Uma caracterização dos grafos com número cromático orientado 3 e sobre o número cromático orientado de união de grafos.

Hebert Coelho da Silva

COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro–RJ, Brasil
INF/UFG, Goiânia–GO, Brasil
hebert@inf.ufg.br

Sylvain Gravier

Institut Fourier, CNRS
UJF, St Martin d'Hères, França
sylvain.gravier@imag.fr

Luerbio Faria

Departamento de Matemática
UERJ, Rio de Janeiro–RJ, Brasil
luerbio@cos.ufrj.br

Sulamita Klein

Instituto de Matemática e COPPE/Sistemas
UFRJ, Rio de Janeiro–RJ, Brasil
sula@cos.ufrj.br

Resumo

Courcelle (1994) apresentou o problema da coloração orientada de grafos orientados. Seja $\vec{G}$ um grafo orientado e $xy, zt \in E(\vec{G})$, uma coloração orientada de $\vec{G}$ é uma função c que atribui cores aos vértices de $\vec{G}$, tal que $c(x) \neq c(y)$ e além disso, se $c(x) = c(t)$ então $c(y) \neq c(z)$. Neste trabalho, caracterizamos $\mathcal{CN}_3$ que é a classe de grafos cujo número cromático orientado é menor ou igual a 3. Uma motivação para estudar $\mathcal{CN}_3$ se deve ao fato de que o número cromático orientado para esta classe pode ser decidido em tempo polinomial. Discutimos também sobre a classe $\mathcal{CN}_k$.
Palavras-Chave: Grafo Orientado, Número Cromático Orientado, Grafo Conexo.

Abstract

Courcelle (1994) introduced the problem of the oriented coloring of oriented graphs. Let $\vec{G}$ be an oriented graph and $xy, zt \in E(\vec{G})$, an oriented coloring of $\vec{G}$ is a function c that assigns colors to the vertices of $\vec{G}$, such that $c(x) \neq c(y)$ and moreover, if $c(x) = c(t)$ then $c(y) \neq c(z)$. In this work, we characterize $\mathcal{CN}_3$ which is the class of graphs whose oriented chromatic number is less than or equal to 3. A motivation to study $\mathcal{CN}_3$ due to the fact that oriented chromatic number for this class can be decided in polynomial time. We also discuss about the class $\mathcal{CN}_k$.

Keywords: Oriented Graph, Oriented Chromatic Number, Connected Graph.

1 Introdução

O problema da coloração orientada foi introduzido por Courcelle (1994). Nas duas últimas décadas esse problema foi estudado por muitos autores, veja o artigo de Sopena (2001) com uma boa revisão sobre o assunto. Posteriormente, muitos outros trabalhos sobre coloração orientada foram publicados. Nesta seção faremos uma pequena revisão sobre grafos e coloração orientada.

Um *grafo* é um par ordenado $G = (V, E)$, onde $V(G)$ é um conjunto finito e não vazio de vértices, e $E(G)$ é um conjunto de pares não ordenados de vértices distintos, chamados de arestas. Dois vértices distintos e adjacentes são *vizinhos*.

Um grafo H é um *subgrafo* de um grafo G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Então dizemos que G *contém* H como subgrafo. Um grafo G é *livre* de um grafo H se G não contém H como subgrafo.

Um *passeio* em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência de vértices $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ onde $v_i v_{i+1} \in E$, para todo $i = 0, \ldots, k-1$. O vértice v_0 é chamado de *vértice inicial* e v_k é o *vértice final* de P. O *comprimento* l de um passeio P é o número de arestas de P. Um passeio fechado é um passeio $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ onde $v_0 = v_k$. Um caminho (trilha) em um grafo G é um passeio onde os vértices (as arestas) são todos distintos. Um caminho com n vértices é denotado por P_n, seu comprimento é de $n-1$.

Um *ciclo* é um passeio fechado onde todos os vértices, com exceção de $v_0 = v_k$, são distintos. Um ciclo com n vértices é denotado por C_n. Um grafo $G = (V, E)$ que contém um ciclo como subgrafo é chamado *cíclico*, caso contrário, o grafo G é chamado *acíclico*.

Um grafo G é *conexo* se para cada par de vértices v e w, existe um caminho de v para w no grafo G, caso contrário, G é *desconexo*. Um *componente conexo* de um grafo G é um subgrafo conexo maximal de G. Dois grafos G_1 e G_2 são *disjuntos* se G_1 e G_2 não tem vértices em comum. Se G_1 e G_2 são disjuntos, a *união disjunta* de G_1 e G_2 é o grafo G formado pelos componentes conexos G_1 e G_2, denotaremos a união disjunta de G_1 e G_2 por $G_1 + G_2$.

Um *grafo completo* é um grafo onde os vértices são dois a dois adjacentes. O grafo completo com n vértices é denotado por K_n.

Uma *árvore* é um grafo conexo e acíclico. Uma *estrela* é um tipo especial de árvore em que apenas um vértice é adjacente a todos outros vértices. Uma *floresta* F é um grafo acíclico. Quando F é um grafo desconexo, cada componente conexa de F é uma árvore.

Um *grafo direcionado* ou *digrafo* é um par ordenado $D = (V, A)$, onde $V(D)$ é um conjunto de elementos denominados vértices e $A(D)$ é um conjunto de elementos denominados arcos. Cada arco é um par ordenado $e = (u, v) \in A(D)$ que tem origem u e destino v, iremos representar um arco (u, v) da forma reduzida uv. Seja $D = (V, A)$ um digrafo e $v, w \in V(D)$, w é chamado de *sucessor* de v se $vw \in A(D)$, e w é chamado *predecessor* de v se $wv \in A(D)$. Em um componente conexo de um digrafo, um vértice que não tem predecessores é chamado de *fonte*, e um vértice que não tem sucessores é chamado de *sumidouro*.

Seja G um grafo, a *orientação* de uma aresta $e \in E(G)$ é a substituição de e por um arco. Um *grafo orientado* $\vec{G} = (V, E)$ é um digrafo obtido de um grafo $G = (V, E)$ pela orientação de cada aresta, dizemos que $\vec{G}$ é uma orientação de G. Indicaremos o conjunto de vértices de um grafo orientado por $V(\vec{G})$ e o conjunto de arcos por $E(\vec{G})$. Todo grafo orientado é um digrafo, porém nem todo digrafo é um grafo orientado pois os digrafos admitem arcos múltiplos e laços. Um arco xy é um *laço* se $x = y$ e *arcos múltiplos* são arcos que possuem o mesmo par de vértices como extremidades.

Um caminho $\vec{P}$ tem uma *orientação linear* quando a orientação de cada aresta é da forma $v_i v_{i+1}$, para todo $i = 0, \ldots, k-1$. Um caminho $\vec{P}$ com uma *orientação linear* tem apenas um fonte e um sumidouro. Dizemos que existe um caminho de comprimento $n-1$

entre dois vértice u e v, quando existir um caminho $\vec{P}_n$ com uma orientação linear em que u é fonte e v é sumidouro ou vice-versa. Um ciclo $\vec{C}$ tem *orientação circular* quando a orientação de cada aresta é da forma $v_i v_{i+1}$, para todo $i = 0, \ldots, k-2$, e existe o arco $v_k v_1 \in E(\vec{C})$.

Um *torneio* T_n com n vértices é a orientação de cada aresta de um grafo completo K_n. Um torneio é *transitivo* se e somente se sempre que uv e vw são arcos, uw também é um arco. Um torneio T tem *orientação transitiva* quando T for um torneio transitivo.

Seja $\vec{G}$ um grafo orientado, $xy, zt \in E(\vec{G})$ e $C = \{1, 2, \ldots, k\}$ um conjunto de cores. Uma *k-coloração orientada* de $\vec{G}$ é uma função $c : V(\vec{G}) \to C$, tal que

i) $c(x) \neq c(y)$;

ii) $c(x) = c(t) \Rightarrow c(y) \neq c(z)$.

O número cromático orientado $\chi_o(\vec{G})$ é o menor inteiro k, tal que $\vec{G}$ admita uma k-coloração orientada.

Em uma k-coloração orientada de $\vec{G}$, se existe um arco de um vértice com a cor i para um vértice com a cor j, então não existe um arco de um vértice com a cor j para um vértice com a cor i. A definição da k-coloração orientada item (ii) implica que quaisquer vértices em um caminho $\vec{P}_3$ com orientação linear devem ter cores distintas.

Sejam dois grafos orientados $\vec{G}_1$ e $\vec{G}_2$, um *homomorfismo* de $\vec{G}_1$ em $\vec{G}_2$ é uma função $f : V(\vec{G}_1) \to V(\vec{G}_2)$, tal que se $xy \in E(\vec{G}_1)$, então $f(x)f(y) \in E(\vec{G}_2)$. Dado um homomorfismo f de $\vec{G}_1$ em $\vec{G}_2$, uma coloração orientada para $\vec{G}_2$ que use k cores define uma coloração orientada para $\vec{G}_1$, onde v ganha a mesma cor em $\vec{G}_1$ que u tem em $\vec{G}_2$, desde que $f(v) = u$. Se existe um homomorfismo f de $\vec{G}_1$ em $\vec{G}_2$, então $\vec{G}_2$ é chamado de *digrafo cor* para $\vec{G}_1$. A menor ordem k do grafo orientado $\vec{G}_2$ tal que $\vec{G}_1$ admite um homomorfismo para $\vec{G}_2$ é o *número cromático orientado* $\chi_o(\vec{G}_1)$ de $\vec{G}_1$. Esta definição é uma generalização mais natural do número cromático no caso não direcionado.

Podemos estender a definição de número cromático orientado a grafos não direcionados. Dado um grafo $G = (V, E)$, o número cromático orientado de G é o máximo de $\chi_o(\vec{G})$ para qualquer orientação $\vec{G}$ de G. Assim, um limite inferior para o número cromático orientado de um grafo G pode ser obtido escolhendo uma orientação qualquer $\vec{G}$ de G e determinando $\chi_o(\vec{G})$.

Seja G um grafo, definimos a classe $\mathcal{CN}_3 = \{G; \chi_o(G) \leq 3\}$. Um dos objetivos deste trabalho é caracterizar a classe de grafos $\mathcal{CN}_3$. Uma motivação para estudar $\mathcal{CN}_3$ se deve ao fato de que o número cromático orientado para esta classe pode ser decidido em tempo polinomial, veja o próximo teorema em Klostermeyer and MacGillivray (2004).

Teorema 1.1. *(Klostermeyer and MacGillivray (2004)) Seja $\vec{G}$ um grafo orientado e k um inteiro positivo fixo. Se $k \leq 3$, então pode ser decidido em tempo polinomial se $\vec{G}$ tem número cromático orientado com k cores. Se $k \geq 4$, então decidir se $\vec{G}$ tem número cromático orientado com k cores é* NP*-completo, mesmo se a entrada é restrita a digrafos conexos.*

2 A Classe $\mathcal{CN}_3$

Nesta seção, estamos interessados em caracterizar a classe $\mathcal{CN}_3 = \{G; \chi_o(G) \leq 3\}$. Primeiro vamos considerar o caso em que G é um grafo conexo e depois considerar G um grafo desconexo.

Lema 2.1. *Seja G um grafo conexo com $|V| \geq 4$, se G contém K_3 como subgrafo então $\chi_o(G) \geq 4$.*

Demonstração. Suponha G_1 um grafo com 4 vértices, um K_3 formado pelos vértices u, v, w e um vértice t vizinho de um único vértice de K_3. Sem perda de generalidade seja t vizinho do vértice u. Seja $\vec{G}_1$ obtido a partir de G_1 por uma orientação transitiva $\vec{K}_3$ para K_3 no qual u seja o sumidouro e, além disso, o arco ut com origem em u e destino em t. Pela construção de $\vec{G}_1$ todo vértice de $\vec{K}_3$ tem um caminho mínimo de comprimento no máximo 2 até o vértice t, assim pelo item (ii) da k-coloração orientada, a cor de t é diferente da cor de qualquer vértice de $\vec{K}_3$. Pela regra (i) da k-coloração orientada são necessárias 3 cores para colorir $\vec{K}_3$, com uma cor a mais para colorir t, então $\chi_o(G_1) = 4$. Todo grafo conexo G com $|V| \geq 4$ que contém K_3 como subgrafo também contém G_1 como subgrafo, então $\chi_o(G) \geq \chi_o(G_1) = 4$. □

Pelo Lema 2.1, sabemos que os grafos conexos com mais de 4 vértices e que não são livres de K_3 não pertencem a classe $\mathcal{CN}_3$.

Lema 2.2. *Seja G um grafo conexo. Se G contém C_k como subgrafo, com $k \geq 4$, então $\chi_o(G) \geq 4$. Em especial, se G contém C_5 como subgrafo então $\chi_o(G) \geq 5$.*

Demonstração. Vamos começar pelo ciclo C_5. Seja $\vec{C}_5$ obtido a partir de C_5 por uma orientação circular respectivamente nos vértices v_0, v_1, v_2, v_3, v_4. Nesta configuração qualquer vértice v_i de $\vec{C}_5$ ou tem um caminho de comprimento no máximo 2 até qualquer outro vértice v_j, ou v_j tem um caminho de comprimento no máximo 2 até v_i, $v_i \neq v_j$. Pela definição de k-coloração orientada item (ii) a cor de v_i é diferente da cor de v_j. Assim, $\chi_o(G) \geq \chi_o(C_5) = 5$.

O restante da prova dividiremos em três casos:

Caso 1: (G contém C_{3k} como subgrafo, $k > 1$) Suponha que $\chi_o(G) \leq 3$, que a orientação do ciclo C_{3k} tem apenas uma fonte e um sumidouro, e que o sumidouro seja vizinho da fonte. Vamos colorir os vértices de C_{3k} a partir da fonte com as cores 1,2 e 3. Designamos a cor 1 para fonte e seguindo o maior caminho que leva ao sumidouro coloque a cor 2 ao vértice vizinho a fonte, depois a cor 3 ao próximo vértice no caminho, novamente a cor 1 ao próximo vizinho e colorindo sucessivamente até o vértice que antecede o sumidouro neste caminho. Como supomos que $\chi_o(G) \leq 3$, o sumidouro poderá ser colorido somente com as cores 1, 2 e 3. Não podemos atribuir a cor 1 ao sumidouro, pois a fonte foi colorida com a cor 1 e é seu vizinho. Também não podemos atribuir a cor 2 ao sumidouro, pois $|V| = 3k$ e assim o antecessor do sumidouro no maior caminho até a fonte foi colorido com a cor 2. Então o sumidouro deve ser colorido pela cor 3. Ocorre que em algum ponto do maior caminho entre a fonte e o sumidouro existe um vértice de cor 3 que é antecessor de um vértice com cor 1. Note que a fonte tem cor 1 e o sumidouro tem cor 3, assim a condição (ii) da definição de k-coloração orientada é violada, uma contradição no fato de supormos que $\chi_o(G) \leq 3$.

Caso 2: (G contém C_{3k+1} como subgrafo, $k \geq 1$) Suponha que $\chi_o(G) \leq 3$ e que C_{3k+1} tem orientação circular. Vamos colorir os vértices de C_{3k+1} a partir de um vértice qualquer com as cores 1, 2 e 3. Iniciando a coloração orientada com a cor 1, podemos seguir o caminho orientado designando as cores 2 e 3 aos vértices seguintes, depois novamente designando a cor 1 ao sucessor do vértice de cor 3, assim podemos colorir sucessivamente os vértices até restar apenas um vértice sem uma cor designada. Como $|V| = 3k + 1$, o vértice que não foi colorido é sucessor de um vértice com a cor 3 e predecessor de um vértice com a cor 1. Existe um caminho de comprimento 2 do vértice não colorido até um vértice colorido com a cor 2, assim o vértice não colorido também não pode ser colorido com a cor 2, isto é uma contradição.

Caso 3: (G contém C_{3k+2} como subgrafo, $k \geq 1$) Suponha que $\chi_o(G) \leq 3$ e que C_{3k+2} tem orientação circular. Vamos colorir os vértices de C_{3k+2} a partir de um vértice qualquer com as cores 1, 2 e 3. Iniciando a coloração orientada com a cor 1, podemos seguir o caminho orientado designando as cores 2 e 3 aos vértices seguintes, depois novamente designando a cor 1 ao sucessor do vértice de cor 3, assim podemos colorir sucessivamente os vértices até restar dois vértices sem uma cor designada. Existe um caminho de comprimento máximo 2 de ambos vértices não coloridos para vértices coloridos com as cores 1, 2 e 3. Desta forma, não podemos designar as cores 1,2 e 3 a nenhum dos dois vértices restantes, uma contradição no fato de supormos que $\chi_o(G) \leq 3$. □

Teorema 2.3. *Seja G um grafo conexo. O grafo $G \in \mathcal{CN}_3$ se e somente se, ou G é um K_3 ou G é uma árvore.*

Demonstração. Seja G um grafo conexo. Suponha que $G \in \mathcal{CN}_3$. Se G é acíclico então G é uma árvore e por Culus and Demange (2006) $\chi_o(G) \leq 3$. Se G não é acíclico e $|V(G)| = 3$ então $G = K_3$ e $\chi_o(K_3) = 3$. Se $|V(G)| \geq 4$, então $\chi_o(G) \geq 4$ pelos Lemas 2.1 e 2.2 e portanto $G \notin \mathcal{CN}_3$. Logo G é um K_3 ou é uma árvore.

Suponha que G é um K_3 ou uma árvore. Como $\chi_o(K_3) = 3$ e se G é uma árvore, por Culus and Demange (2006) temos $\chi_o(G) \leq 3$, temos que $G \in \mathcal{CN}_3$. □

Se G é conexo sabemos do Teorema 2.3 quais grafos pertencem a $\mathcal{CN}_3$. Agora, estaremos interessados em encontrar a classe $\mathcal{CN}_3 = \{G; \chi_o(G) \leq 3\}$ quando G for um grafo desconexo.

Lema 2.4. *Seja G um grafo com q componentes conexas, $q \geq 2$, e além disso, uma componente conexa X_i contém K_3 como subgrafo. Se existe uma componente conexa X_j, $i \neq j$, que contém K_3 ou P_4 como subgrafo então $\chi_o(G) \geq 4$.*

Demonstração. Considere um grafo G com pelo menos duas componentes conexas. Suponha que existam duas componentes conexas X_i e X_j, $i \neq j$, tal que ambas contenham K_3 como subgrafo.

Obtemos um grafo orientado $\vec{G}$ a partir de G com $\chi_o(\vec{G}) \geq 4$. Para isso, basta fazer o subgrafo K_3 da componente X_i ser um torneio circular e o subgrafo K_3 da componente X_j ser um torneio transitivo. São necessárias 3 cores 1,2,3 para uma coloração orientada do subgrafo K_3 da componente X_i, com a propriedade que nenhuma cor incide nas outras duas. Como em uma coloração orientada do subgrafo K_3 da componente X_j, uma das cores incide nas outras duas, uma quarta cor é requerida na componente X_j e $\chi_o(G) \geq 4$.

Agora, suponha que a componente X_j contém P_4 como subgrafo. No grafo orientado $\vec{G}$ obtido de G, escolhemos a orientação transitiva $\vec{K}_3$ para o subgrafo K_3 da componente X_i e, escolhemos o caminho com orientação linear $\vec{P}_4$ para o subgrafo P_4 da componente X_j. Sabemos que $\chi_o(\vec{K}_3) = 3$, vamos utilizar as cores 1, 2 e 3 na coloração orientada do subgrafo $\vec{K}_3$ da componente X_i. Escolhemos para $\vec{K}_3$ a coloração orientada em que o vértice com a cor 1 é o fonte e o vértice com a cor 2 é o sumidouro. Mostraremos que, utilizando as restrições obtidas na coloração orientada do subgrafo $\vec{K}_3$ da componente X_i, não é possível colorir o subgrafo $\vec{P}_4$ da componente X_j somente com as cores 1, 2 e 3.

Dividiremos em três casos a considerar:

Caso 1: (Atribuir a cor 1 para a fonte de $\vec{P}_4$) Como o vértice com a cor 1 antecede o vértice com a cor 2 na coloração orientada de $\vec{K}_3$, podemos atribuir a cor 2 ao sucessor da fonte em $\vec{P}_4$. O vértice com a cor 2 em $\vec{K}_3$ é o sumidouro, assim não podemos atribuir nenhuma das cores 1, 2 ou 3 ao sucessor do vértice com a cor 2 em $\vec{P}_4$. Uma quarta cor é necessária na componente X_j.

Outro sub-caso é atribuir a cor 3 ao sucessor da fonte em $\vec{P}_4$, pois o vértice com a cor 1 também antecede o vértice com a cor 3 na coloração orientada de $\vec{K}_3$. Podemos atribuir a cor 2 ao sucessor do vértice com a cor 3 em $\vec{P}_4$, mas novamente a cor 2 é atribuída a um vértice que não é sumidouro na orientação de $\vec{P}_4$ e uma quarta cor é necessária na componente X_j.

Caso 2: (Atribuir a cor 2 para a fonte de $\vec{P}_4$) O vértice com a cor 2 na coloração orientada de $\vec{K}_3$ é sumidouro, portanto nenhuma das cores 1, 2 ou 3 pode ser atribuída ao sucessor da fonte em $\vec{P}_4$. Uma quarta cor é requerida na componente X_j.

Caso 3: (Atribuir a cor 3 para a fonte de $\vec{P}_4$) Seguindo a restrição obtida na coloração de $\vec{K}_3$, podemos atribuir a cor 2 ao sucessor da fonte em $\vec{P}_4$. Novamente, o sucessor do vértice com a cor 2 em $\vec{P}_4$ não pode ser colorido com nenhuma cor usada em $\vec{K}_3$. Uma quarta cor é necessária na componente X_j.

Concluímos que, $\chi_o(G) \geq 4$. □

Segue do Lema 2.4 que o grafo $K_3 + P_4 \notin \mathcal{CN}_3$. Para observar este fato usamos o exemplo da Figura 1, onde K_3 é um torneio transitivo e P_4 tem orientação linear. Fixando uma coloração orientada qualquer para o torneio $\vec{K}_3$, não é possível uma atribuição de cores para $\vec{P}_4$ que utilize apenas as cores da coloração orientada de $\vec{K}_3$.

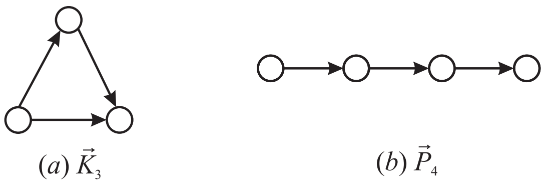

Figura 1: Grafo $K_3 + P_4$.

Lema 2.5. *Seja F uma floresta formada pelo conjunto $\{G_1, G_2, G_3, \ldots, G_q\}$ de q árvores disjuntas. Então $\chi_o(F) = \max\{\chi_o(G_i); i = 1, 2, 3, \ldots, q\}$.*

Demonstração. De acordo com Culus and Demange (2006) se G é uma árvore com pelo menos uma aresta, então para toda orientação $\vec{G}$ de G existe uma k-coloração orientada com $k = 2$ ou $k = 3$. Mostraremos que existe um homomorfismo de F em G_i.

Suponha que alguma componente conexa G_j de F é um vértice isolado v. Neste caso, $\chi_o(G_j) = 1$. Seja $\vec{G}_i$ a orientação de uma componente conexa de F com uma k-coloração orientada, onde $k \in \{1, 2, 3\}$, dado um vértice qualquer $u \in V$, existe um homomorfismo de $\vec{G}_j$ em $\vec{G}_i$ fazendo $v \to u$. Este homomorfismo é válido desde que $\vec{G}_j$ não tenha arco.

Agora, suponha que a orientação $\vec{G}_j$ de alguma componente conexa G_j de F tem $\chi_o(\vec{G}_j) = 2$, então $\vec{G}_j$ é livre de P_3 com orientação linear. Nesta configuração só existem fontes e sumidouros em $\vec{G}_j$. Seja $\vec{G}_i$ uma orientação de uma componente conexa de F com uma 2-coloração orientada. Então basta mapear cada fonte de $\vec{G}_j$ em uma fonte de $\vec{G}_i$ e cada sumidouro de $\vec{G}_j$ em um sumidouro de $\vec{G}_i$. Este mapeamento é um homomorfismo válido pois $f(x)f(y) \in E(\vec{G}_i)$ desde que $xy \in E(\vec{G}_j)$. Seja $\vec{G}_i$ a orientação de uma componente conexa de F com uma 3-coloração orientada, então $\vec{G}_i$ contém um caminho $\vec{P}_3$ com orientação linear. Suponha que a coloração de $\vec{G}_i$ utiliza as cores 1, 2 e 3, de forma que os vértices com a cor 1 são predecessores dos vértices com a cor 2 e, os vértices com a cor 2 são predecessores dos vértices com a cor 3. Um homomorfismo de $\vec{G}_j$ em $\vec{G}_i$ pode ser obtido fazendo com que toda fonte em $\vec{G}_j$ seja mapeada em vértices com a cor 1 em $\vec{G}_i$, e todo sumidouro em $\vec{G}_j$ seja mapeado em vértices com a cor 2 em $\vec{G}_i$. Este homomorfismo é válido, pois os vértices com a cor 1 são predecessores dos vértices com a cor 2 na coloração orientada de $\vec{G}_i$.

Finalmente, suponha que a orientação $\vec{G}_j$ de alguma componente conexa G_j de F tem $\chi_o(\vec{G}_j) = 3$. Seja $\vec{G}_i$ a orientação de uma componente conexa de F com uma 3-coloração orientada. Suponha que a coloração de $\vec{G}_i$ utiliza as cores 1, 2 e 3, de forma que os vértices com a cor 1 são predecessores dos vértices com a cor 2 e, os vértices com a cor 2 são predecessores dos vértices com a cor 3. Seguindo estas restrições só podemos atribuir a cor 1 ao sucessor de algum vértice com a cor 3 em $\vec{G}_i$. Estas restrições também são válidas para $\vec{G}_j$, logo todas as componentes conexas de $\vec{F}$ tem um homomorfismo ao ciclo com orientação circular. Assim, se $\chi_o(\vec{G}_i) \geq \chi_o(\vec{G}_j)$, $j = \{1, \ldots, q\}$, então existe um homomorfismo de cada $\vec{G}_j$ em $\vec{G}_i$. □

Corolário 2.6. *Toda floresta orientada $\vec{F}$ tem um homomorfismo ao ciclo $\vec{C}_3$ com orientação circular.*

Demonstração. Toda árvore orientada $\vec{G}$ com pelo menos uma aresta tem uma k-coloração orientada, com $k = 2$ ou $k = 3$. Seja $\vec{G}_1$ uma árvore orientada com uma 3-coloração orientada. Se $\vec{G}$ tem k-coloração orientada, com $k = 2$ ou $k = 3$, pela prova do Lema 2.5 temos que existe um homomorfismo de $\vec{G}$ em $\vec{G}_1$. Também pela prova do Lema 2.5 sabemos que, toda árvore orientada $\vec{G}_1$ com uma 3-coloração orientada tem um homomorfismo em relação ao ciclo $\vec{C}_3$ com orientação circular. □

Teorema 2.7. *Seja G um grafo. $G \in \mathcal{CN}_3$ se e somente se G é um dos seguintes grafos:*

1. *Uma floresta;*

2. *Um $K_3 + S$, onde S é uma floresta de estrelas.*

Demonstração. Suponha $G \in \mathcal{CN}_3$. Se G é cíclico então pelo Lema 2.1, Lema 2.2 e Lema 2.4 existe no máximo uma componente conexa G_i de G cíclica e neste caso $G_i = K_3$. Ainda pelo Lema 2.4 as demais componentes têm diâmetro menor que 3, e portanto G é um K_3 unido a uma floresta de estrelas. Se G ácíclico, então G é uma floresta e pelo Lema 2.5 e Culus and Demange (2006) temos $\chi_o(\vec{G}) \leq 3$.

Reciprocamente, suponha primeiro que G seja uma floresta. Para toda árvore G_i de G sabemos $\chi_o(G_i) \leq 3$, veja Culus and Demange (2006). Pelo Lema 2.5 concluímos que $\chi_o(G) \leq 3$. Agora suponha que $G = K_3 + S$. A componente conexa K_3 pode ser orientada de duas formas distintas, com orientação circular ou transitiva. Caso a componente K_3 tenha uma orientação circular $\vec{K}_3$, sabemos do Corolário 2.6 que $\vec{S}$ tem um homomorfismo em $\vec{K}_3$ e $\chi_o(G) \leq 3$. Agora seja a componente K_3 com uma orientação transitiva $\vec{K}'_3$. Sem perda de generalidade escolhemos a coloração para $\vec{K}'_3$ que utiliza as cores 1, 2 e 3, de forma que o vértice com a cor 1 é predecessor dos vértices com as cores 2 e 3, e o vértice com a cor 2 é predecessor do vértice com a cor 3. Definimos um homomorfismo de $\vec{S}$ em $\vec{K}'_3$ fazendo com que toda fonte em $\vec{S}$ seja mapeada no vértice com a cor 1 em $\vec{K}'_3$, todo sumidouro em $\vec{S}$ seja mapeado no vértice com a cor 3, caso existam vértices que não sejam fontes e nem sumidouros em $\vec{S}$ estes serão mapeados no vértice com a cor 2. Este homomorfismo é fácil de ser verificado, desde que somente os vértices que tem mais de um vizinho em $\vec{S}$ poderão ser mapeados no vértice com a cor 2. □

Na seção a seguir, definiremos a classe $\mathcal{CN}_k = \{G;\, \chi_o(G) \leq k\}$ e descreveremos alguns grafos interessantes.

3 A classe $\mathcal{CN}_k$ e algumas generalizações

Seja G um grafo, definimos a classe $\mathcal{CN}_k = \{G; \chi_o(G) \leq k\}$. Para $k \in \{1, 2\}$ é fácil responder quais grafos pertencem a classe $\mathcal{CN}_k$. Se $k = 1$ então $\mathcal{CN}_k$ é a classe formada por vértices isolados. Se $k = 2$ então $\mathcal{CN}_k$ é classe formada por caminhos P_2 mais vértices isolados e pelos Teoremas 2.3 e 2.7 sabemos quais grafos pertencem a classe $\mathcal{CN}_3$.

O estudo da classe $\mathcal{CN}_3$ nos motivou a estudar o número cromático orientado para grafos desconexos. Um exemplo pode ser visto na Figura 1, onde o número cromático de um grafo G é maior que o número cromático de cada uma de suas componentes conexas separadamente. Na Figura 2, onde $G = K_4 + P_5$, considere a orientação de G com uma orientação transitiva $\vec{K}_4$ para K_4 e $\vec{P}_5$ uma orientação linear para P_5. Assim temos mais um exemplo em que $\chi_o(G) > \chi_o(K_4)$ e $\chi_o(G) > \chi_o(P_5)$. Desde que $\chi_o(\vec{K}_4) = 4$, atribuímos uma 4-coloração orientada para $\vec{K}_4$. Utilizando as restrições da 4-coloração orientada de $\vec{K}_4$ na componente $\vec{P}_5$, podemos provar que $\vec{P}_5$ não pode ser colorido com somente 4 cores e uma quinta cor é requerida, assim o grafo $G = K_4 + P_5 \notin \mathcal{CN}_4$.

(a) $\vec{K}_4$ (b) $\vec{P}_5$

Figura 2: Grafo $\vec{K}_4 + \vec{P}_5$.

A seguir determinamos o número cromático orientado do grafo $G = K_p + P_q$, e mostramos que $G \in \mathcal{CN}_{p+1}$.

Proposição 3.1. *Seja $G = K_p + P_q$, então $\chi_o(G) = p + 1$, onde $q > p \geq 2$.*

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que $\chi_o(G) \geq p + 1$. Por definição, $\chi_o(G)$ é o maior $\chi_o(\vec{G})$ para todas orientações $\vec{G}$ de G.

Seja $\vec{K}'_p$ uma orientação transitiva para K_p. Usando as cores de 1 a p, colora $\vec{K}'_p$ de forma que se $i < j$ existe um arco da cor i para a cor j. Por outro lado, considere $\vec{P}'_q$ a orientação linear de P_q com fonte v_q e sumidouro v_1. Assuma por absurdo que é possível colorir P_q com as p cores de $\vec{K}'_p$. Note primeiro, que se a cor 1 é usada em algum vértice v_i com $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ não resta cor para colorir v_{i+1}. Note agora, que se atribuimos a cor $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ para v_i, a cor t atribuída para v_j com $j > i$ satisfaz $t < k$, desde que $c(v_j) < c(v_{j-1}) < \ldots < c(v_{i+1}) < c(v_i)$ pois temos a seguinte orientação: $v_j v_{j-1}, v_{j-1} v_{j-2}, \ldots, v_{i+1} v_i$. Assim, p cores são atribuidas aos vértices $v_1, \ldots, v_p$. Logo a cor 1 é usada para colorir algum vértice $v_i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, uma contradição.

Agora, vamos mostrar que $\chi_o(G) \leq p + 1$. Seja $\vec{K}_p$ qualquer orientação para K_p. Como $\chi_o(\vec{K}_p) = p$, sem perda de generalidade, admitimos uma coloração $\vec{K}_p$ usando as cores de 1 a p. Vamos adicionar um vértice v ao grafo $\vec{K}_p$, e caso exista fonte f ou sumidouro s em $\vec{K}_p$ adicionamos os arcos vf e sv, denominamos o grafo resultante de $\vec{K}_{p+1}$, as demais arestas assumem qualquer orientação de forma que v não seja nem fonte nem sumidouro no novo grafo. Atribuímos a cor $p + 1$ para o vértice v. Note que $\vec{K}_{p+1}$ não possui fontes nem sumidouros. Por outro lado, considere qualquer orientação $\vec{P}_q$ de P_q. Vamos colorir $\vec{P}_q$ utilizando as restrições de cores do grafo $\vec{K}_{p+1}$. Iniciamos a coloração por um dos vértices de grau 1, atribuindo uma cor i, $1 \leq i \leq p$. A partir deste vértice inicial v_1 vamos seguir colorindo sempre o vizinho que ainda não foi colorido. Pela construção de $\vec{K}_{p+1}$ o vértice com a cor i não é fonte e nem sumidouro, assim podemos colorir o vizinho v_2 de v_1 em $\vec{P}_q$ independente da orientação do arco ser v_1v_2 ou v_2v_1. Por construção, nenhum dos vértice de $\vec{K}_{p+1}$ é fonte ou sumidouro, assim podemos continuar colorindo $\vec{P}_q$ com as $p+1$ cores de $\vec{K}_{p+1}$ e $\chi_o(G) \leq p + 1$. □

4 Conclusões

Neste trabalho, definimos e caracterizamos a classe $\mathcal{CN}_3$, dos grafos com $\chi_o(G) \leq 3$. Um grafo conexo G pertence a classe $\mathcal{CN}_3$ se e somente se G é uma árvore ou G é um K_3. Um grafo desconexo G pertence a classe $\mathcal{CN}_3$ se e somente se G é uma floresta ou G é $K_3 + S$, onde S é uma floresta de estrelas.

Verificamos que para toda floresta F, $\chi_o(F)$ pode ser determinado pela componente conexa de F com maior número cromático orientado. Por outro lado, considerando grafos desconexos em geral, não é possível determinar o número cromático orientado através da componente conexa com maior número cromático orientado. Isto nos motivou a estudar o número cromático orientado para grafos desconexos. Neste sentido, determinamos que $\chi_o(K_p + P_q) = p + 1$.

Para trabalhos posteriores pretendemos o estabelecimento do número cromático orientado para uma classe mais ampla de grafos desconexos, por exemplo quando tivermos duas ou mais componentes completas.

Agradecimentos

Este trabalho foi realizado com apoio do CNPq, CAPES e FAPERJ.

Referências

Courcelle, B. (1994). The monadic second order logic of graphs vi: On several representations of graphs by relational structures. *Discrete Applied Mathematics*, 54:117–149.

Culus, J. and Demange, M. (2006). Oriented coloring: Complexity and approximation. *SOFSEM*, LNCS 3831:226–236.

Klostermeyer, W. and MacGillivray, G. (2004). Homomorphisms and oriented colorings of equivalence classes of oriented graphs. *Discrete Mathematics*, 274:161–172.

Sopena, E. (2001). Oriented graph coloring. *Discrete Mathematics*, 229:359–369.