R| - 1, \lambda(G[R])\Big\} \;+\; 2k$$

Prova. Considere uma λ-coloração mínima f de $(C \cup R)$. Seja s_i um vértice de S. Seja c_i o vértice de C que é adjacente a s_i.

Pelo Corolário 3.2, uma λ-coloração mínima do subgrafo induzido por $(C \cup R)$ usa $\max\{|C| - 1, \lambda(G[C])\} + \max\{|R| - 1, \lambda(G[R])\} + 2$ cores. Como C induz uma clique, as cores atribuídas aos seus vértices devem ter uma diferença de pelo menos duas unidades entre si. Sendo assim $\lambda(G[C]) = 2k - 2$, onde $k - 1$ cores não são atribuídas a nenhum vértice. Logo $\lambda(G) \geq 2k - 2 + \max\{|R| - 1, \lambda(G[R])\} + 2$.

A cor de s_i não pode ser uma cor de um vértice c_j de C, pois todos os vértices de C estão a uma distância menor que dois de s_i. No entanto, podemos utilizar todas as $k - 1$ cores que não foram utilizadas na coloração do subgrafo induzido por C.

A cada vértice de s_i de S, não é possível usar duas cores dentre as $k-1$ cores não utilizadas em C (são as cores $f(c_i) - 1$ e $f(c_i) + 1$ que certamente não foram utilizadas em $C \cup R$ por diferenciarem-se de $f(c_i)$ por apenas uma unidade e pelo mesmo motivo não podem ser atribuídas a s_i.

Como $k > 3$, sempre teremos uma cor viável para atribuir a qualquer vértice s_i de S. Assim podemos estender f ao grafo inteiro. Logo temos uma λ-coloração de G com $\max\{|R| - 1, \lambda(G[R])\} + 2k$ cores.

□

No lema abaixo, observe que uma aranha gorda com $|C| = 1$ é desconexa e com $|C| = 2$ é também uma aranha magra. Por isso, podemos supor que $|C| > 2$.

Lema 3.4. *Seja G uma aranha com partição (R, C, S). Seja $k = |C| = |S|$. Se G é uma aranha gorda com $|C| > 2$, então*

$$\lambda(G) \;=\; \begin{cases} \lambda(R) + 2|C|, & se\ \lambda(R) \geq |R| + \left\lceil \frac{|C|}{2} \right\rceil - 2 \\ |V(G)| + \left\lceil \frac{|C|}{2} \right\rceil - 2, & caso\ contrário. \end{cases}$$

Prova. Primeiramente devemos observar que o complemento de uma aranha gorda com partição (R, C, S) é uma aranha magra com partição $(\overline{R}, \overline{S}, \overline{C})$.

Se $\lambda(G[R]) \geq |R| + \lceil \frac{k}{2} \rceil - 2$, então, de acordo com o Teorema 3.1, temos que $c(\overline{R}) \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil$. Ou seja, o grafo $\overline{R}$ precisa de pelo menos $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ caminhos disjuntos para ser coberto totalmente.

Assim podemos cobrir todo $\overline{G}$ usando apenas $c(\overline{R})$ caminhos da seguinte maneira: formamos um caminho usando os vértices c_j de $\overline{C}$ e seu adjacente s_j em $\overline{S}$. Como todos os vértices de $\overline{R}$ são adjacentes a s_j em $\overline{G}$ podemos agregar um dos caminhos em $\overline{R}$ ainda não utilizados e finalizamos utilizando os vertices s_{j+1} e c_{j+1}. Realizamos o processo para todo $1 \leq j \leq k$ ímpar. Desta maneira, cobrimos todo o grafo $G[\overline{S} \cup \overline{C}]$ utilizando $\lceil \frac{|C|}{2} \rceil$ caminhos de $\overline{R}$. Basta apenas usar os caminhos restantes em $\overline{R}$ para cobrir $\overline{G}$ completamente. Desta maneira temos que, $c(\overline{G}) \geq c(G[\overline{R}])$. Como apresentamos uma cobertura de tamanho $c(G[\overline{R}])$ de $\overline{G}$, então $c(\overline{G}) = c(G[\overline{R}])$. Logo, pelo Teorema 3.1, $\lambda(G) = |R| + |C| + |S| + c(\overline{R}) - 2$. Ou seja, $\lambda(G) = \lambda(R) + 2k$

Se $\lambda(R) < |R| + \lceil \frac{|C|}{2} \rceil - 2$, então, pelo Teorema 3.1, temos que, $c(\overline{R}) < \lceil \frac{|C|}{2} \rceil$. Ou seja, $\overline{R}$ precisa de menos que $\lceil \frac{|C|}{2} \rceil$ caminhos disjuntos para ser coberto totalmente.

É fácil ver que o número mínimo de caminhos usados para cobrir o corpo e as patas de uma aranha magra é $\lceil \frac{|C|}{2} \rceil$. Assim temos que $c(\overline{G}) \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil$. Resta-nos apenas apresentar uma cobertura de caminhos de $\overline{G}$ com $\lceil \frac{|C|}{2} \rceil$ caminhos para termos o resultado. A formação destes caminhos é similar ao caso anterior. Formamos um caminho usando os vértices c_j de $\overline{C}$ e seu adjacente s_j em $\overline{S}$. Como todos os vértices de $\overline{R}$ são adjacentes a s_j em $\overline{G}$, podemos agregar um dos caminhos em $\overline{R}$ ainda não utilizados e finalizamos utilizando os vertices s_{j+1} e k_{j+1}. Procedemos desta maneira para $j = 1, 3, 5, \ldots$, até que os caminhos em $\overline{R}$ sejam todos utilizados. Quando isto ocorrer, continuamos o mesmo procedimento exceto que, como não há mais caminhos em $\overline{R}$, os caminhos serão compostos por c_j, s_j, s_{j+1} e c_{j+1}, até que j atinja $|C|$ ou $|C| - 1$. Logo temos que $c(\overline{G}) = \lceil \frac{k}{2} \rceil$ e, pelo Teorema 3.1, $\lambda(G) = |V(G)| + \lceil \frac{k}{2} \rceil - 2$. $\square$

Lema 3.5. *Seja q um inteiro fixo. Seja G um grafo com mais de $2q$ vértices que contém uma p-componente separável $H = (H_1, H_2)$ com no máximo q vértices tal que todo vértice de $G - H$ é adjacente aos vértices de H_1 e não-adjacente aos vértices de H_2. Para toda cobertura ψ por caminhos de H, sejam $\beta_1(\psi)$, $\beta_2(\psi)$ e $\beta_3(\psi)$ respectivamente o número de caminhos de ψ com extremidades em H_1, o número de caminhos de ψ com extremidades em H_2 e o número de caminhos de ψ com uma extremidade em H_1 e outra em H_2. Então,*

$$c(G) \;=\; \min_{\psi \in C(H)} \left\{ \max \left\{ c(G - H) - \beta_1(\psi), \left\lceil \frac{\beta_3(\psi)}{2} \right\rceil, 1 \right\} + \beta_2(\psi) \right\}$$

onde $C(H)$ é o conjunto de todas as coberturas por caminhos de H. Além disso, dada uma cobertura mínima por caminhos de $G - H$, é possível obter em tempo linear uma cobertura mínima por caminhos de G.

Prova. Seja Δ uma cobertura mínima por caminhos de $G-H$. Seja ψ uma cobertura qualquer por caminhos de H. Sejam B_1, B_2 e B_3 respectivamente o conjunto dos caminhos de ψ com extremidades em H_1, o conjunto dos caminhos de ψ com extremidades em H_2 e o conjunto dos caminhos de ψ com uma extremidade em H_1 e outra em H_2. Portanto, $|B_1| = \beta_1(\psi)$, $|B_2| = \beta_2(\psi)$ e $|B_3(\psi)| = \beta_3$.

Se $|\Delta| < |B_1| + |B_3|/2$, podemos partir alguns caminhos de Δ para obter $|\Delta| = |B_1| + \lceil |B_3|/2 \rceil$, visto que $G - H$ tem mais do que q vértices.

Para cada $i = 1, \ldots, |B_1|$, ligue a segunda extremidade do i-ésimo caminho de Δ com a primeira extremidade do i-ésimo caminho de B_1 e ligue a segunda extremidade do i-ésimo caminho de B_1 com a primeira extremidade do $(i+1)$-ésimo caminho de Δ. Esse procedimento obtém apenas um caminho em G a partir de $|B_1| + 1$ caminhos de Δ e dos caminhos de B_1.

Seja Ω o conjunto dos caminhos formados por esse procedimento mais os caminhos de Δ não utilizados nesse procedimento e mais os caminhos de B_2.

Para $i = 1, \ldots, |B_3|$, ligue a extremidade do i-ésimo caminho de B_3 que está em H_1 a primeira (se i for par) ou segunda (se i for ímpar) extremidade do $\lceil i/2 \rceil$-ésimo caminho de Ω. Substitua os caminhos de Ω utilizados nesse passo pelos gerados. Com isso, obtemos uma cobertura Ω por caminhos de G com $|\Delta| - |B_1| + |B_2|$ caminhos. Portanto, $c(G) \geq |\Delta| - |B_1| + |B_2|$. Como isso vale para qualquer $\psi \in C(H)$, então vale para o mínimo entre todos as coberturas em $C(H)$.

Seja agora Ψ uma cobertura mínima de G. Sejam Δ e ψ respectivamente as coberturas de $G-H$ e de H por caminhos induzidas por Ψ. Sejam B_1, B_2 e B_3 definidos como anteriormente. Claramente, os caminhos em B_2 são também caminhos de Ψ. Podemos supor que nenhum caminho de B_1 ou B_3 é um caminho inteiro de Ψ (senão, podemos rearranjar os caminhos de Ψ para obter o desejado e mantendo uma cobertura de mesmo tamanho, visto que $G - H$ possui mais que q vértices). Pelo mesmo motivo, podemos assumir que nenhum extremidade de um caminho de B_1 é extremidade de um caminho de Ψ.

Desse modo, podemos recuperar os caminhos de Ψ ligando caminhos de Δ com todos os caminhos de B_1. Finalmente, podemos acrescentar os caminhos de B_3 às extremidades desses caminhos gerados. Com isso, pela suposição, temos que $|\Delta| \geq |B_1| + \lceil |B_3|/2 \rceil$, e que

$$c(G) = |\Delta| - |B_1| + |B_2| \geq c(G - H) - \beta_1(\psi) + \beta_2(\psi)$$

Como isso vale para ψ, vale também para o mínimo entre todas as coberturas em $C(H)$. $\square$

Teorema 3.6. *Seja q um inteiro fixo. Dado um $(q, q-4)$-grafo G, podemos obter uma $L(2,1)$-coloração mínima de G e determinar o número λ-cromático $\lambda(G)$ em tempo $O((2q)^{4q} \cdot n)$.*

Prova. Do Lema 2.2, temos que G é uma união disjunta, uma junção, uma aranha ou uma p-componente separável com menos do que q vértices. Os casos de junção e aranha são resolvidos pelos Lemas 3.2, 3.3 e 3.4, com exceção de aranhas magras com $k \leq 3$ (caso que é resolvido no caso abaixo).

No caso de uma p-componente separável H em G com menos do que q vértices, temos que $\overline{G}$ é também um $(q, q-4)$-grafo e que $\overline{H}$ é uma p-componente separável de $\overline{G}$ com menos do que q vértices. Se G tem no máximo $2q$ vértices, podemos gerar todas as L(2,1)-colorações possíveis de G em tempo $O((2q)^{4q})$. Senão, pelo Lema 3.5, conseguimos calcular $c(\overline{G})$ gerando todos as coberturas ψ por caminhos de $\overline{H}$. Como $\overline{H}$ tem menos do que q vértices, $|C(\overline{H})| \leq q^q$.

Pelo Teorema 3.1, se $c(\overline{G}) > 1$, então $\lambda(G) = |V(G)| + c(\overline{G}) - 2$. Se $c(\overline{G}) = 1$, então $\overline{G}$ é hamiltoniano e $\lambda(G) \leq n - 1$.

Nesse caso, é fácil ver pela fórmula que $c(\overline{G}-\overline{H}) < q$. Note que os vértices de $G-H$ devem ter cores diferentes entre si e não podem usar cores de H_1 nem de H_2 (todo vértice de H_2 tem um vizinho em H_1, que por sua vez está ligado a todo vértice de $G-H$). Os únicos vértices que podem eventualmente usar cores iguais são os vértices de H_2.

Seja G' o grafo obtido de G substituindo $G-H$ por uma clique de tamanho $c(\overline{G}-\overline{H})$. Intuitivamente, cada vértice dessa clique representa um caminho de $\overline{G}-\overline{H}$. Note que G' tem no máximo $2q$ vértices.

Queremos provar que uma λ-coloração ótima de G' produz uma λ-coloração ótima de G. Considere uma λ-coloração mínima de G'. A cada cor usada em algum vértice de $G'-H$ podemos associar um intervalo de cores do tamanho do caminho representado por este vértice. Aplicando este procedimento suvessivamente, obtemos uma λ-coloração de G com $\lambda(G') + |V(G-H)| - c(\overline{G}-\overline{H})$.

Considere agora uma λ-coloração mínima de G. Seja r o número de intervalos de inteiros consecutivos que são cores de $G-H$. Claramente $r \geq c(\overline{G}-\overline{H})$ senão teríamos uma cobertura por caminhos de $\overline{G}-\overline{H}$ de tamanho menor do que o minimo. Seja G'' o grafo obtido de G substituindo $G-H$ por uma clique de tamanho r. Aplicando o procedimento anterior, podemos obter a coloração mínima original de G a partir da coloração de G'' usando $\lambda(G'') + |V(G-H)| - c(\overline{G}-\overline{H})$. Como G' é subgrafo induzido de G'', então $\lambda(G'') \geq \lambda(G')$. Logo a coloração de G induzida por G' tem no máximo o mesmo número de cores que a coloração mínima e, portanto, também é ótima. Como G' tem no máximo $2q$ vértices, podemos obter uma λ-coloração mínima em tempo $O((2q)^{4q})$. □

Claramente, o algoritmo é *fixed parameter*, visto que a complexidade é $O((2q)^{4q} \cdot n)$. Ou seja, para q constante, o algoritmo é polinomial (na verdade, é linear). Desse modo, o problema da $L(2,1)$-coloração é FPT (*fixed parameter tractable*) no parâmetro $q(G)$, que é o menor inteiro q tal que G é um $(q, q-4)$-grafo.

Referências

[Babel, 1997] L. Babel, On the P_4 structure of graphs, *Habilitationsschrift, Zentrum Mathematik, Technische Universität München* (1997).

[Babel e Olariu, 1998] L. Babel e S. Olariu, On the structure of graphs with few P_4s, *Discrete Applied Mathematics* **84** (1998), 1–13.

[Babel et al., 2001] L. Babel e T. Kloks and J. Kratochvíl and D. Kratsch and H. Muller and S. Olariu, Efficient algorithms for graphs with few $P_4's$, *Discrete Mathematics* **235** (2001), 29–51.

[Calamoneri e Petreschi, 2002] T. Calamoneri e R. Petreschi, On the Radiocoloring Problem, *IWDC 2002, LNCS 2571*, 118–127.

[Chang e Kuo, 1996] G.J. Chang e D. Kuo, The L(2, 1)-labeling problem on graphs, *SIAM J. Disc. Math.* **9** (1996), 309-316.

[Corneil et al., 1981] D. Corneil, H. Lerchs e L. K. Stewart, Complement reducible graphs, *Discrete Applied Mathematics* **3** n.3 (1981), 163–174.

[Corneil et al., 1984] D. Corneil, Y. Perl e L. K. Stewart, Cographs: recognition, applications and algorithms, *Congressus Numerantium* **43** (1984), 249–258.

[Fiala et al., 1999] J. Fiala, T. Kloks e J. Kratochvíl, Fixed-parameter complexity of λ-labelings, *WG-1999, LNCS 1665*, 350–363.

[Georges et al., 1994] J. Georges, D. W. Mauro e M. Whittlesey, Relating path covering to vertex labelings with a condition at distance two, *Discrete Math.* **135** (1994), 103-111.

[Griggs e Yeh, 1992] J.R. Griggs e R.K. Yeh, Labeling graphs with a condition at distance 2, *SIAM J. Discrete Math.* **5** (1992), 586-–595.

[Havet et al., 2009] F. Havet, M. Klazar, J. Kratochvíl, D. Kratsch e M. Liedloff, Exact Algorithms for L(2,1)-Labeling of Graphs, *Algorithmica* **59**-2 2009, 169–194.

[Hoàng, 1985] C. Hoàng, Perfect graphs, *PhD thesis, School of Computer Science, McGill University, Montreal* (1985).

[Jamison e Olariu, 1992] B. Jamison e S. Olariu, A tree representation for P_4-sparse graphs, *Discrete Applied Mathematics* **35** (1992), 115–129.

[Jamison et al., 1992] B. Jamison e S. Olariu, Recognizing P_4-sparse graphs in linear time, *SIAM Journal on Computing* **21** (1992), 381–406.

[Jamison e Olariu, 1995] B. Jamison e S. Olariu, P-components and the homogeneous decomposition of graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **8** (1995), 448–463.

[Jamison et al., 1995] B. Jamison e S. Olariu, Linear-time optimization algorithms for P_4-sparse graphs, *Discrete Applied Mathematics* **61** (1995), 155–175.