TOMADA DE DECISÃO DE INVESTIMENTO EM FUNDOS DE PENSÃO: UMA ABORDAGEM VIA PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA

Danilo Zucolli Figueiredo
Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
CEP: 05508-900 - São Paulo, SP, Brasil
danilo.figueiredo@usp.br

Oswaldo Luiz do Valle Costa
Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
CEP: 05508-900 - São Paulo, SP, Brasil
oswaldo@lac.usp.br

RESUMO

Este trabalho apresenta uma abordagem via programação estocástica para a tomada de decisão de investimento em um fundo de pensão. Propõe-se uma nova metodologia para a definição da alocação da carteira do fundo no instante inicial baseada na média de vários cenários econômicos gerados via simulação de Monte Carlo. Como exemplo de aplicação, essa metodologia é utilizada para resolver o problema da alocação inicial da carteira de um grande fundo de pensão brasileiro e a alocação inicial obtida é avaliada em termos da probabilidade de insolvência e VaR, valor em risco, do fundo no instante final do horizonte de planejamento de investimento.

PALAVRAS CHAVE: Programação estocástica, Fundos de pensão, Gestão de Ativos e Passivos.

Área principal: Gestão Financeira

ABSTRACT

This paper presents an approach via stochastic programming for investment decision making in a pension fund. It proposes a new methodology for defining the allocation of the portfolio at the initial time based on the average of several economic scenarios generated via Monte Carlo simulation. As an illustrative example, this methodology is used to solve the problem of portfolio initial allocation of a large Brazilian pension fund and the obtained initial allocation is evaluated in terms of fund's probability of default and VaR, Value-at-Risk, at the final time of the investment planning horizon.

KEYWORDS: Stochastic programming; Pension funds; Asset-liability Management (ALM).

Main area: Financial Management

Agradecimentos: Esse artigo teve o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior e do Núcleo de Apoio à Pesquisa da USP em Matemática, Computação, Linguagem e Cérebro.

1 Introdução

O problema da tomada de decisão de investimento em fundos de pensão tem relevante importância face os vultuosos volumes financeiros sob gestão dessa classe de fundos e o risco de desequilíbrio entre seus ativos e passivos.

Um trabalhador que participa de um fundo de pensão assume o compromisso de realizar contribuições regulares para o fundo durante determinado período de tempo e, em contrapartida, passa a ter o direito a determinada renda caso perca a capacidade de trabalho ou se dê o término do período de suas contribuições. Neste trabalho será considerado que o plano de benefícios oferecido é do tipo benefício definido (BD), que garante ao aposentado uma renda de valor estabelecido contratualmente e vitalícia.

O fluxo de caixa do fundo se constitui em uma série de recebimentos durante a fase em que os participantes encontram-se em atividade, seguida de uma série de pagamentos durante a fase de inatividade dos participantes. Cabe ao gestor do fundo investir os valores captados com as contribuições realizadas pelos participantes em ativos, de modo a garantir os recursos necessários para o pagamento do total dos compromissos futuros do fundo expressos em sua reserva matemática. A reserva matemática de um fundo de pensão é definida como a diferença entre o valor presente dos benefício futuros do plano e o valor presente das contribuições futuras.

O descasamento temporal entre o fluxo de caixa gerado pelas contribuições e aquele gerado pelo pagamento dos benefícios e a diferença entre as rentabilidades obtidas nos investimentos realizados pelo fundo e a taxa de crescimento de suas obrigações são as principais fontes de incerteza para a saúde financeira de um fundo de pensão. Este tipo de risco causado pelas diferenças entre ativo e passivo de uma carteira são a base de estudo da chamada Gestão de Ativos e Passivos, *Asset-liability Management* (ALM).

Aqui o problema da tomada de decisão de investimento em um fundo de pensão é formulado como um problema de programação estocástica. A gestão do fundo pode ser facilmente definida em termos de um problema de programação matemática, pois trata-se de um problema do qual emergem naturalmente uma série de restrições e em que se está interessado em otimizar alguma quantidade como maximizar a capacidade do fundo em honrar suas obrigações. A necessidade de um enfoque via programação estocástica se dá pelo caráter não-determinístico das variáveis econômicas envolvidas no problema. Essas variáveis definem os cenários econômicos futuros e, por isso, têm comportamento estocástico.

Um dos primeiros trabalhos envolvendo aplicações de programação estocástica a problemas de gestão de carteiras foi realizado por Bradley e Crane (1972), que estudaram a gestão multi-período de uma carteira de títulos. A partir desse trabalho, muito foi feito e revisões detalhadas dos trabalhos realizados de aplicações de programação estocástica aos problemas da gestão de fundos de pensão e empresas de seguro foram efetuadas por Silva (2001) e Kouwenberg e Zenios (2006).

Este trabalho procura contribuir com os avanços na área da Gestão de Ativos e Passivos através da proposta de uma metodologia para a definição da alocação da carteira de um fundo de pensão no instante atual. É aqui definida uma solução subótima obtida a partir das soluções ótimas do problema de programação estocástica estabelecido para uma variedade de realizações distintas de futuros cenários econômicos. Também é apresentado um exemplo de uso dessa metodologia para o caso de um fundo de pensão brasileiro e é analisada a qualidade da solução obtida em termos da probabilidade de insolvência e valor em risco, *Value-at-Risk*, VaR do fundo.

Este artigo está estruturado da seguinte maneira. Na seção 2 é apresentado o problema de programação estocástica definido para um fundo de pensão e na seção 3 é proposta uma metodologia para a definição da alocação da carteira de um fundo de pensão no instante inicial. Na seção 4 é apresentada uma modelagem para cenários econômicos futuros, que é utilizada na seção 5 para a realização de simulações da metodologia proposta, aplicada a um grande fundo de pensão brasileiro. Por fim, as conclusões do artigo são apresentadas na seção 6.

2 Formulação do problema de tomada de decisão de investimento em um fundo de pensão

2.1 Estrutura econômica em árvores de cenários

Um cenário econômico ou o estado da economia num dado instante pode ser definido por um conjunto de variáveis econômicas como preço dos ativos, taxas de juro, índices da inflação, taxas de câmbio, nível de atividade econômica, etc. A evolução temporal da economia pode, então, ser descrita simplificadamente pela evolução temporal de cenários econômicos.

Adotando-se uma discretização na variável tempo e nos cenários econômicos, pode-se representar os futuros estados econômicos como vértices de uma árvore não recombinante e as probabilidades de ocorrência dos cenários econômicos como arestas dessa árvore.

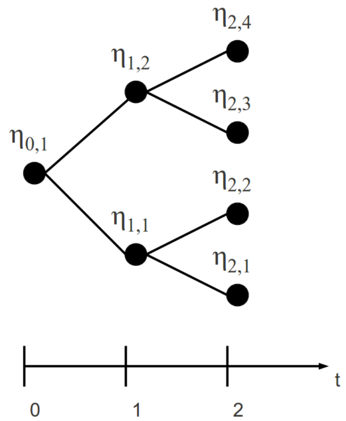

Figura 1: Exemplo de diagrama de árvore de cenários econômicos

A figura 1 apresenta um exemplo de modelo para futuros cenários econômicos, onde o k-ésimo nó no instante t é denotado por $\eta_{t,k}$. No primeiro estágio da árvore, $t = 0$, está representado o estado atual da economia $\eta_{0,1}$, do qual se conhecem todas as variáveis econômicas. No segundo estágio, $t = 1$, estão representados dois possíveis futuros estados econômicos, $\eta_{1,1}$ e $\eta_{1,2}$, para os quais a economia atual $\eta_{0,1}$ pode caminhar em $t = 1$ com determinada probabilidade. Pode-se imaginar, por exemplo, que esses dois estados modelem a economia em crescimento positivo e negativo daqui a um ano - no caso de uma discretização do tempo com período de 1 ano - e que, também por exemplo, cada um deles tenha probabilidade de ocorrência de 3/4 e 1/4, respectivamente, dado o estado atual da economia $\eta_{0,1}$. Raciocínio análogo se aplica ao próximo estágio, $t = 2$, onde estão representados quatro estados econômicos seguintes aos representados no segundo estágio.

Vale destacar que a determinado cenário $\eta_{t,k}$ não está associado apenas um conjunto de variáveis econômicas, mas também toda a história do processo até ali, ou seja, os cenários econômicos percorridos do instante inicial até t.

Tendo em vista que só se conhece precisamente o cenário $\eta_{0,1}$, que representa o estado atual da economia, o objetivo deste trabalho é responder a pergunta: qual deve ser a alocação da carteira do fundo de pensão no instante atual, sob o cenário econômico $\eta_{0,1}$?

Para responder esta pergunta será adotado que a evolução da economia ocorre percorrendo determinada árvore de cenários e que as variáveis econômicas de cada cenário são variáveis aleatórias com distribuição conhecida. O problema da tomada de decisão de investimento em um fundo de pensão será, então, escrito como um problema de otimização cujas restrições incorporam essas variáveis aleatórias. Desse modo, fica estabelecido um problema de programação estocástica e a resposta para a pergunta apresentada acima será dada em função das soluções ótimas obtidas para o problema de programação estocástica considerando-se um conjunto de diferentes realizações dos cenários futuros da economia.

2.2 Restrições do problema de otimização

Aqui são apresentadas as restrições geralmente utilizadas em problemas de otimização derivados de fundos de pensão. Consigli e Dempster (1998), Kouwenberg e Zenios (2006), Hilli et al. (2007) e Valladão (2008), por exemplo, baseiam-se nesse mesmo conjunto de restrições.

Por hipótese, existe um conjunto $\mathcal{A}_0 = \{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n\}$ de $n+1$ ativos disponíveis para investimento. Cabe ao gestor do fundo definir como alocar os recursos disponíveis entre esses ativos. O ativo α_0 representa o ativo de renda fixa e os demais ativos α_i, $i = 1, ..., n$, representam diferentes ativos de risco como ações, contratos derivativos, investimentos estruturados, imóveis, empréstimos a participantes e assistidos, etc. O conjunto $\mathcal{A} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset \mathcal{A}_0$ é definido como o conjunto de todos os ativos, exceto o de renda fixa α_0.

O valor financeiro alocado no ativo $\alpha_i \in \mathcal{A}_0$ no cenário econômico $\eta_{t,k}$ será simbolizado por $a_i(\eta_{t,k})$ e o valor financeiro alocado no ativo $\alpha_i \in \mathcal{A}_0$ antes da primeira tomada de decisão de investimento será dado por $a_{0,i}$.

A rentabilidade do i-ésimo ativo α_i realizada na transição do cenário econômico $\eta_{t-1,j}$ em $t-1$ para o cenário $\eta_{t,k}$ em η_t será denotada por $r_i(\eta_{t-1,j}|\eta_{t,k})$.

Para todo cenário econômico $\eta_{t,k}$, $0 \leq t < T$, as variáveis sobre as quais o gestor do fundo pode atuar são $c_i(\eta_{t,k})$ e $v_i(\eta_{t,k})$, $i = 0, ..., n$. A primeira representa o valor financeiro comprado e a segunda o valor financeiro vendido do i-ésimo ativo α_i no cenário econômico $\eta_{t,k}$. Assim, por meio dessas variáveis de decisão, o gestor define em cada instante qual a alocação da carteira do fundo.

Em $t = T$, instante de tempo correspondente ao término do horizonte de planejamento de investimento, não são tomadas decisões de investimento e ocorre a análise dos resultados da gestão do fundo.

Restrições de balanço

A variação do valor total dos ativos do fundo entre dois instantes consecutivos $t-1$ e t é dada pela rentabilidade dos ativos no período, descontados os custos das transações (compras e vendas) de ativos em t, somadas as contribuições realizadas pelos participantes e subtraidos os benefícios pagos no período. Desse modo, pode-se escrever, para cada instante t, uma expressão para o valor total dos ativos do fundo. Essas expressões são, então, incorporadas ao problema de otimização como restrições de igualdade e são chamadas de restrições de balanço.

No instante inicial, $t = 0$, é considerada a alocação da carteira do fundo anterior à primeira decisão de investimento e não são levadas em conta as rentabilidades dos ativos, de modo que

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(\eta_{0,1}) = \sum_{i=0}^{n} a_{0,i} - \sum_{i=1}^{n} \{\kappa_i \left[c_i(\eta_{0,1}) + v_i(\eta_{0,1})\right]\} - \psi(\eta_{0,1}), \tag{1}$$

onde κ_i denota o custo de transação do i-ésimo ativo α_i e $\psi(\eta_{t,k})$ representa o saldo resultante da diferença entre benefícios pagos e contribuições recebidas pelo fundo entre os instantes $t-1$ e t.

Para os instantes seguintes, $0 < t < T$, devem ser consideradas as alocações no instante anterior e as rentabilidades obtidas no período. Então, para dois cenários, $\eta_{t-1,j}$ e $\eta_{t,k}$, quaisquer ligados na árvore de cenários econômicos tem-se

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(\eta_{t,k}) = \sum_{i=0}^{n} \left\{\left[1 + r_i(\eta_{t-1,j}|\eta_{t,k})\right] a_i(\eta_{t-1,j})\right\} - \sum_{i=1}^{n} \{\kappa_i \left[c_i(\eta_{t,k}) + v_i(\eta_{t,k})\right]\} - \psi(\eta_{t,k}). \tag{2}$$

No último estágio, $t = T$, não são consideradas tomadas de decisões de investimento e ocorre a análise da saúde financeira do fundo. Então, para um cenário $\eta_{T,k}$ deste estágio ligado ao cenário $\eta_{T-1,j}$ do estágio anterior,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(\eta_{T,k}) = \sum_{i=0}^{n} \left\{\left[1 + r_i(\eta_{T-1,j}|\eta_{T,k})\right] a_i(\eta_{T-1,j})\right\} - \psi(\eta_{T,k}). \tag{3}$$

Restrições de inventário

A alocação de cada um dos ativos de risco em um dado instante t é dada pela alocação no instante anterior $t-1$ rentabilizada, somada às compras e descontadas as vendas desse ativo em t. Há, então, para cada instante t uma expressão para o valor alocado em cada um dos ativos de risco. Essas expressões são incorporadas ao problema de otimização como restrições de igualdade chamadas de restrições de inventário.

No instante inicial, $t = 0$, de maneira análoga ao realizado para as restrições de balanço, não são levadas em conta as rentabilidades dos ativos. Então, a alocação de um ativo $\alpha_i \in \mathcal{A}$, no instante inicial, é dada pela soma da alocação anterior à primeira tomada de decisão $a_{0,i}$ com o saldo dos valores comprados e vendidos, ou seja,

$$a_i(\eta_{0,1}) = a_{0,i} + c_i(\eta_{0,1}) - v_i(\eta_{0,1}). \tag{4}$$

Nos instantes seguintes, $0 < t < T$, são consideradas também as rentabilidades obtidas. Sejam $\eta_{t-1,j}$ e $\eta_{t,k}$ dois cenários ligados da árvore de cenários econômicos. Para todo ativo $\alpha_i \in \mathcal{A}$,

$$a_i(\eta_{t,k}) = \left[1 + r_i(\eta_{t-1,j}|\eta_{t,k})\right] \cdot a_i(\eta_{t-1,j}) + c_i(\eta_{t,k}) - v_i(\eta_{t,k}). \tag{5}$$

No último estágio, $t = T$, não ocorre compra e venda de ativos e, por isso, considera-se apenas a rentabilidade obtida entre os instantes $T-1$ e T. Então, para um cenário $\eta_{T,k}$ deste estágio ligado ao cenário $\eta_{T-1,j}$ do estágio anterior,

$$a_i(\eta_{T,k}) = \left[1 + r_i(\eta_{T-1,j}|\eta_{T,k})\right] \cdot a_i(\eta_{T-1,j}). \tag{6}$$

Restrições de alocação

Por imposições legais, algumas classes de ativos de um fundo de pensão não devem ultrapassar certos limites de alocação. Além disso, o próprio gestor do fundo pode, visando controlar o risco do fundo, estabelecer limites para a alocação em certas classes de ativos. Surgem, então, as restrições de alocação que devem ser satisfeitas em todos os cenários econômicos e são dadas por

$$a_i(\eta_{t,k}) \leq \varphi_i \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i(\eta_{t,k}), \ \forall \eta_{t,k}, \tag{7}$$

onde φ_i representa o percentual máximo de alocação do i-ésimo ativo α_i na carteira do fundo.

Restrições de liquidez

O último tipo de restrição a que está submetida a gestão do fundo é a chamada restrição de liquidez, que impõe que a compra $c_i(\eta_{t,k})$ e venda $v_i(\eta_{t,k})$ de um ativo α_i realizadas em um dado cenário $\eta_{t,k}$ não devem superar certos volumes financeiros. Essas restrições podem ser escritas para todos os ativos α_i em termos das inequações

$$c_i(\eta_{t,k}) \leq \gamma_i(\eta_{t,k}), \ \forall \eta_{t,k} \tag{8}$$

e

$$v_i(\eta_{t,k}) \leq \beta_i(\eta_{t,k}), \ \forall \eta_{t,k}, \tag{9}$$

onde $\gamma_i(\eta_{t,k})$ representa o volume financeiro máximo para a compra e $\beta_i(\eta_{t,k})$ o volume financeiro máximo para a venda do i-ésimo ativo α_i no cenário econômico $\eta_{t,k}$.

2.3 Função objetivo

A tomada de decisão de investimento em um fundo de pensão tem como premissa garantir que, ao final do horizonte de planejamento, $t = T$, o fundo tenha recursos disponíveis para honrar suas obrigações expressas na reseva matemática $\Psi(\eta_{T,k})$. Assim, a saúde financeira do fundo ao final do horizonte de planejamento de investimento pode ser avaliada comparando-se o total dos ativos disponíveis $V(\eta_{T,k})$ com a reserva matemática $\Psi(\eta_{T,k})$ através do chamado resultado técnico do fundo $RT(\eta_{T,k})$ dado por

$$RT(\eta_{T,k}) = V(\eta_{T,k}) - \Psi(\eta_{T,k}) = \sum_{i=0}^{n} a_i(\eta_{T,k}) - \Psi(\eta_{T,k}). \tag{10}$$

Nesse sentido, o objetivo da gestão do fundo deve ser maximizar o valor esperado de $RT(\eta_{T,k})$, tomado sobre todos os cenários do último estágio da árvore de cenários econômicos e considerando-se um dado nível de risco a que o fundo esteja disposto a incorrer, de modo que a probabilidade de ocorrência de $RT(\eta_{T,k}) < 0$, chamada probabilidade de insolvência, seja minimizada.

O problema da tomada de decisão de investimento em um fundo de pensão deve, nessas condições, ser escrito em termos de uma função objetivo côncava, de modo a refletir a aversão ao risco típica dessa classe de fundos. Seguindo a abordagem proposta por Valladão (2008), pode-se adotar uma função objetivo linear por partes tal como

$$z = \begin{cases} f_{(+)} \cdot RT(\eta_{T,k}), & \text{se } RT(\eta_{T,k}) \geq 0 \\ -f_{(-)} \cdot RT(\eta_{T,k}), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A razão entre os parâmetros $f_{(-)}$ e $f_{(+)}$ representa uma medida de aversão ao risco. Quanto maior o valor da razão $f_{(-)}/f_{(+)}$, mais conservadora será a gestão adotada para o fundo e quanto menor o valor dessa razão, mais arrojada será a gestão.

Sejam as variáveis auxiliares $u(\eta_{T,k})$ e $w(\eta_{T,k})$ para um cenário $\eta_{T,k}$ do último estágio do horizonte de planejamento da gestão do fundo, tais que $RT(\eta_{T,k}) = u(\eta_{T,k}) - w(\eta_{T,k})$ e

$$u(\eta_{T,k}) = \begin{cases} RT(\eta_{T,k}), & \text{se } RT(\eta_{T,k}) \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$w(\eta_{T,k}) = \begin{cases} -RT(\eta_{T,k}), & \text{se } RT(\eta_{T,k}) < 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Fazendo uso dessas novas variáveis, pode-se escrever a função objetivo z como uma função linear e definir o problema da gestão de um fundo de pensão como sendo

$$\max \sum_{k=1}^{N_T} p_{\eta_{T,k}} \{ f_{(+)} \cdot u(\eta_{T,k}) - f_{(-)} \cdot w(\eta_{T,k}) \} \tag{11}$$

sujeito a

$$W_0 x_0 = b_0$$
$$T_t(\xi_t) x_{t-1} + W_t(\xi_t) x_t(\xi_t) = b_t(\xi_t), \quad t = 1, ..., T,$$

onde $p_{\eta_{T,k}}$ é a probabilidade de ocorrência do cenário econômico $\eta_{T,k}$, N_T o número de cenários em $t = T$, as restrições representam as restrições de balanço, inventário, alocação e liquidez - apresentadas na seção 2.2 - escritas matricialmente, para cada instante t, na forma de restrições de igualdade, x_t representa o vetor de variáveis do problema de otimização (contém o valor comprado e vendido por ativo) em t e ξ_t representa a história, até o instante t, do processo estocástico ξ que modela as variáveis não-determinísticas envolvidas no processo de decisão.

Fica, assim, estabelecido um problema de programação estocástica multi-estágios, que representa a forma ótima de gestão de um fundo de pensão segundo a qual se maximiza o valor esperado do resultado técnico $RT(\eta_{T,k})$. As variáveis envolvidas no problema são não antecipativas, pois só dependem da história do processo ξ até o instante em que as decisões de investimento são tomadas. Detalhes sobre o tratamento de um problema de programação estocástica foram apresentados por Birge e Louveaux (1997).

De posse de uma árvore de cenários econômicos, o problema da tomada de decisão de investimento em um fundo de pensão escrito como um problema de programação estocástica, definido em (11), pode ser resolvido e a solução ótima obtida, de modo que fica determinada a alocação ótima para cada um dos cenários da árvore.

Uma árvore de cenários é fruto de uma particular realização do processo estocástico ξ e o problema definido em (11) terá uma solução que é ótima para essa particular realização. Dessa solução pode-se extrair a alocação ótima no instante inicial $a_i^*(\eta_{0,1})$, para cada um dos ativos α_i no cenário atual $\eta_{0,1}$, que é justamente o que se está interessado em obter. Isso porque o gestor só pode realizar a alocação da carteira do fundo no instante atual $t = 0$. As demais alocações podem na prática ser úteis apenas como planejamento de futuras alocações.

Caso o problema definido em (11) seja resolvido m vezes - para m diferentes árvores obtidas a partir de m particulares realizações do processo estocástico ξ - terá diferentes soluções ótimas x^* e fica posta a questão: como o gestor determinará a alocação da carteira do fundo no instante inicial $a_i(\eta_{0,1})$, $i = 1, ..., n$, para o cenário econômico atual $\eta_{0,1}$, uma vez que não conhece a particular árvore que descreverá corretamente os cenários futuros? Na seção 3 será proposta uma metodologia visando responder essa pergunta.

3 Metodologia para a tomada de decisão de investimento em um fundo de pensão

Conforme apresentado na seção 2.3, a solução ótima do problema (11) é função da realização do processo estocástico ξ, que modela as variáveis não-determinísticas do problema. Para cada particular realização desse processo, o problema (11) apresentará uma solução ótima diferente.

Nesse contexto, propomos uma metodologia para a determinação da alocação no instante inicial $a_i(\eta_{0,1})$ de cada um dos ativos α_i no cenário econômico atual $\eta_{0,1}$, dada pelo procedimento abaixo:

Passo 1: O problema (11) deve ser resolvido para m diferentes árvores de cenários, ou seja, m diferentes realizações do processo estocástico ξ, de modo a gerar m soluções ótimas $a_i^*(c_j, \eta_{0,1})$, $j = 1, ..., m$, para a alocação inicial dos ativos;

Passo 2: Deve ser calculada uma solução subótima para a alocação inicial dos ativos $a_i^{sub}(\eta_{0,1})$ dada pela média aritmética das alocações ótimas obtidas para as m diferentes árvores, ou seja, a alocação de cada um dos ativos $\alpha_i \in \mathcal{A}_0$ será dada por

$$a_i^{sub}(\eta_{0,1}) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} a_i^*(c_j, \eta_{0,1}). \tag{12}$$

Tem-se de (12) uma estratégia para a determinação da alocação da carteira do fundo no instante inicial que, apesar de não ser ótima - na medida em que não é necessariamente igual à alocação ótima de nenhuma das m árvores de cenários propostas - é, por construção, uma carteira que contempla maior diversidade de realizações dos cenários futuros. No caso apresentado são contempladas m diferentes realizações das árvores de cenários econômicos.

Passado um período de tempo, o gestor realizará a apuração dos resultados financeiros do fundo e atualizará o calculo do passivo atuarial. Terá, também, que decidir novamente como alocar os recursos do fundo e, para isso, poderá repetir o processo acima descrito obtendo a nova alocação subótima para a carteira do fundo.

4 Geração de cenários

Nesta seção é apresentada a forma como foram gerados os cenários econômicos utilizados nas simulações apresentadas na seção 5. Dupačová, Consigli e Wallace (2000), Silva (2001) e Drijver (2005) fazem interessantes observações acerca do processo de geração de cenários para o problema de programação estocástica.

4.1 Dinâmica da evolução do passivo

O saldo $\psi(\eta_{t+1,k})$ resultante da diferença entre os benefícios pagos aos participantes inativos e as contribuições pagas pelos participantes ativos entre os cenários ligados $\eta_{t,j}$ e $\eta_{t+1,k}$ pode ser modelado por

$$\psi(\eta_{t+1,k}) = \left[1 + \rho(\eta_{t,j}|\eta_{t+1,k})\right] \cdot \psi(\eta_{t,j}), \tag{13}$$

onde $\rho(\eta_{t,j}|\eta_{t+1,k})$ representa uma taxa de variação entre os pagamentos $\psi(\eta_{t,j})$ e $\psi(\eta_{t+1,k})$.

Para um instante qualquer $\tau > 0$, fazendo uso da expressão (13), e considerando uma série de cenários ligados na árvore de cenários, pode-se escrever

$$\psi(\eta_{\tau,k_\tau}) = \prod_{t=0}^{\tau-1} [1 + \rho(\eta_{t,k_t}|\eta_{t+1,k_{t+1}})] \cdot \psi(\eta_{0,1}). \tag{14}$$

4.2 Cálculo da reserva matemática

Seja $r(\eta_{t,k_t}|\eta_{t+1,k_{t+1}})$ o retorno líquido da carteira do fundo entre os cenários η_{t,k_t} e $\eta_{t+1,k_{t+1}}$, então

$$V(\eta_{t+1,k_{t+1}}) = [1 + r(\eta_{t,k_t}|\eta_{t+1,k_{t+1}})] \cdot V(\eta_{t,k_t}) - \psi(\eta_{t+1,k_{t+1}}). \tag{15}$$

De $t = 0$ até a extinção do fundo em $t = T_f$, com cenário final $\eta_{T_f,k_{T_f}}$, pode-se escrever

$$V(\eta_{T_f,k}) = \prod_{t=0}^{T_f-1} [1 + r(\eta_{t,k_t}|\eta_{t+1,k_{t+1}})] \cdot V(\eta_{0,1}) - \sum_{m=1}^{T_f} \left[\prod_{s=m}^{T_f-1} [1 + r(\eta_{s,k_s}|\eta_{s+1,k_{s+1}})] \right] \cdot \psi(\eta_{m,k_m}). \tag{16}$$

Impondo $V(\eta_{T_f,k}) = 0$ e como todas as obrigações terão sido honradas até T_f, fazendo $V(\eta_{0,1}) = \Psi(\eta_{0,1})$ tem-se que

$$\Psi(\eta_{0,1}) = \frac{\sum_{m=1}^{T_f} \left[\prod_{s=m}^{T_f-1} [1 + r(\eta_{s,k_s}|\eta_{s+1,k_{s+1}})] \right] \cdot \psi(\eta_{m,k_m})}{\prod_{t=0}^{T_f-1} [1 + r(\eta_{t,k_t}|\eta_{t+1,k_{t+1}})]} = \sum_{m=1}^{T_f} \frac{\psi(\eta_{m,k_m})}{\prod_{t=0}^{m-1} [1 + r(\eta_{t,k_t}|\eta_{t+1,k_{t+1}})]}. \tag{17}$$

De (14) e (17), a reserva matemática $\Psi(\eta_{0,1})$, em $t = 0$, pode ser escrita como

$$\Psi(\eta_{0,1}) = \sum_{m=1}^{T_f} \frac{\prod_{i=0}^{m-1} [1 + \rho(\eta_{i,k_i}|\eta_{i+1,k_{i+1}})]}{\prod_{t=0}^{m-1} [1 + r(\eta_{t,k_t}|\eta_{t+1,k_{t+1}})]} \cdot \psi(\eta_{0,1}). \tag{18}$$

4.3 Dinâmica da evolução dos ativos

Seja uma estrutura de árvore de cenários econômicos em que a partir de cada cenário, em um dado instante t, descendem exatamente dois cenários econômicos, em $t + 1$, como representado na figura 1. Assim, existem 2^t, $0 \le t \le T$, possíveis cenários para cada instante t e seja, por hipótese, a ocorrência de cada um desses 2^t cenários equiprovável, ou seja, $p_{\eta_{t,k}} = 1/(2^t)$, $k = 1, ..., 2^t$.

As rentabilidades dos ativos entre um nó qualquer $\eta_{t,j}$ e seus dois descendentes η_{t+1,j_1} e η_{t+1,j_2} serão, por hipótese, tais que $r(\eta_{t,j}|\eta_{t+1,j_1}) = \mu + Q^{\frac{1}{2}}\delta$ e $r(\eta_{t,j}|\eta_{t+1,j_2}) = \mu - Q^{\frac{1}{2}}\delta$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} r_0(\eta_{t,j}|\eta_{t+1,j_1}) \\ \vdots \\ r_n(\eta_{t,j}|\eta_{t+1,j_1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{\alpha_0} \\ \vdots \\ \mu_{\alpha_n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{\alpha_0,\alpha_0} & \cdots & \sigma_{\alpha_0,\alpha_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{\alpha_n,\alpha_0} & \cdots & \sigma_{\alpha_n,\alpha_n} \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}} \cdot \delta$$

e

$$\begin{bmatrix} r_0(\eta_{t,j}|\eta_{t+1,j_2}) \\ \vdots \\ r_n(\eta_{t,j}|\eta_{t+1,j_2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{\alpha_0} \\ \vdots \\ \mu_{\alpha_n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_{\alpha_0,\alpha_0} & \cdots & \sigma_{\alpha_0,\alpha_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{\alpha_n,\alpha_0} & \cdots & \sigma_{\alpha_n,\alpha_n} \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}} \cdot \delta,$$

onde μ_{α_i} é a rentabilidade média do i-ésimo ativo α_i, Q é a matriz de covariância das rentabilidades dos ativos pertencentes a $\mathcal{A}_0$ e δ é um vetor aleatório tal que $\delta \sim N(0, I_{n+1})$.

5 Simulações

Com o objetivo de aplicar a metodologia proposta na seção 3 ao mercado brasileiro, foram considerados dados obtidos a partir de demonstrativos contábeis - Demonstração Patrimonial e da Demonstração de Resultados - divulgados ao fim do exercício de 2009 por um grande fundo de pensão em atividade no Brasil. Esse fundo conta basicamente com participantes inativos - aposentados e pensionistas - não permite mais inscrições de participantes e concede um plano de benefícios do tipo benefício definido (BD). Além disso, foi considerado que existem apenas dois ativos disponíveis para investimento $\mathcal{A}_0 = \{\alpha_{CDI}, \alpha_{IBOV}\}$, cujas rentabilidades se assemelham às do Certificado de Depósito Interbancário (CDI) e às do Índice Bovespa (IBOV). Esses ativos representam ativos de renda fixa e variável, respectivamente.

5.1 Hipóteses simplificadoras

Como hipóteses simplificadoras os parâmetros $\rho(\eta_{t,k_t}|\eta_{t+1,k_{t+1}})$ e $r(\eta_{t,k_t}|\eta_{t+1,k_{t+1}})$ utilizados nas seções 4.1 e 4.2 serão considerados valores constantes ao longo do tempo. Então, para todo t e para todo índice de cenário k_t, $\rho(\eta_{t,k_t}|\eta_{t+1,k_{t+1}}) = \rho$ e $r(\eta_{t,k_t}|\eta_{t+1,k_{t+1}}) = r$.

Desse modo, $\Psi(\eta_{0,1})$ obtido em (18), pode ser escrito como

$$\Psi(\eta_{0,1}) = \sum_{m=1}^{T_f} \left[\frac{1+\rho}{1+r}\right]^m \cdot \psi(\eta_{0,1}). \tag{19}$$

Definindo $\lambda = \left[\frac{1+\rho}{1+r}\right]$, a equação (19) pode ser reescrita como

$$\Psi(\eta_{0,1}) = \sum_{m=1}^{T_f} \lambda^m \cdot \psi(\eta_{0,1}). \tag{20}$$

Como a reseva matemática $\Psi(\eta_{0,1})$ é obtida a partir do desconto de um fluxo de pagamentos futuros, é natural supor que tenha valor finito, ou seja, $0 \leq |\lambda| < 1$ e como o fundo, a rigor, pode permanecer em funcionamento por um período muito grande pode-se no limite tomar $T_f \to \infty$, de modo que

$$\Psi(\eta_{0,1}) = \frac{\lambda}{1-\lambda} \cdot \psi(\eta_{0,1}). \tag{21}$$

O fundo que foi utilizado como fonte para os dados das simulações encontrava-se positivamente desequilibrado, $V(\eta_{0,1}) > \Psi(\eta_{0,1})$, e por isso foi considerado um caso mais conservador em que o ativo do fundo era igual a sua reserva matemática, de modo que os dados utilizados foram, em milhões de reais, $V(\eta_{0,1}) = \Psi(\eta_{0,1}) = 6.000$ e $\psi(\eta_{0,1}) = 226$.

A partir da equação (21) e dos dados do passivo do fundo apresentados, tem-se que $\lambda \approx 0,96$ e considerando-se, arbitrariamente, um retorno líquido para o fundo de $r = \mu_{CDI} = 0,1$, da definição de λ, tem-se $\rho \approx 0,06$. Por último, foi considerado que a alocação antes da primeira decisão de investimento seria em renda fixa, ou seja, $a_{0,1} = 6.000$ e $a_{0,2} = 0$.

5.2 Parâmetros das simulações

A partir da série histórica da taxa over média diária do Depósito Interfinanceiro (DI) e da série histórica de preço de fechamento do Índice Bovespa (IBOV) até o final do ano de 2009, foram calculados os retornos anualizados do CDI e do IBOV e foram estimados os parâmetros μ e Q como sendo

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_{CDI} \\ \mu_{IBOV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,10 \\ 0,15 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q = \begin{bmatrix} \sigma_{CDI,CDI} & \sigma_{CDI,IBOV} \\ \sigma_{IBOV,CDI} & \sigma_{IBOV,IBOV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,001 & -0,005 \\ -0,005 & 0,206 \end{bmatrix}.$$

Os custos de transação sobre valor financeiro negociado e os limites de alocação utilizados foram, respectivamente,

$$\kappa = \begin{bmatrix} \kappa_{CDI} \\ \kappa_{IBOV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,002 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_{CDI} \\ \varphi_{IBOV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{bmatrix}.$$

Adotou-se uma discretização na variável tempo de modo que cada instante corresponde ao período de um ano e o horizonte de planejamento foi tomado como $T = 5$, ou seja, foram consideradas as tomadas de decisão de investimento no instante atual e para os próximos quatro anos, sendo que no quinto ano foi apurada a saúde financeira do fundo. Por simplicidade, não foram consideradas restrições de liquidez.

5.3 Experimentos e resultados

O problema da tomada de decisão de investimento em um fundo de pensão foi resolvido empregando-se a metodologia apresentada na seção 3 e tendo como base o problema formulado via programação estocástica apresentado em (11), com parâmetros $f_{(+)} = 1$, $f_{(-)} = 2$, de modo que a função objetivo utilizada foi

$$\max \frac{1}{32} \sum_{k=1}^{32} \{u(\eta_{T,k}) - 2w(\eta_{T,k})\}, \tag{22}$$

e os demais parâmetros utilizados foram os definidos nas seções 5.1 e 5.2.

i. Determinação da alocação subótima

Com o objetivo de demonstrar a aplicação da metodologia proposta na seção 3, foi desenvolvido um estudo de simulação com geração de $m = 200$ árvores de cenários. Para cada uma das árvores de cenários, o problema de programação estocástica definido com os parâmetros apresentados acima foi resolvido (*passo 1*) e as alocações subótimas dos ativos de renda fixa $a^{sub}_{CDI}(\eta_{0,1})$ e de renda variável $a^{sub}_{IBOV}(\eta_{0,1})$ para o instante inicial calculadas (*passo 2*). A alocação subótima obtida para a carteira do fundo, em porcentagem do total dos ativos, foi

$$a^{sub}(\eta_{0,1}) = \begin{bmatrix} a^{sub}_{CDI}(\eta_{0,1}) \\ a^{sub}_{IBOV}(\eta_{0,1}) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 67,5\% \\ 32,5\% \end{bmatrix}.$$

ii. Análise da distribuição do resultado técnico do fundo

Com o objetivo de avaliar a solução subótima obtida, um novo estudo de simulação foi realizado com a geração de $m = 200$ novas árvores de cenários. Para cada uma das árvores, o problema de otimização definido acima foi resolvido com a adição de novas restrições do tipo igualdade, de modo a garantir que as alocações em $t = 0$, correspondentes ao cenário $\eta_{0,1}$, fossem as alocações subótimas calculadas no experimento (i).

Foi, então, avaliada a distribuição do resultado técnico do fundo, de modo a serem estimadas as probabilidades de insolvência e o valor em risco VaR do fundo. Como todos os cenários em $t = T$ foram tomados como equiprováveis, a probabilidade de insolvência foi calculada pela razão entre a quantidade de cenários em que o fundo apresentou resultado técnico não-negativo e a quantidade total de cenários do último estágio. O valor em risco VaR é definido como a perda máxima provável de uma carteira para um determinado nível de confiança num dado horizonte de tempo. Alexander (2008) apresenta diferentes abordagens e exemplos do cálculo do valor em risco de um portfólio. No presente trabalho foi adotado um nível de confiança de 95% e um horizonte de tempo $T = 5$.

O experimento (ii) foi realizado para duas condições iniciais diferentes. Na primeira o fundo estava inicialmente equilibrado, isto é, o ativo e o passivo eram inicialmente iguais e na segunda o fundo estava positivamente desequilibrado, sendo que o total de ativos era inicialmente 20% maior que a reserva matemática.

As curvas da distribuição empírica do resultado técnico obtidas nos dois casos estão representadas na figura 2 e foi estimada uma probabilidade de insolvência de cerca de 23% e um valor em risco $VaR \approx 2.535$ milhões de reais no caso em que o fundo estava equilibrado e uma probabilidade de insolvência de cerca de 5% e um valor em risco $VaR \approx 38$ milhões de reais no caso em que o fundo estava inicialmente positivamente desequilibrado.

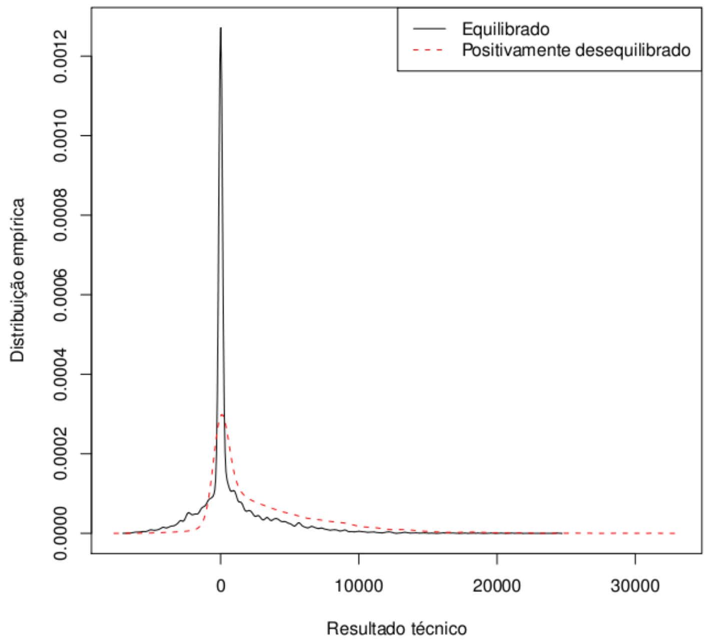

Figura 2: Distribuição empírica do resultado técnico do fundo

Evidencia-se, então, a necessidade da gestão do fundo zelar por mantê-lo ligeiramente desequilibrado positivamente, de modo a contingenciar um valor financeiro capaz de suprir suas necessidades de capital nos casos de cenários mais pessimistas. Para o caso estudado, por exemplo, uma contingência de 20% sobre o valor da reserva matemática $\Psi(\eta_{0,1})$ foi capaz de reduzir o risco de insolvência a um nível aceitável de cerca de 5%.

6 Conclusões

A modelagem do problema da tomada de decisão de investimento em fundos de pensão via programação estocástica demonstrou-se adequada, uma vez que as restrições gerenciais do fundo - restrições de inventário, balanço, máxima alocação e liquidez - puderam ser facilmente traduzidas em equações e inequações de restrição para o problema de otimização e a representação da economia como uma árvore de cenários se encaixou perfeitamente à estrutura de decisões em estágios em que se baseia a programação estocástica.

A metodologia aqui proposta para a definição da alocação da carteira de um fundo de pensão foi aplicada a dados de um grande fundo de pensão brasileiro - considerando-se certas hipóteses simplificadoras a respeito da dinâmica da evolução do ativo e do passivo do fundo - e demonstrou-se consistente e capaz de dar indicações da saúde financeira do fundo em termos de sua probabilidade de insolvência e de seu valor em risco VaR. No exemplo considerado, observou-se que para uma probabilidade de insolvência da ordem de 5% seria necessário um patrimônio inicial pelo menos 20% acima da reserva matemática $\Psi(\eta_{0,1})$ do fundo.

Essa mesma metodologia pode ser facilmente aplicada a modelos alternativos, ainda baseados em programação estocástica, em que o comportamento das rentabilidades dos ativos disponíveis para investimento e da estrutura do passivo do fundo são diferentes das aqui apresentadas.

Referências

Alexander, C. (2008), *Value-at-Risk Models - Market Risk Analysis (Volume IV)*, 1º edição, John Wiley and Sons, Chichester, 2008.

Birge, J. R. e Louveaux, F. (1997), *Introduction to Stochastic Programming*, 1º edição, Springer-Verlag, New York, 1997.

Bradley, S. P. e Crane, D. B. (1972), A Dynamic Model for Bond Portfolio Management, *Management Science*, v. 19, n. 2, p. 139-151, 1972.

Consigli, G. e Dempster, M. A. H. (1998), Dynamic stochastic programming for asset liability management, *Annals of Operations Research*, v. 81, p. 131-162, 1998.

Drijver, S. (2005), *Asset Liability Management for Pension Funds using Multistage Mixed-integer Stochastic Programming*, Tese (Doutorado) - Rijksuniversiteit Groningen, Groningen, 2005.

Dupačová, J.; Consigli, G. e Wallace, S. W. (2000), Scenarios for multistage stochastic programs, *Annals of Operations Research*, v. 100, p. 25-53, 2007.

Hilli, P.; Koivu, M.; Pennanen T. e Ranne, A. (2007), A stochastic programming model for asset liability management of a Finnish pension company, *Annals of Operations Research*, v. 152, n. 1, p. 115-139, 2007.

Kouwenberg, R. e Zenios, S. A. (2006), Stochastic programming models for asset liability management, Zenios, S. A. e Ziemba, W. T., (Eds.), *Handbook of Asset and Liability Management - Volume 1: Theory and methodology*, Amsterdam, p. 253-303, 2006.

Silva, L. C. (2001), *Alocação ótima de ativos e derivativos em fundos de pensão via programação estocástica*, Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.

Valladão, D. M. (2008), *Alocação Ótima e Medida de Risco de um ALM para Fundo de Pensão Via Programação Estocástica Multi-Estágio e Bootstrap*, Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.