SELEÇÃO DE PORTFÓLIOS POR MEIO DE BUSCA TABU HÍBRIDA: MODELO DE MÉDIA VARIÂNCIA EM LOTES

Melquiades Pereira de Lima Junior
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Campus Universitário Lagoa Nova, CEP 59072-970 | Natal/RN - Brasil
melquiades.pereira@gmail.com

Mariana Rodrigues de Almeida
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Campus Universitário Lagoa Nova, CEP 59072-970 | Natal/RN - Brasil
almeidamariana@yahoo.com

Rodrigo Jose Pires Ferreira
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Campus Universitário Lagoa Nova, CEP 59072-970 | Natal/RN - Brasil
rodjpf@gmail.com

RESUMO

Um dos problemas fundamentais em finanças é a escolha de ativos para investimento. O primeiro método elaborado para resolver este problema foi o de média e variância elaborado por Markowitz (1952a), a combinação entre esses dois fatores resultam na redução do risco. Apesar da importância de sua contribuição, o método inicial desenvolvido proporciona a aquisição em lotes e custos de transação. A partir desse modelo adaptado, esse trabalho apresenta uma abordagem alternativa de resolução desse problema considerando variáveis discretas, por meio de Busca Tabu, mesclada com a MIQP - programação quadrática inteira mista. Para fins de análise, os resultados foram comparados pela própria MIQP isoladamente, por meio de um software comercial. Com um conjunto de 250 ativos, foi possível elaborar cinco instâncias para testes empíricos, o que levou a demonstração de um bom desempenho computacional. Algumas considerações foram feitas e sugestões de futuros estudos.

PALAVARAS CHAVE. Seleção Portfólio, Markowitz, Busca Tabu.

Área principal (Metaheuristicas)

ABSTRACT

A fundamental problem in finance is the choice of assets for investment. The first method developed to solve this problem was the mean and variance developed by Markowitz (1952a), the combination of these two factors result in reducing the risk. Despite the importance of their contribution, the method developed provides the initial purchase in lots and transaction costs. From this adapted model, this paper presents an alternative approach to solve this problem by considering discrete variables, using Tabu Search, mixed with the MIQP - mixed integer quadratic programming. For purposes of analysis, the results were compared for their own MIQP alone, through a commercial software. With a set of 250 assets, five instances it was possible to develop empirical tests, which led to a demonstration of good performance computing. Some considerations were made and suggestions for future studies.

KEYWORDS. Portfolio Selection. Markowitz. Tabu Search.

Main area (Metaheuristics)

1. Introdução

Em função da evolução dos mercados nas últimas décadas, pesquisas recentes da OECD (2010) reforçam a reestruturação do sistema financeiro global como forma de crescimento em longo prazo e do equilíbrio de balança monetária. Em contribuição ao desenvolvimento e a competitividade dos mercados, países emergentes como Brasil, China, Índia e África do Sul são considerados como fontes potenciais de recursos e de investimentos, denominados de *BRICS*.

A teoria de portfólio é um problema matemático de apoio a tomada de decisão de investidores e captadores de recursos de forma a contribuir com a maximização da riqueza e do bem estar do indivíduo. A maximização do bem estar reflete a uma escolha que aumente sua satisfação (MARKOWITZ, 1952b).

A evolução histórica culminou na construção de vários modelos na literatura da teoria e no mercado. Elton e Gruber (2004), mediante estudo sobre a evolução histórica, afirmam que esses modelos adquiriram grande repercussão e complexidade por meio da utilização de métodos matemáticos e computacionais que contribuem para a resolução e aplicação da moderna teoria de carteiras de investimentos.

Esse instrumento aplica-se em diferentes áreas das finanças. Há um vasto número de pesquisas inovadoras em torno do campo, tanto da forma de modelagem da diversificação em Speranza (1996), Mansini e Speranza (1999), Mansini *et al* (2003), Dias (2009), como também de métodos de estimativa de retornos e das variâncias dos ativos como em Albuquerque (2009), Ferreira *et al* (2009), sempre com o propósito de obter uma medição mais precisa dos retornos e da volatilidade das carteiras de investimentos.

Com base no estudo realizado por Di Gaspero *et al* (2007), esse trabalho teve como objetivo elaborar um algoritmo híbrido utilizando o método de Busca Tabu, como apoio a resolução do modelo Markowitz (1959) de Média - Variância para seleção de portfólio de investimentos, aplicado no mercado financeiro brasileiro. O estudo contém a adaptação do modelo clássico com a utilização de variáveis discretas, levando em consideração a aquisição por lotes e custos de transação da Bolsa de Valores de São Paulo.

O modelo M-V se tornou robusto capaz de ser utilizado mesmo com a quebra dos pressupostos de normalidade dos retornos ou da função de utilidade quadrática (MARKOWITZ, 1959; ELTON; GRUBER, 2004). Apesar de alguns modelos se aproximarem dos resultados do M-V, pesquisas, por meio de comparações com outros modelos, confirmam a robustez e consistência do M-V, conforme Cohen e Pogue (1967), Levy e Kroll (1976), Konno (1990), Konno e Yamazaki (1991), Pástor (2000) e Alexander e Baptista (2000).

2. Seleção de Portfólio

A Teoria de Portfólio possui uma estrutura base pré-definida para a busca de soluções, o modelo inicia com a seleção de coeficientes desenvolvidos por Markowitz (1952a, 1959). Dentre os coeficientes, os dois primeiros grupos de fatores são a modelagem dos retornos e da volatilidade dos ativos. O segundo passo consiste em determinar as restrições de mercado. Com estes três primeiros aspectos definidos, o modelo é formulado. O último aspecto e de mais difícil é o método de resolução do modelo, que consiste em buscar o menor risco a um determinado retorno.

Tobin (1958) e Fama (1965) descrevem o modelo de cálculo da taxa de retorno de um ativo em determinado momento e periodicidade (dia, mês, ano, etc.) como sendo o percentual de variação de seu preço entre dois períodos de tempo. Conforme demonstrado na Equação 1, o retorno $\mathrm{R_i}$ do ativo é consequência da relação entre o preço do ativo no momento n dado por $\mathrm{y_n}$ e o preço no momento anterior dado por $\mathrm{y_{n-1}}$. Sem levar em consideração a distribuição de dividendos.

$$R_i = \frac{y_n - y_{n-1}}{y_{n-1}} = \frac{y_n}{y_{n-1}} - 1 \qquad \text{[Eq. 1]}$$

Para fins de tratamento, segundo Fama (1965) e Tsai (2005), é mais adequada a utilização de retornos do que de preços, como também a logaritmização dos retornos favorece o tratamento estatístico, a utilização de modelos de previsão destes retornos, como também o pressuposto de normalidade. Na Equação 2, o log, define o retorno composto continuamente ou simplesmente log-retorno $\mathrm{r_i}$, consequência da logaritmização da Equação 1.

$$r_i = \log(1 + R_i) = \log\left(\frac{y_n}{y_{n-1}}\right) = [\log y_n - \log y_{n-1}] \quad \text{[Eq. 2]}$$

Após quantificar os retornos históricos o objetivo do portfólio é analisar um retorno futuro com base em uma esperança de preço $\mathrm{y_t}$ em um momento t. Um ativo possui um retorno bruto que pode ser denominado por $\mathrm{R_i}$ em percentual, onde essa variável pode ser classificada por um vetor de retornos de um ativo i com um número finito de possibilidades: $\mathrm{R_{1i}, R_{2i}, \dots, R_{ti}}$.

Para efeito da construção de um portfólio, a esperança de retorno será consequência da estimativa do preço futuro do ativo. A literatura após o desenvolvimento da teoria de portfólio desenvolveu formulações, que tratam especialmente da definição dos retornos futuros dos ativos. Inicialmente pesquisas foram desenvolvidas sob aspectos e características dos retornos e do comportamento dos preços dos ativos como Fama (1965), como também da logaritmização dos retornos. Outro importante aspecto foi o desenvolvimento de teorias de equilíbrio que fornecessem estimativas precisas, por Sharpe (1964) denominada de CAPM *Capital Asset Pricing Model*. O modelo CAPM tradicional é descrito na Equação 3.

$$E(R)_i = \bar{R}_i = R_f + \beta(\bar{R}_m - R_f) \quad \text{[Eq. 3]}$$

A estrutura do CAPM apresentada descreve a expectativa do retorno $\mathrm{E(R)_i}$ representada por $\bar{\mathrm{R}}_\mathrm{i}$ composta pelo retorno do ativo em um momento anterior R_f, o retorno esperado do mercado $\bar{R}_m$ e o beta do ativo em relação ao mercado β. Esse coeficiente beta demonstra o coeficiente angular da reta mencionada.

No caso da previsão do Ibovespa foi utilizado o modelo misto auto-regressivo de médias móveis denominado de ARMA, o modelo inclui tanto termos auto-regressivos AR como de médias móveis MA. O processo ARMA(p,q) de ordem 1 é descrito conforme Equação 4. y_t é a predição de valores no tempo futuro t, dado um intercepto δ relacionado com a média de y e θ_i que é um parâmetro autoregressivo, coeficientes estimados por meio de mínimos quadrados. e_i são erros aleatórios não correlacionados, não observáveis, com média zero e variância constante σ_e^2 (TSAI, 2005).

$$\bar{R}_m = y_t = \delta + \theta_1 y_{t-1} + e_t + \alpha_1 e_{t-1} \quad \text{[Eq. 4]}$$

A estimativa do risco, por sua vez, é feita por meio da correlação que indica que dois ativos podem minimizar o risco de um investimento em função da combinação entre eles, o que reflete na prática é que dois ativos para reduzir o risco conjunto devem representar dois mercados que não estão diretamente relacionados, pois a perda de um dos investimentos acarreta na recuperação de outro. A correlação pode ser totalmente inversa, coeficiente de correlação -1, correlação totalmente direta +1 e sem correlação aproximando-se de zero. A covariância e a correlação entre dois ativos R_i e R_j são expressas pelas Equações 5 e 6 respectivamente (TSAI, 2005).

$$COV[E(R_i), E(R_j)] = \sigma_{ij} = E[(R_i - \bar{R}_i)(R_j - \bar{R}_j)] \quad \text{[Eq. 5]}$$

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \quad \text{[Eq. 6]}$$

3. Modelo Markowitz Discreto

A primeira modelagem realizada do modelo por Markowitz (1952a) foi descrita como um relatório mais simples e objetivo. Posteriormente, o modelo foi detalhado e sistematizado de forma mais ampla e completa por Markowitz (1959). O modelo visa maximizar a riqueza do investidor, o retorno, a um determinado nível de risco, ou minimizar o risco a um determinado nível de retorno. O modelo M-V discreto foi utilizado por Chiodi *et al* (2003), Marques (2007), Di Gaspero *et al* (2007), Li e Tsai (2008) e Golmakani e Fazel (2011). No modelo foi elaborado o seguinte problema adaptado aos custos de transação da Bovespa (2011), conforme as Equações 7, 8, 9, 10 e 11.

Min:

$$\sigma_p^2 = \sum_{j\epsilon N}\sum_{j\epsilon N} x_i x_j \sigma_{ij} \qquad \text{[Eq. 7]}$$

s.a:

$$\left[DV\sum_{i=1}^{n} E(R)_i p_i x_i\right] - \left[DC\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right] \geq R_e \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \qquad \text{[Eq. 8]}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geq Imin \qquad \text{[Eq. 9]}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq Imax \qquad \text{[Eq. 10]}$$

$$x_i \geq 0$$
$$i = 1,2,\dots,n, x_i\ \acute{e}\ inteiro \qquad \text{[Eq. 11]}$$

No modelo apresentado σ_p^2 continua sendo variância do portfólio entre os ativos i e j, sendo N o conjunto de ativos candidatos a compor o portfólio e x_i referente as quantidades dos lotes de cada ativo no portfólio, neste caso representado por um número inteiro. Essa representação refere-se à função objetivo a qual representa o risco do portfólio que deve ser minimizado, determinada pela Equação 7.

Dentre as restrições, a Equação 8 demonstra ao retorno mínimo líquido. A esperança do retorno do portfólio deve ser maior que o retorno mínimo exigido pelo investidor e ainda subtraído os custos de transação. No primeiro termo da restrição o somatório de $E(R)_i p_i x_i$ representa o ganho na venda do portfólio no final do período, em que a quantidade x_i de lotes é multiplicada pelo seus respectivos preços p_i e $E(R)_i$ retorno futuro estimado, ainda na formulação $DV - Despesas\ na\ Venda$, representa exatamente o percentual de despesas incorridas na venda dos lotes. O segundo termo $p_i x_i$ representa o custo de aquisição de cada lote somados e subtraídas as deduções $DC - Dedução\ na\ Compra$, as despesas são deduzidas da compra em função do crédito de IR que está embutido nos fatores DV e DC que são especificados com o método de pesquisa. No último termo o fator R_e trata do retorno mínimo exigido pelo investidor.

As Equações 9 e 10 tratam do somatório do produto das quantidades de cada ativo x_j pelos seus respectivos preços de aquisição, este valor deve ser maior que o valor mínimo e menor que o valor máximo definido pelo investidor. A importância da restrição superior se deve ao fato do coeficiente de correlação σ_{ij} assumir valores positivos e negativos. A quarta restrição, na Equação 11 é a restrição de não-negatividade.

4. Métodos de Resolução do Problema

Muitas pesquisas começaram a ser desenvolvidas, na área de finanças computacionais, com o objetivo de resolver o modelo proposto, como Martin (1955), Markowitz (1956) e Wolfe

(1959) que pesquisaram métodos de programação quadrática para resolução do modelo M-V. Em função do alto esforço computacional, na década de 90, métodos buscaram eliminar deficiências encontradas. Pesquisas se destinaram a propor métodos de resolução dos modelos mais populares como o de Markowitz (1959). Caso esse como Speranza (1996) que utiliza um modelo alternativo, linear, com o objetivo de propor uma heurística para a resolução adaptado a variáveis discretas.

Mansini e Speranza (1999) também propõe três tipos de heurísticas para resolução do modelo misto inteiro linear, com o objetivo de aumentar a capacidade de busca do modelo para grande população de ativos. Porém, o método quadrático ainda tinha sido pouco explorado em relação aos métodos, como algoritmos computacionais aproximativos, metaheurísticas.

Posteriormente, muitos estudos se dedicaram em melhorias dos métodos de resolução dos modelos de portfólio. O objetivo principal foi obter resultados significativos e com o menor esforço computacional, capaz de proporcionar agilidade para a tomada de decisão. Além de métodos tradicionais como programação inteira mista, pesquisadas por Chiodi *et al* (2003), Bertsimas e Shioda (2009) e Li e Tsai (2008) se dedicaram a aplicações por meio de outros métodos. Fouskakis e Draper (2002) que usam otimização estocástica, Brandt e Santa-Clara (2006) que usam programação dinâmica, como também heurísticas e metaheurísticas aplicadas a diversos modelos adaptados e customizados as realidades dos mercados.

Dentre os estudos baseados em metaheurísticas pode-se destacar Chang *et al* (2000) que faz comparação entre três métodos, *Genetic Algorithms*, *Tabu Search* e *Simulated Annealing* usando variáveis contínuas. Dentre esses, os algoritmos genéticos foram os que obtiveram melhores resultados para o modelo. Posteriormente, Schaerf (2002) descreveu diferentes métodos de busca local para diversificação de soluções e Crama e Schyns (1999) que usam *Simulated Annealing*. Outros tipos de algoritmos são usados como Streichert e Yamawaki (2006) que usam algoritmos evolucionários, principalmente em abordagens multi-objetiva, considerando redução do risco e maximização do retorno. Golmakani e Fazel (2011) usam o método *Particle Swarm Optimization.*

Nas pesquisas utilizando algoritmos genéticos: Lai, *et al* (2006) com modelo para dois estágios, Lin e Liu (2008) com o modelo M-V discreto considerando transação em lotes e lógica fuzzy, Anagnostopoulus e Mamanis (2008) que usam uma abordagem multi-objetiva, Chen *et al* (2010) com um algoritmo genético específico *Genetic Relation Algorithm* e Ewald *et al* (2010) usam para o modelo com variáveis contínuas.

Dentre os estudos comparativos há o de Talebi *et al* (2010) que comparam *Genetic Algorithms* com *Particle Swarm Optimization*. Como também Gilli e Schumann (2010) desenvolveram uma grande pesquisa com quatro abordagens *Genetic Algorithms*, *Particle Swarm, Tabu search e Simulated Annealing*. Todas as pesquisas em geral no campo de seleção ótima de portfólios de investimentos.

Nessa análise, foi possível constatar a necessidade de aprimoramento dos modelos, por meio de método de soluções híbridos que estão ganhando destaque na literatura. Um exemplo recente da aplicação de modelos híbridos é Di Gaspero, *et al* (2007) que usa três modelos de busca local, incluindo busca tabu em conjunto com um método de programação quadrática. Esse trabalho consistiu em testes para oito diferentes instâncias, em diferentes mercados, considerando as instâncias de Chang *et al* (2000), porém não considera variáveis discretas, a que se propõe esse trabalho.

5. Método de Pesquisa

A população consistiu em 250 ativos selecionados por meio de amostragem por conveniência, o critério de seleção desses ativos consistiu na maturidade desses ativos de janeiro de 2005 a dezembro de 2009, com retornos mensais e que esses ativos se mantivessem pelo ano de 2010. A estratégia da construção dos portfólios consistiu em uma metodologia míope de compra de ativos no final de dezembro de 2009 para venda no final de janeiro de 2010. Considerando os custos de transação na compra e venda. Os percentuais elaborados por meio da Bovespa (2011) foram fixados em DV = 84,953% e DC 91,648%. Esses percentuais representam custos de Imposto de Renda, custódia, liquidação e negociação

Em relação à elaboração da previsão dos retornos dos ativos foram utilizadas as Equações 1 e 2 para a elaboração dos retornos diários logaritmizados, o que garantiu o pressuposto de normalidade. A partir dos retornos históricos foi necessária a previsão dos retornos futuros para janeiro de 2010 de todos os 250 ativos. Para simplificar o esforço computacional foi utilizado o CAPM, Equação 3, que por sua vez teve como referência um indicador de mercado, o Ibovespa, que consiste em uma carteira de investimentos teórica que melhor representa o comportamento do mercado. O valor do indicador foi estimado pelo modelo ARMA(1,1) descrito na Equação 4. Dentre os outros coeficientes do modelo, a covariância foi elaborada a partir da Equação 5.

Para a elaboração das instâncias de testes dos ativos, o grupo de 250 ativos foi dividido em cinco instâncias respectivamente com 50 a 250, totalizando 5 sub-instâncias com acréscimo de 50 ativos para cada uma, cada sub-instância contém ativos pertencentes a sua respectiva instância superior. Para a seleção e escolha das instâncias foram ranqueados por meio dos ativos em ordem decrescente de esperança de retorno, do maior até o menor. Cada sub-instância foi avaliada por meio de três valores de orçamentos Imin e Imax, sendo R$ 100.000 a R$ 120.000, R$ 500.000 a R$ 550.000 e R$ 1.000.000 a R$ 1.200.000. A sistematização, por meio dessa blocagem dos dados teve como objetivo a validação do algoritmo proposto.

A representação da solução do problema foi baseada em um vetor de soluções inteiras onde cada unidade representa a quantidade x de lotes adquiridos do ativo i, conforme Figura 1.

Ativo	1	2	3	4	...	i
Quantidade	3	0	5	2	...	x

Figura 1 – Representação do Vetor de Soluções Inteiras
Fonte: Elaboração própria.

A heurística construtiva foi realizada com base em Mansini e Speranza (1999) que propõem uma heurística resolvendo uma amostra dos ativos com melhor coeficiente de desempenho, o critério de escolha foi revisto e incrementado graus de seleção do nº de ativos na amostra, conforme Figura 2. A heurística consiste na resolução de um subproblema, em que os ativos são selecionados por um critério ρ que consiste na variância do ativo σ_i sobre a esperança de retorno $E(R)_i$.

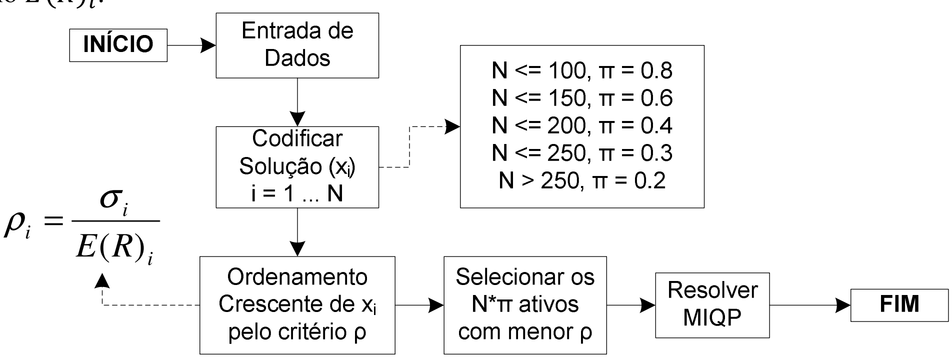

Figura 2 – Heurística Construtiva
Fonte: Elaboração própria.

O algoritmo desenvolvido é descrito na Figura 3. O tipo de busca local foi desenvolvida com base em Schaerf (2002) que compara três métodos de busca local para os modelos de seleção de portfólios. O método utilizado dentre os descritos por Schaerf (2002) foi *idR – Increase, Decrease e Replace*, consiste exatamente na transferência, redução e aumento da quantidade de lotes dos ativos para alteração da solução. No caso estudado foi fixada uma unidade para cada movimento. A partir dos algoritmos de busca tabu aplicados em modelos financeiros foi possível desenvolver o algoritmo próprio para complementação, com base em Chang *et al* (2000), Di Gaspero *et al* (2007) e Gilli e Schumann (2010).

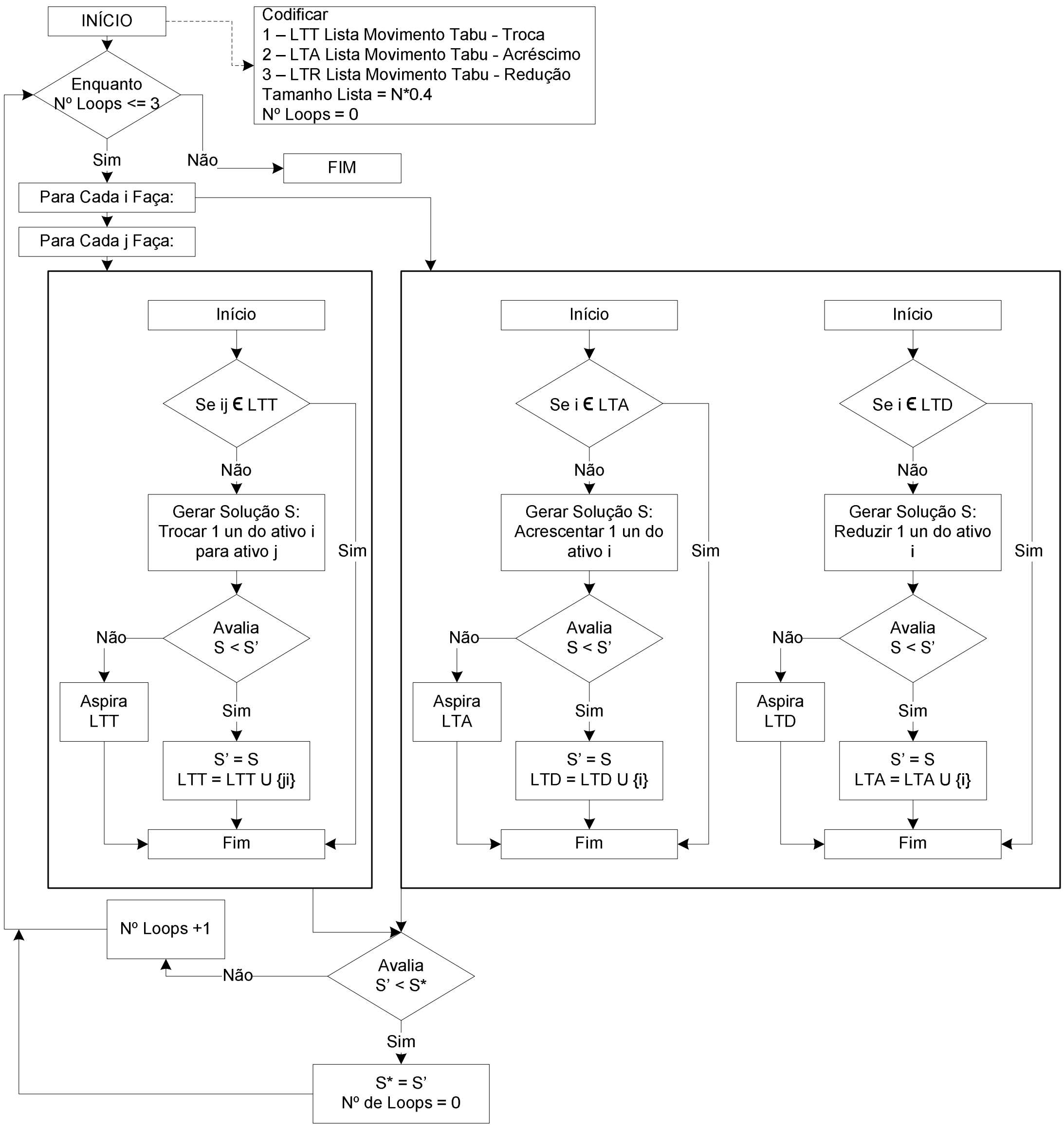

Figura 3 – Busca Tabu
Fonte: Elaboração própria.

O algoritmo consiste na utilização e exploração do espaço de busca por meio de uma vizinhança constituída de três tipos de movimentos, substituição, acréscimo e decréscimo da quantidade de lotes, para cada ativo i e j. Em particular, foi criada uma lista tabu para cada tipo de movimento, LTT Lista Tabu de Troca que consiste em movimentos de troca proibidos, LTA Lista Tabu de Acréscimo que consiste em movimentos de acréscimo proibidos e LTR que consiste em movimentos de redução proibidos, quanto ao critério de aspiração consiste se não encontrar nenhuma melhoria. Por fim, a melhor solução encontrada na vizinhança é avaliada, o critério de parada foi definido como a quantidade de três loops sem melhoria, o que se tornou suficiente para boas soluções.

6. Resultados

Para resolução do problema foi utilizado um computador com processador Intel Celeron 1.73 GHz, com 2 GB de memória, os softwares utilizados foram Matlab® versão 7.8 e Ilog Cplex® 12.2. O algoritmo foi desenvolvido e executado pelo Matlab® com consulta a biblioteca do software Cplex®. Para fidelização e comparação dos resultados do algoritmo foi comparado com o método misto quadrático inteiro, utilizando *branch and bound* por meio do software Cplex®. Para isso, também foram alterados alguns parâmetros de memória e tolerância para a execução do método exato. A Tabela 2 mostra os resultados obtidos com o algoritmo, e o método exato por meio de programação mista quadrática MIQP. Foram totalizados em 15 resultados comparados por meio da variação do tamanho da população de busca e pela variação da disponibilidade orçamentária. Na Tabela 2, a primeira coluna consiste na identificação da instância, a segunda o tamanho da instância em função do número de ativos, a terceira a identificação dos orçamentos utilizados. Dentre os coeficientes de comparação, o tempo sem segundos para resolução, o risco em variância do portfólio, o retorno percentual líquido e por fim o erro absoluto ou gap da função objetivo.

		Orçamento	Tempo (Seg)		Risco (Var)		Retorno (%)		Erro Abs
Instância	**Quant Ativos i**	**Milhares**	**MIQP**	**TS**	**MIQP**	**TS**	**MIQP**	**TS**	**TS**
I 01	**50**	100-120	1,34	0,86	2,9808	2,9808	1,60	1,60	-
I 01	**50**	500-550	0,28	0,78	38,4143	40,0545	1,62	1,64	1,6402
I 01	**50**	1000-1200	2,84	1,90	150,9172	154,3533	1,62	1,64	3,4361
I 02	**100**	100-120	0,94	1,09	0,6059	0,6059	1,17	1,17	-
I 02	**100**	500-550	4,68	4,74	5,7689	6,2431	1,29	1,28	0,4742
I 02	**100**	1000-1200	3,39	17,18	19,9307	20,8974	1,32	1,31	0,9667
I 03	**150**	100-120	0,70	0,89	0,1035	0,1035	1,40	1,40	-
I 03	**150**	500-550	6,47	2,22	0,9695	1,8874	1,22	1,36	0,9179
I 03	**150**	1000-1200	4,17	19,09	2,5023	5,4531	1,21	1,37	2,9507
I 04	**200**	100-120	7,10	2,85	0,1575	0,1699	1,25	1,23	0,0124
I 04	**200**	500-550	1,44	1,62	0,0864	0,0864	1,11	1,11	-
I 04	**200**	1000-1200	1,90	2,92	0,2898	0,2898	1,11	1,11	-
I 05	**250**	100-120	37,71	3,09	0,0679	0,0747	1,27	1,35	0,0068
I 05	**250**	500-550	212,16	2,22	0,0259	0,0259	1,11	1,11	-
I 05	**250**	1000-1200	35.780,51	1,36	0,0600	0,0727	1,19	1,10	0,0126

Tabela 2: Resultados da Execução
Fonte: Elaboração própria.

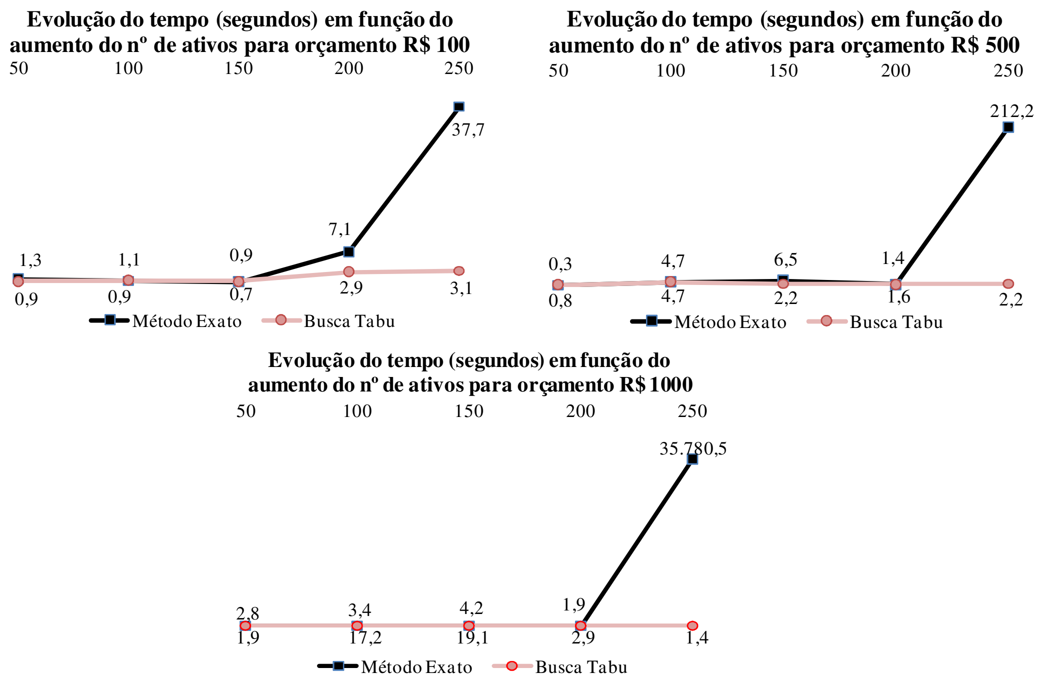

Figura 4: Análise do Tempo de Execução
Fonte: Elaboração própria.

Quanto ao tempo de processamento o algoritmo se demonstrou totalmente satisfatório em função da tendência de aumento exponencial do esforço computacional do método exato, conforme demonstrado por meio da Figura 4. Essa facilidade se dá por meio da utilização de uma heurística construtiva pela própria programação quadrática e por meio de uma busca local capaz de percorrer rapidamente o espaço de busca.

As soluções dos portfólios apresentaram alguns desvios pontuais em relação a solução ótima encontrada pelos métodos exatos, em se tratar de um modelo inteiro. Os erros apresentaram tendência em portfólios gerados com altos valores na restrição orçamentária. Em contrapartida, também apresentou uma sensibilidade na redução do risco com o aumento do espaço de busca.

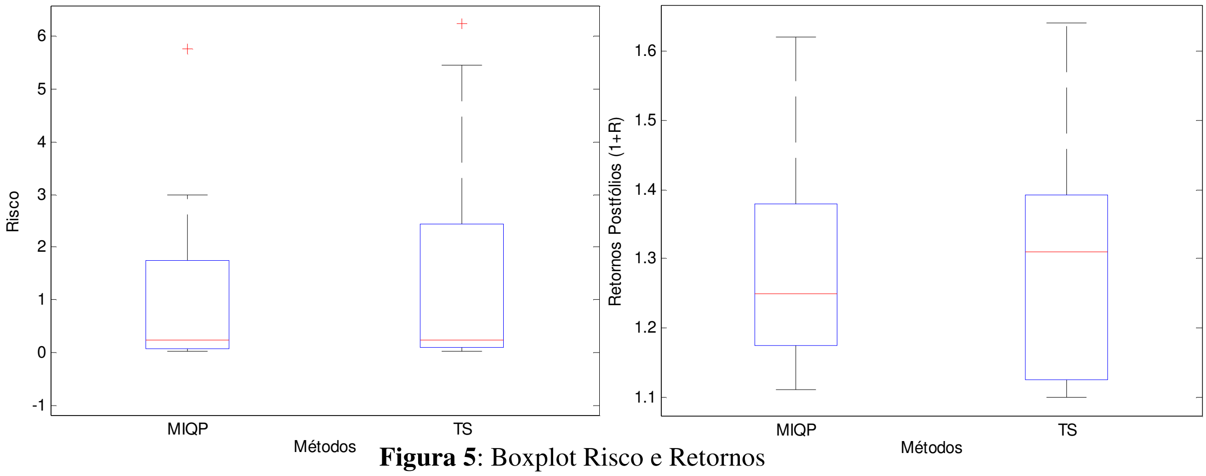

Figura 5: Boxplot Risco e Retornos
Fonte: Elaboração própria.

Os dois fatores mais importantes na elaboração do portfólio analisados são risco e retorno. A Figura 5 apresenta o boxplot respectivamente dos valores de risco e dos retornos por método usado. Com base nos gráficos demonstrados na Figura 5, foi constatado que a diferença entre os valores de risco apresentados graficamente não apresentaram diferenças significativas, apesar do algoritmo elaborado não alcançar a solução ótima em todos os testes. Apesar da diferença nos valores de risco, os valores de retornos pelo método da Busca Tabu não gerou retornos significativamente diferentes, o que em conjunto com a análise anterior demonstra a viabilidade do uso do algoritmo diante da redução do esforço computacional. No caso dos erros gerados para pequenas instâncias, tem como solução imediata o aumento do percentual de π na heurística construtiva para pequenas instâncias, o que facilita o alcance de melhores resultados.

7. Considerações Finais

Este trabalho buscou abordar o problema de seleção de portfólio ótimo, propondo um modelo de algoritmo que pudesse construir com uma solução que satisfaça o retorno exigido a um risco mínimo, contribuindo para a riqueza do investidor. Cada vez mais, o modelo de Markowitz (1952a, 1959) consegue considerar aspectos da realidade econômica dos mercados financeiros por meio de restrições mais realistas. O modelo de média variância, de estrutura quadrática, considerando variáveis inteiras para compras em lotes, possui grande complexidade e faz parte da classe de problemas NP-difíceis, o que justifica a exigência de algoritmos computacionais com melhor desempenho.

A metodologia da Busca Tabu é uma poderosa ferramenta para busca de soluções em problemas com alto nível de complexidade e com restrições antagônicas. A metodologia vem sendo aplicada aos poucos em conjunto com modelos de programação matemática, como Di Gaspero *et al* (2007). O algoritmo de busca associado à programação inteira e quadrática apresentou resultados satisfatórios diante do esforço computacional exigido pelo problema. Apesar do desempenho, é necessário a utilização de outras instâncias para testes, considerando fatores como momento econômico, tipologia dos ativos, período de cálculo dos coeficientes, método de estimativas de retornos e outros.

Agradecimentos

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte – IFRN pelo apoio de recursos.

Referências

ALBUQUERQUE, G.U.V. *Um estudo do problema de escolha de portfólio ótimo*. São Carlos, SP: ICMC, 2009. Dissertação de Mestrado — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação USP.

ALEXANDER, G. J.; BAPTISTA, A. M. Economic implications of using a mean-VaR model for portfolio selection: A comparison with mean-variance analysis. *Journal of Economic Dynamics and Control*, v. 26, n. 7-8, p. 1159-1193, 2002.

ANAGNOSTOPOULUS, K.P.; MAMANIS, G. Using Multiojective Algorithms to Solve the Discrete Mean-Variance Portfolio Selection. *International journal of economics and finance*. V.2, n.3, p. 152-162, 2010.

BERTSIMAS, D.; SHIODA, R. Algorithm for cardinality-constrained quadratic optimization. *Comput. Optim. Appl.*, v. 43, n. 1, p. 1-22, 2009.

BOVESPA. Custos. São Paulo: Bovespa, 2011. Disponível em: < http://www.bmfbovespa.com.br/pt-br/regulacao/acoes/custos-operacionais/custos-operacionais.aspx?Idioma=pt-br >. Acesso em: 21 jan. 2011.

BRANDT, M. W.; SANTA-CLARA, P. Dynamic Portfolio Selection by Augmenting the Asset Space. *The Journal of Finance*, v. 61, n. 5, p. 2187-2217, 2006.

CHANG, T.-J. *et al*. Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation. *Comput. Oper. Res.*, v. 27, n. 13, p. 1271-1302, 2000.

CHEN, Y. *et al*. A portfolio selection strategy using Genetic Relation Algorithm. In: *Evolutionary Computation* (CEC), 2010 IEEE Congress on, 18-23 July 2010.

CHIODI, L. *et al*. Semi-Absolute Deviation Rule for Mutual Funds Portfolio Selection. *Annals of Operations Research*, v. 124, n. 1, p. 245-265, 2003.

COHEN, K. J.; POGUE, J. A. An Empirical Evaluation of Alternative Portfolio-Selection Models. *The Journal of Business*, v. 40, n. 2, p. 166-193, 1967.

CRAMA, Y.; SCHYNS, M. *Simulated Annealing for Complex Portfolio Selection Problems*. UNIVERSITE DE LIEGE, Faculte d'economie, de gestion et de sciences sociales, Groupe d'Etude des Mathematiques du Management et de l'Economie. 1999

DIAS, C.H. *Um novo algoritmo genético para a otimização de carteiras de investimento com restrições de cardinalidade*. Campinas, SP: IMEC, 2008. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

DI GASPERO, L. *et al*. Hybrid Local Search for Constrained Financial Portfolio Selection Problems. In: VAN HENTENRYCK, P.; WOLSEY, L. (Ed.). *Integration of AI and OR*

Techniques in Constraint Programming for Combinatorial Optimization Problems: Springer Berlin / Heidelberg, 2007. p. 44-58.

ELTON, E. J.; GRUBER, M. J. *Modern portfolio theory and investment analysis*. 2 ed. New York: Wiley, 2004.

EWALD, R. *et al*. Selecting Simulation Algorithm Portfolios by Genetic Algorithms. In: *Principles of Advanced and Distributed Simulation* (PADS), 2010 IEEE Workshop on, 17-19 May 2010. 2010. p.1-9.

FAMA, E.F. The behavior of stock-market prices. *The journal of business*. V.38, n.1, p. 34-105, 1965.

FERREIRA, R.J.P. *et al*. A decision model for portfolio selection. *Pesquisa Operacional*, v.29, n.2, p. 403-417, 2009.

FOUSKAKIS, D.; DRAPER, D. Stochastic Optimization: a Review. *International Statistical Review*, v. 70, n. 3, p. 315-349, 2002.

GOLMAKANI, H. R.; FAZEL, M. Constrained Portfolio Selection using Particle Swarm Optimization. *Expert Systems with Applications*, v. 38, n. 7, p. 8327-8335, 2011.

GILLI, M.; SCHUMANN, E. Heuristic Optimisation in Financial Modelling. *Annals of Operations Research, Forthcoming*, 2010.

KONNO, H. Piecewise linear risk function and portfolio optimization. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, v. 33, n. 2, p. 139-156, 1990.

KONNO, H.; YAMAZAKI, H. Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market. *Management Science*, v. 37, n.5, p. 519-531, 1991.

LAI, K. *et al*. A Double-Stage Genetic Optimization Algorithm for Portfolio Selection. In: KING, I. et al (Ed.). *Neural Information Processing*: Springer Berlin / Heidelberg, 2006. p. 928-937.

LEVY, H.; KROLL, Y. Stochastic Dominance with Riskless Assets. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 11, n. 05, p. 743-777, 1976.

LI, H.-L.; TSAI, J.-F. A distributed computation algorithm for solving portfolio problems with integer variables. *European Journal of Operational Research*, v. 186, n. 2, p. 882-891, 2008.

LIN, C.-C.; LIU, Y.-T. Genetic algorithms for portfolio selection problems with minimum transaction lots. *European Journal of Operational Research*, v. 185, n. 1, p. 393-404, 2008.

MANSINI, R. *et al*. LP solvable models for portfolio optimization: a classification and computational comparison. *IMA Journal of Management Mathematics*, v. 14, n. 3, p. 187-220, 1 jul. 2003.

MANSINI, R.; SPERANZA, M. G. Heuristic algorithms for the portfolio selection problem with minimum transaction lots. *European Journal of Operational Research*, v. 114, n. 2, p. 219-233, 1999.

MARKOWITZ, H. M. *Portfolio selection: efficient diversification of investments*. New York: Wiley, 1959.

_________. Portfolio Selection. *Journal of Finance*. p. 77-91, mar. 1952a.

_________. The utility of wealth. Chicago: The University of Chicago, *Cowles Commission for Research in Economics*, 1952b.

_________. The optimization of a quadratic function subject to linear constraints. *Naval Research Logistics Quarterly*, v. 3, n. 1-2, p. 111-133, 1956.

MARQUES, F.T. *Otimização de carteiras com lotes de compras e custos de transação, uma abordagem por algoritmos genéticos*. São Carlos, SP: EESC, 2007. Dissertação de Mestrado — Escola de Engenharia de São Carlos USP.

MARTIN, A.D. Mathematical programming of portfolio selections. *Management Science*. V.1, n.2, p. 152-166, 1955.

OECD. *Tackling Inequalities in Brazil, China, India and South Africa*. OECD Publishing. 2010.

SCHAERF, A. Local Search Techniques for Constrained Portfolio Selection Problems. *Computational Economics*, v. 20, n. 3, p. 177-190, 2002

SHARPE, W. F. Capital-Asset Prices - a Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *Journal of Finance*, v. 19, n. 3, p. 425-442, 1964.

SPERANZA, M. G. A heuristic algorithm for a portfolio optimization model applied to the Milan stock market. *Computers and Operations Research*, v. 23, n. 5, p. 433-441, 1996.

STREICHERT, F.; YAMAWAKI, M.T. The Effect of Local Search on the Constrained Portfolio Selection Problem. In: *Evolutionary Computation*, 2006. CEC 2006. IEEE Congress on, 0-0 0. 2006. p.2368-2374.

TALEBI, A. *et al*. Performance investigation and comparison of two evolutionary algorithms in portfolio optimization: Genetic and particle swarm optimization. In: *Information and Financial Engineering* (ICIFE), 2010 2nd IEEE International Conference on, 17-19 Sept. 2010. p.430-437.

TSAI, R.S. *Analysis of Financial Time Series*. 2 ed. Chicago: Wiley, 2005.

TOBIN, J. Liquidity Preference as Behavior Towards Risk. *Review of Economic Studies*, London, v. 26, n. 1, p. 65-86, 1958.

WOLFE, P. The Simplex Method for Quadratic Programming. *Econometrica*, v. 27, n. 3, p. 382-398, 1959.

PASCAL, J. M. Robust Portfolio Rules and Asset Pricing. *Review of Financial Studies*, v. 17, n. 4, p. 951-983, 2004.

PÁSTOR, L. Portfolio selection and asset pricing models. *Journal of Finance*, v. 55, n. 1, p. 179-223, 2000.