MODELOS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR PARA PLANEJAMENTO TÁTICO DA DISTRIBUIÇÃO DE SUPRIMENTOS

Daniel Felix Ferber
Petrobras
Information Technology, Av. Paulista, 901, São Paulo, São Paulo, 01311-100, Brazil
danielferber@yahoo.com.br

ABSTRACT

The network flow linear programming model is an elegant approach to the tactical planning of supply chains. Despite the differences among problems of this nature, many concepts are recurring: multi-product network, capacity of facilities, transportation capacity, demand, production and inventory on facilities. Most existing studies devoted attention to facilities location and planning. There is less literature on modeling the network flow behavior. This article summarizes the essential concepts of network flow modeling and describes some additional concepts: transformation of supplies, routing restrictions and stock of supplies in transit. The presented model will serve as reference for future work on the tactical planning for supply chains.

KEYWORDS. Supply chain, multi-product, multi-period, linear programming

Main area: L&T - Logistics & Transportation

RESUMO

O modelo de programação linear de fluxo em rede é uma abordagem elegante para o planejamento tático da distribuição de suprimentos. Apesar das diferenças entre problemas dessa natureza, muitos conceitos são recorrentes: malha multi-produto, capacidade das instalações, capacidade de transporte, demanda, produção e estoque nas instalações. A maioria dos estudos existentes dedicou atenção para localização e dimensionamento de instalações. Pouca literatura existe sobre a modelagem do comportamento do fluxo da rede. Este artigo resume os conceitos essenciais da modelagem do fluxo em rede e descreve alguns conceitos adicionais: transformação de suprimentos, restrições de roteamento e de estoque de produtos em trânsito. A modelagem apresentada servirá de referência para a descrição de futuros trabalhos sobre o planejamento tático para distribuição de suprimentos.

PALAVRAS CHAVE. Distribuição de suprimentos, multi-produto, multi-período, programação linear

Área principal: L&T - Logística & Transportes

1 Introdução

O planejamento da cadeia de suprimentos é um dos principais assuntos estudados pela logística. Ela contempla atividades nas instalações e nos meios de transporte com objetivo de atender as demandas dos centros consumidores. Decisões táticas adequadas são necessárias para racionalizar a operação da cadeia no decorrer do horizonte de tempo do planejamento.

Uma consulta na literatura de referência (DANTZIG, 1998; LUENBERGER; YE, 2008; WINSTON; GOLDBERG, 2004) revela que a modelagem como fluxo em rede é uma abordagem elegante para o planejamento da cadeia de suprimentos. Em (WINSTON; GOLDBERG, 2004) afirma-se que tal modelagem permite uma solução computacionalmente eficiente por algoritmos de programação linear. Estas referências descrevem modelos didáticos e consideram apenas um único produto, capacidade limitada nos meios de transporte e parâmetros fixos por todo horizonte de tempo do planejamento. Elas não levam em consideração estoque nas instalações.

Uma grande quantidade de estudos apresenta formulações com premissas pouco flexíveis e especificas para os cenários analisados. Muitos assumem a cadeia de suprimentos com poucos estágios e com um fluxo unidirecional dos fornecedores para produtores, para centros de distribuição e finalmente para consumidores. Um exemplo desta abordagem encontra-se em (HINOJOSA et al., 2008). Várias pesquisas surgiram com intuito de generalizar a modelagem para malhas com parâmetros dinâmicos, multi-produto e com estoque nas instalações. Uma comparação detalhada das abordagens recentes pode ser encontrada em (MELO; NICKEL; GAMA, 2009) e um exemplo está descrito em (MELO; NICKEL; GAMA, 2006). Nota-se que todos estes estudos concentram-se em decidir a localização e o dimensionamento das instalações na malha, decisões típicas do âmbito do planejamento estratégico. Poucos buscam uma modelagem detalhada dos meios de transporte.

No decorrer do artigo apresenta-se uma modelagem voltada para o planejamento tático de cadeia de suprimentos. Apresenta-se a modelagem para conceitos como malha multi-produto, multi-período e com estoques nas instalações. Esta modelagem servirá como base para os conceitos adicionais incorporados: transformação de produtos e restrições de roteamento.

O restante do artigo está organizado como segue. A seção 2 descreve as características consideradas para a cadeia de suprimentos. A seção 3 explica a formulação por programação linear. Considerações finais são apresentadas na seqüência.

2 Descrição do problema

O planejamento da cadeia de suprimentos contempla um conjunto de instalações produtoras e outro conjunto de instalações com demanda de consumo. Os suprimentos da cadeia de distribuição serão denominados *produtos*. Na variante mais simples do problema, deseja-se apenas decidir a parcela de cada produtor que será destinada para atender cada um dos consumidores. Esta abordagem é denominada de *transportation problem* em (WINSTON; GOLDBERG, 2004; DANTZIG, 1998), ou *problema de transporte*.

Quando não é possível atender o consumidor através de uma ligação direta com o produtor, então o problema é denominado de *transshipment problem* segundo (WINSTON; GOLDBERG, 2004; DANTZIG, 1998). O transporte deverá atravessar outras instalações de produção ou de consumo ou até passar por instalações de entroncamento. Estas não produzem nem consomem produtos, apenas realizam o roteamento dos movimentos com instalações vizinhas. Problemas desta natureza são facilmente descritos por uma malha de nós e arcos. Os nós representam instalações de produção, de consumo ou de entroncamento. Os arcos representam uma infraestrutura de meios de transporte entre nós vizinhos. Trata-se de uma modelagem clássica de fluxo de redes, com nós produtores, nós consumidores e arcos direcionados. O deslocamento através do arco é limitado por sua capacidade e resulta em uma penalidade de custo de transporte. A resolução deste problema busca uma atribuição de fluxo aos arcos de forma a minimizar estas penalidades e equilibrar excesso e falta de produtos em diferentes nós. Deseja-se também reduzir penalidades decorrentes de custos de produção não escoada e de custos de demanda não atendida.

As instalações produtoras e consumidoras operam geralmente mais de um produto. Trata-se da cadeia de suprimentos *multi-produto*. Um nó pode apresentar, ao mesmo tempo, comportamento de produtor para determinados produtos, de consumidor para outros e de entroncamento para os demais. Os arcos representam uma infraestrutura obrigada a transportar simultaneamente diferentes produtos que concorrem pela capacidade do arco. Surge a interessante decisão de qual produto priorizar no arco. A penalização específica do produto no arco reduz diretamente o grau de benefício de seu transporte. Mas existem outros fatores indiretos que também influenciam na priorização dos movimentos, como custo de produção não escoada e custo de demanda não atendida, cujas penalizações são exclusivas para cada produto. Se cada produto possuísse arcos dedicados, então bastaria modelar uma malha independente para cada produto.

A característica dinâmica do problema prevê que os parâmetros dos elementos da malha variem no decorrer do tempo. Por este motivo, o horizonte é dividido em períodos, cada qual com seus parâmetros. Trata-se da malha *multi-tempo* ou *dinâmica*. A estocagem em determinados nós é um possivel artifício para rearranjar produtos entre períodos consecutivos e desta forma contornar eventuais violações de capacidade ou elevação de custos operacionais em determinados períodos.

Uma extensão do problema multi-produto introduz várias outras operações além do transporte através dos arcos. Se permitido, alguns nós optam por ajustar sua produção, outros por alterar sua demanda. Eles podem ainda obter ou descartar produtos além da fronteira da malha. Todos estes casos incorrem em penalidades. Se o fornecimento de um produto remanece inviável, então elege-se, se possível, um outro produto equivalente para suprir a demanda. Esta atividade é denominada de *substituição*. Outra alternativa menos desejável consiste em escolher um produto similar, porém com qualidade diferente da esperada pelo nó consumidor, atividade conhecida como *degradação*. A penalização deve refletir o prejuízo de perder o produto mais nobre para atender uma demanda de qualidade inferior ou o custo de violar as expectativas da demanda. De forma mais ampla, define-se determinada combinação linear de produtos consumidos para atender a demanda de outro produto, atividade conhecida como *mistura*, *composição* ou *transformação*.

Os nós apresentam restrições operacionais dependendo de características da infraestrutura representada pelos arcos. Alguns nós não são capazes de iniciar um novo transporte em determinados arcos de saída. Outros não podem receber, eles somente realizam movimentações iniciadas por outros nós da malha. Os motivos das restrições operacionais serão convenientemente ignorados e substituídos por uma simplificação baseada no conceito de conexões. Uma *conexão* é uma seqüencia de arcos que determina um caminho acíclico, simples e válido de um nó origem para um nó destino. A existência da conexão implica que o nó origem seja capaz de iniciar o movimento e que o nó destino seja capaz de receber o produto. Implica também que todos os demais nós da conexão são capazes de realizar o roteamento para os arcos pertencentes ao caminho.

O conjunto de conexões precisa ser enumerado através de um método de pré-processamento. Ele considera pares de nó origem capazes de iniciar movimento e de nó destino capazes de receber. Em seguida determina os possíveis caminhos entre os mesmos. As malhas raramente sofrem alterações em situações reais. O armazenamento e reaproveitamento do conjunto de conexões evitará o pré-processamento repetitivo. Existem critérios que permitem limitar drasticamente a quantidade de conexões de acordo com a natureza do problema.

Por fim, considera-se que os arcos mantém certa quantidade de produtos em seu poder ao final de cada período. Este fato será chamado de estoque de produto em trânsito. Este é um comportamento típico de meios de transportes baseados em dutos, esteiras ou trilhos. Ou de meios que consistem de filas de tamanho constante. O deslocamento da movimentação dependerá do deslocamento do movimentação sucessora e da antecessora. Eles não são autônomos, mas dependem da ação dos nós para seu deslocamento. Caso o nó origem deixe de enviar produtos, ou o destino deixe de receber produtos, então os produtos em trânsito permanecerão parados. Para o planejamento tático não importa a seqüência dos movimentos individuais no arco. Mas é importante conhecer a quantidade e o produto utilizado para deslocar os outros movimentos planejados para atender uma demanda.

3 Modelagem por Programação linear

Define-se a malha como um grafo $G(N,A)$ e um conjunto C. N é o conjunto de nós, A o conjunto de arcos interligando dois nós adjacentes e C o conjunto das conexões estabelecendo a possibilidade de transporte entre dois nós. Os arcos são direcionados, não formam laços e são representados por $\{i,j\} \in A$ se e somente se o arco permite um movimento do nó $i \in N$ para o nó $j \in N$. Uma conexão é uma seqüencia de arcos que determina um caminho acíclico e simples de um nó origem para um nó destino. As conexões também são direcionadas e representadas por $\{i,j\} \in C$ se e somente se a conexão permite iniciar um transporte saindo do nó $i \in N$ e entrando o nó $j \in N$.

Designa-se P o conjunto dos produtos e T conjunto ordenado dos períodos de tempo que compõem o horizonte de tempo do planejamento. Durante um determinado período assume-se a simplificação na qual todas as operações da malha são consideradas instantâneas, simultâneas e sem interdependências.

Assume-se o seguinte significado para os índices durante a modelagem: nó $n \in N$, arco $a \in A$, conexão $c \in C$, produto $p \in P$, e período $t \in T$.

3.1 Modelagem básica

A modelagem básica define uma malha com nós capazes de produzir ou consumir produtos e com restrições de conservação de massa.
Parâmetros:

- $pro_{n,p,t}$: a quantidade do produto p produzida no nó n, no período t; $pro_{n,p,t} \geq 0$.
- $con_{n,p,t}$: a quantidade do produto p consumida no nó n, no período t; $con_{n,p,t} \geq 0$.

Variáveis:

- $x_{a,p,t}$: a quantidade transportada do produto p no arco a, no período t; $x_{a,p,t} \geq 0$.

A função objetivo minimiza a penalidade decorrente dos movimentos nos arcos.

- $c_{a,p,t}$: a penalização para transportar uma unidade do produto p no arco a no período t.

$$\min \sum_{a\in A,\, p\in P, t\in T} c_{a,p,t} x_{a,p,t} \tag{1}$$

O balanço nos nós deve ser nulo: a soma da quantidade produzida e fornecida ao nó é igual à soma da quantidade escoada e consumida. Este balanço envolve os dados da produção e do consumo do nó, os arcos com transportes que fornecem produto e os arcos que escoam produtos.

$$\sum_{i\in N\,|\,a=\{i,n\}\in A} x_{a,p,t} + pro_{n,p,t} = \sum_{j\in N\,|\,a'=\{n,j\}\in A} x_{a',p,t} + con_{n,p,t}, \qquad n \in N,\, p \in P,\, t \in T \tag{2}$$

3.2 Malha desbalanceada

O modelo da seção 3.1 pressupõe que a malha seja balanceada, ou seja, a soma da produção de todos os nós é igual à soma dos consumos. Utilizam-se então variáveis de folga para determinar em qual nó e produto ocorre uma eventual violação do balanço. (WINSTON; GOLDBERG, 2004) sugere a criação de um nó fictício com capacidade de produção infinita e outro com capacidade de consumo infinito. Adicionam-se arcos de todos os nós da malha para tal nó fictício consumidor e arcos do nó fictício produtor para os nós da malha. O valor da produção ou da demanda destes dois nós fictícios é penalizada na função objetivo. Esta abordagem resulta em um modelo assimétrico e com

várias exceções que exigem maior esforço para geração automatizada do programa linear. Por este motivo prefere-se utilizar uma modelagem equivalente que envolve duas variáveis para penalizar individualmente a falta ou o excesso de produto em cada nó.
Variáveis:

- $flt_{n,p,t}$: a quantidade de produto p em falta no nó n no período t; $flt_{n,p,t} \geq 0$.
- $exc_{n,p,t}$: a quantidade de produto p em excesso no nó n no período t; $exc_{n,p,t} \geq 0$.

Se a produção, o consumo e os transportes satisfazerem o balanceamento em determinado nó, então ambas variáveis serão nulas. Caso contrário, apenas uma delas será diferente de zero e considera-se a solução da programação linear inviável. As variáveis de folga indicam um potencial período e local como causadores da violação de balanço, mas esta pode ser decorrente de decisões de períodos anteriores, eventualmente até de atividades com produtos em outros nós.

A nova função objetivo é semelhante à apresentada na função objetivo 1 e penaliza também a falta e o excesso de produto nos nós. A penalização deve apresentar um valor relativamente alto, para que o critério seja tratado com prioridade muito superior aos demais.

- p_{flt}: penalização por falta de produto.
- p_{exc}: penalização por excesso de produto.

$$\min \sum_{a\in A,\, p\in P,\, t\in T} c_{a,p,t}x_{a,p,t} + p_{flt} \sum_{n\in N,\, p\in P,\, t\in T} flt_{n,p,t} + p_{exc} \sum_{n\in N,\, p\in P,\, t\in T} exc_{n,p,t} \tag{3}$$

A nova restrição de balanceamento complementa a equação 2 com as variáveis $flt_{n,p,t}$ e $exc_{n,p,t}$:

$$\begin{aligned} \sum_{i\in N\,|\,a=\{i,n\}\in A} x_{a,p,t} + pro_{n,p,t} + flt_{n,p,t} = \\ = \sum_{j\in N\,|\,a'=\{n,j\}\in A} x_{a',p,t} + con_{n,p,t} + exc_{n,p,t}, \qquad n\in N,\, p\in P,\, t\in T \end{aligned} \tag{4}$$

3.3 Estoque nos Nós

O conceito do estoque nos nós é uma forma de lidar com situações momentâneas de desequilíbrio de balanço dos nós. O estoque permite adiantar o recebimento ou atrasar o envio de produtos para reduzir eventuais inviabilidades do modelo da seção 3.2. Para uma formulação mais abrangente, definem-se limites opcionais de mínimo e máximo para a quantidade estocada no nó. Denomina-se *meta* a quantidade preferencial para o estoque, mas permite-se desviar deste valor para atender outras restrições.
Parâmetros:

- $estMin_{n,p,t}$, $estMax_{n,p,t}$: a capacidade mínima e máxima de estoque do produto p no nó n no o período t, ou zero para não limitar; $estMin_{n,p,t} \geq 0$, $estMax_{n,p,t} \geq 0$.
- $estMet_{n,p,t}$: a quantidade desejada de estoque do produto p no nó n no o período t, ou zero para omitir a meta; $estMet_{n,p,t} \geq 0$.
- $estI_{n,p}$: a quantidade de estoque do produto p no nó n no início do horizonte de tempo do planejamento; $estI_{n,p} \geq 0$.

Algumas aplicações não exigem que todos os nós apresentem limites e metas. Caso um dos parâmetros $estMin_{n,p,t}$, $estMax_{n,p,t}$ ou $estMet_{n,p,t}$ seja zero, então não serão geradas as respectivas restrições.
Variáveis:

- $estF_{n,p,t}$: a quantidade de estoque do produto p no nó n na fronteira entre o período t para o próximo período; $estF_{n,p,t} \geq 0$.
- $estFlt_{n,p,t}$: o quanto $estF_{n,p,t}$ está abaixo de $estMet_{n,p,t}$ ou zero; $estFlt_{n,p,t} \geq 0$.
- $estExc_{n,p,t}$: o quanto $estF_{n,p,t}$ está acima de $estMet_{n,p,t}$ ou zero; $estExc_{n,p,t} \geq 0$.

Convenciona-se $t_0 \in T$ o primeiro período do horizonte de tempo e $t-1 \in T$ o período anterior em relação à t.

A função objetivo penaliza o desvio em relação à meta de estoque. É interessante aplicar uma penalização relativa ao valor da meta, caso contrário, o modelo tenderá a atender a meta de nós com grande capacidade de estocagem (por possuírem mais unidades de produto para aproximar à meta) em detrimento aos nós com meta e pequena capacidade. Algumas parcelas adicionadas à função objetivo 3 no modelo da seção 3.2 são omitidas por motivos de clareza:

- p_{estFlt_n}: penalização no nó n para a porcentagem de $estF_{n,p,t}$ que está abaixo de $estMet_{n,p,t}$.
- p_{estExc_n}: penalização no nó n para a porcentagem de $estF_{n,p,t}$ que está acima de $estMet_{n,p,t}$.

$$\min \sum_{a\in A,\, p\in P, t\in T} c_{a,p,t} x_{a,p,t} + \ldots + p_{estFlt_n} \sum_{\substack{n\in N,\, p\in P, t\in T\\ estMet_{n,p,t}\neq 0}} \frac{estFlt_{n,p,t}}{estMet_{n,p,t}} + p_{estExc_n} \sum_{\substack{n\in N,\, p\in P, t\in T\\ estMet_{n,p,t}\neq 0}} \frac{estExc_{n,p,t}}{estMet_{n,p,t}} \qquad (5)$$

Normalmente, $p_{estFlt_n} = p_{estExc_n} = p_{est}$, onde p_{est} é uma penalização comum para todos os nós. Algumas aplicações deste modelo exigem que um nó produtor prefira estoque baixo para reduzir o risco da produção exceder a capacidade máxima de estoque: escolhe-se $p_{estFlt_n} < p_{estExc_n}$ e possivelmente reforça-se este objetivo com a escolha $estMet_{n,p,t} = estMin_{n,p,t}$. O argumento oposto vale para nós consumidores, que poderão preferir um estoque alto através de uma escolha $p_{estFlt_n} > p_{estExc_n}$ e $estMet_{n,p,t} = estMax_{n,p,t}$

A nova equação de balanco do nó envolve também os estoques no início do horizonte de planejamento e nos finais de cada período. As parcelas introduzidas pela restrição 4 pelo modelo da seção 3.2 são omitidas por motivo de clareza:

$$\begin{aligned} &\sum_{i\in N\,|\,a=\{i,n\}\in A} x_{a,p,t_0} + pro_{n,p,t_0} + \ldots + estI_{n,p} = \\ &\qquad = \sum_{j\in N\,|\,a'=\{n,j\}\in A} x_{a',p,t_0} + con_{n,p,t_0} + \ldots + estF_{n,p,t_0}, \quad n\in N,\, p\in P \end{aligned} \qquad (6)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i\in N\,|\,a=\{i,n\}\in A} x_{a,p,t} + pro_{n,p,t} + \ldots + estF_{n,p,t-1} = \\ &\qquad = \sum_{j\in N\,|\,a'=\{n,j\}\in A} x_{a',p,t} + con_{n,p,t} + \ldots + estF_{n,p,t}, \quad \forall n\in N,\, p\in P, t\in T, t\neq t_0 \end{aligned} \qquad (7)$$

O estoque final deve atender os limites de capacidade e a meta. A restrição é aplicada somente se o respectivo limite for não nulo.

$$\left.\begin{array}{rl} estF_{n,p,t} \geq estMin_{n,p,t} & \text{se } estMin_{n,p,t} > 0 \\ estF_{n,p,t} \leq estMax_{n,p,t} & \text{se } estMax_{n,p,t} > 0 \\ estExc_{n,p,t} \geq estF_{n,p,t} - estMet_{n,p,t} & \text{se } estMet_{n,p,t} > 0 \\ estFlt_{n,p,t} \geq estMet_{n,p,t} - estF_{n,p,t} & \text{se } estMet_{n,p,t} > 0 \end{array}\right\} \quad n\in N,\, p\in P, t\in T \qquad (8)$$

3.4 Produção e consumo ajustável

Outra forma de lidar com desequilíbrio momentâneo entre a produção e o consumo é permitir que determinados nós possam ajustar sua produção ou seu consumo dentro de certa faixa de tolerância. A modelagem deste quesito é similar à anterior do estoque nos nós e introduz uma parcela ajustável na produção e no consumo como complemento à parcela fixa do modelo da seção 3.1.

Parâmetros:

- $proMin_{n,p,t}$, $proMax_{n,p,t}$: a capacidade mínima e máxima de ajustar a produção do produto p no nó n no período t, ou zero para não limitar; $proMin_{n,p,t} \geq 0$, $proMax_{n,p,t} \geq 0$.
- $conMin_{n,p,t}$, $conMax_{n,p,t}$: a capacidade mínima e máxima de ajustar o consumo do produto p no nó n no período t, ou zero para não limitar; $conMin_{n,p,t} \geq 0$, $conMax_{n,p,t} \geq 0$.
- $proMet_{n,p,t}$: a quantidade desejada de produção do produto p no nó n no período t, ou zero para omitir a meta; $proMet_{n,p,t} \geq 0$.

- $conMet_{n,p,t}$: a quantidade desejada de consumo do produto p no nó n no período t, ou zero para omitir a meta; $conMet_{n,p,t} \geq 0$.

Variáveis:

- $proAjs_{n,p,t}$: a quantidade extra de ajuste produzida do produto p no nó n no período t; $proAjs_{n,p,t} \geq 0$.
- $proFlt_{n,p,t}$: o quanto $proAjs_{n,p,t}$ está abaixo de $proMet_{n,p,t}$ ou zero; $proFlt_{n,p,t} \geq 0$.
- $proExc_{n,p,t}$: o quanto $proAjs_{n,p,t}$ está acima de $proMet_{n,p,t}$ ou zero; $proExc_{n,p,t} \geq 0$.
- $conAjs_{n,p,t}$: a quantidade extra de ajuste consumida do produto p no nó n no período t; $conAjs_{n,p,t} \geq 0$.
- $conFlt_{n,p,t}$: o quanto $conAjs_{n,p,t}$ está abaixo de $conMet_{n,p,t}$ ou zero; $conFlt_{n,p,t} \geq 0$.
- $conExc_{n,p,t}$ o quanto $conAjs_{n,p,t}$ está acima de $conMet_{n,p,t}$ ou zero; $conExc_{n,p,t} \geq 0$.

A nova função objetivo penaliza o desvio em relação às metas de consumo e produção. Pelo mesmo argumento apresentado para a função objetivo 5 da seção 3.3, a penalização do desvio da meta é relativa e não absoluta. Neste caso, a penalização é a mesma tanto para atividades de produção ou de consumo acima da meta como para atividades abaixo.

- p_{ajs} penalização para a porcentagem de $proAjs_{n,p,t}$ que está abaixo ou acima de $proMet_{n,p,t}$; de $conAjs_{n,p,t}$ abaixo ou acima de $conMet_{n,p,t}$.

A formulação omite as parcelas do modelos das seções 3.2 e 3.3, irrelevantes para esta modelagem. Nova função objetivo:

$$\begin{aligned} \min \sum_{a\in A,\, p\in P,\, t\in T} c_{a,p,t} x_{a,p,t} + \ldots + \\ + p_{ajs} \sum_{\substack{n\in N,\, p\in P,\, t\in T \\ proMet_{n,p,t}\neq 0}} \left(\frac{proFlt_{n,p,t}}{proMet_{n,p,t}} + \frac{proExc_{n,p,t}}{proMet_{n,p,t}} \right) + p_{ajs} \sum_{\substack{n\in N,\, p\in P,\, t\in T \\ conMet_{n,p,t}\neq 0}} \left(\frac{conFlt_{n,p,t}}{conMet_{n,p,t}} + \frac{conExc_{n,p,t}}{conMet_{n,p,t}} \right) \end{aligned} \tag{9}$$

Novo balanço dos nós:

$$\begin{aligned} \sum_{i\in N \,|\, a=\{i,n\}\in A} x_{a,p,t} + pro_{n,p,t} + \ldots + proAjs_{n,p,t} = \\ = \sum_{j\in N \,|\, a'=\{n,j\}\in A} x_{a',p,t} + con_{n,p,t} + \ldots + conAjs_{n,p,t}, \quad n \in N,\, p \in P,\, t \in T \end{aligned} \tag{10}$$

As restrições de ajuste de produção e consumo são aplicadas somente quando os respectivos limites ou metas forem não nulos, uma vez que nem todos os nós são obrigados a suportar tal tipo de ajuste.

$$\left. \begin{array}{rl} pro_{n,p,t} \geq proMin_{n,p,t} & \text{se } proMin_{n,p,t} > 0 \\ pro_{n,p,t} \leq proMax_{n,p,t} & \text{se } proMax_{n,p,t} > 0 \\ proExc_{n,p,t} \geq pro_{n,p,t} - proMet_{n,p,t} & \text{se } proMet_{n,p,t} > 0 \\ proFlt_{n,p,t} \geq proMet_{n,p,t} - pro_{n,p,t} & \text{se } proMet_{n,p,t} > 0 \\ con_{n,p,t} \geq conMin_{n,p,t} & \text{se } conMin_{n,p,t} > 0 \\ con_{n,p,t} \leq conMax_{n,p,t} & \text{se } conMax_{n,p,t} > 0 \\ conExc_{n,p,t} \geq con_{n,p,t} - conMet_{n,p,t} & \text{se } conMet_{n,p,t} > 0 \\ conFlt_{n,p,t} \geq conMet_{n,p,t} - con_{n,p,t} & \text{se } conMet_{n,p,t} > 0 \end{array} \right\} \quad n \in N,\, p \in P,\, t \in T \tag{11}$$

3.5 Transformações lineares de produtos

A transformação linear de produtos é uma formulação genérica para as atividades de mistura, composição, transformação, degradação e substituição. Também é uma forma de lidar com desequilíbrio momentâneo entre a produção e o consumo. Cada nó apresenta um conjunto de regras de transformação que descrevem opções para obter o produto em falta através do consumo de determinada proporção de outros produtos em excesso. A penalização pelo uso de uma regra é proporcional à quantidade do produto obtido e à prioridade da regra. Esta prioridade ordena as regras de acordo com critério de preferência para aplicação das mesmas. Ela reflete o custo da atividade de transformação ou o prejuízo de atender uma demanda utilizando produtos de maior valor.

As atividades são representadas como segue. A substituição é descrita por uma regra que obtém uma unidade do produto substituto para cada unidade de produto consumido e com prioridade próxima de zero. A degradação é similar, mas com uma prioridade que mede o prejuízo do produto de maior valor ser aplicado como um outro de menor valor. A mistura é descrita por uma regra que especifica os produtos utilizados e suas respectivas proporções.

Parâmetros:

- $traN_{n,p,t}$: o número de regras de transformação para obter o produto p no nó n no período t, ou zero caso não existam regras.
- $traPri_{n,p,t,i}$: a prioridade da i-ésima regra para obter o produto p no nó n no período t, $1 \leq i \leq traN_{n,p,t}$; $traPri_{n,p,t,i} \geq 0$.
- $traPrp_{n,p,t,i,k}$: a proporção do produto k consumido na i-ésima regra para obter o produto p no nó n no período t, $1 \leq i \leq traN_{n,p,t}$; $traPrp_{n,p,t,i,k} \geq 0$. A proporção é expressa em relação ao produto obtido p. É razoável supor que $\sum_{k \in N} traPrp_{n,p,t,i,k} = 1$ se a transformação preserva a massa dos produtos consumidos. E que $\sum_{k \in N} traPrp_{n,p,t,i,k} > 1$ quando a transformação é ineficiente e consome mais que produz.
- $traMin_{n,p,t,i}$, $traMax_{n,p,t,i}$: a capacidade mínima e máxima da i-ésima regra para obter o produto p no nó n no período t, $1 \leq i \leq traN_{n,p,t}$, ou zero para não limitar; $traMin_{n,p,t,i} \geq 0$, $traMax_{n,p,t,i} \geq 0$.
- $traMet_{n,p,t,i}$: a quantidade desejada de produção da i-ésima regra para obter o produto p no nó n no período t, $1 \leq i \leq traN_{n,p,t}$, ou zero para omitir a meta; $traMet_{n,p,t,i} \geq 0$.

Variáveis:

- $tra_{n,p,t,i}$: a quantidade de produção da i-ésima regra para obter o produto p no nó n no período t, $1 \leq i \leq traN$; $tra_{n,p,t,i} \geq 0$.
- $traFlt_{n,p,t,i}$: o quanto $tra_{n,p,t,i}$ está abaixo de $traMet_{n,p,t,i}$ ou zero; $traFlt_{n,p,t,i} \geq 0$.
- $traExc_{n,p,t,i}$: o quanto $tra_{n,p,t,i}$ está acima de $traMet_{n,p,t,i}$ ou zero; $traExc_{n,p,t,i} \geq 0$.

A nova função objetivo penaliza proporcionalmente à quantidade produzida por cada regra, multiplicado pela respectiva prioridade. Também penaliza de forma relativa o desvio das metas de cada regra.

- p_{tra}: penalização de referência pelo uso de uma regra de transformação para produzir uma unidade. Esta penalização é multiplicada pela prioridade da regra.
- p_{traMet}: penalização para a porcentagem de $tra_{n,p,t,i}$ que está abaixo ou acima de $traMet_{n,p,t,i}$.

A formulação omite as parcelas introduzidas nas seções 3.2 a 3.4. Nova função objetivo:

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{a \in A,\, p \in P,\, t \in T} & c_{a,p,t} x_{a,p,t} + \ldots + \\
& + p_{tra} \sum_{\substack{n \in N,\, p \in P,\, t \in T, \\ 1 \leq i \leq traN_{n,p,t}}} (traPri_{n,p,t,i}\, tra_{n,p,t,i}) + p_{traMet} \sum_{\substack{n \in N,\, p \in P,\, t \in T, \\ 1 \leq i \leq traN_{n,p,t} \\ traMet_{n,p,t,i} \neq 0}} \left(\frac{traFlt_{n,p,t,i}}{traMet_{n,p,t,i}} + \frac{traExc_{n,p,t,i}}{traMet_{n,p,t,i}} \right) \quad (12)
\end{aligned}
$$

Novo balanço dos nós:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i \in N \,|\, a = \{i,n\} \in A} x_{a,p,t} + pro_{n,p,t} + \ldots + \sum_{1 \leq i \leq traN_{n,p,t}} tra_{n,p,t,i} = \sum_{j \in N \,|\, a' = \{n,j\} \in A} x_{a',p,t} + con_{n,p,t} + \\
+ \ldots + \sum_{\substack{m \in N \\ o \in P}} \left(\sum_{1 \leq i \leq traN_{m,o,t}} (traPrp_{m,o,t,i,p}\, tra_{m,o,t,i}) \right) \quad n \in N,\, p \in P,\, t \in T \quad (13)
\end{aligned}
$$

Limites e metas:

$$\left.\begin{array}{rl} tra_{n,p,t,i} \geq traMin_{n,p,t,i} & \text{se } traMin_{n,p,t,i} > 0 \\ tra_{n,p,t,i} \leq traMax_{n,p,t,i} & \text{se } traMax_{n,p,t,i} > 0 \\ traExc_{n,p,t,i} \geq tra_{n,p,t,i} - proMet_{n,p,t,i} & \text{se } traMeta_{n,p,t,i} > 0 \\ traFlt_{n,p,t,i} \geq traMet_{n,p,t,i} - tra_{n,p,t,i} & \text{se } traMeta_{n,p,t,i} > 0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} n \in N,\ p \in P, t \in T, \\ 1 \leq i \leq traN_{n,p,t} \end{array} \quad (14)$$

3.6 Restrição de capacidade de transporte

Considera-se que cada produto tenha um peso diferente no cálculo da ocupação da capacidade do arco. Parâmetros:

- $arcMin_{a,t}$, $arcMax_{a,t}$: a capacidade mínima e máxima de transporte do arco a no período t; $arcMin_{a,t} \geq 0$, $arcMax_{a,t} \geq 0$.
- $arcFtr_{a,p,t}$: o peso de ocupação do produto p no arco a no período t no cálculo da ocupação da capacidade; $arcFtr_{a,p,t} \geq 0$.

Restrições:

$$arcMin_{a,t} \leq \sum_{p \in P} (arcFtr_{a,p,t}\, x_{a,p,t}) \leq arcMax_{a,t}, \quad a \in A, t \in T \quad (15)$$

Os coeficientes $arcFtr_{a,p,t}$ da inequação 15 permitem duas interpretações. Na primeira e também na mais simples das interpretações, é necessário consumir determinado recurso para realizar a movimentação dos produtos. Supõe-se que o transporte de uma unidade do produto p no arco a no período t consome $arcFtr_{a,p,t}$ unidades de um recurso de um total disponível dado por $arcMax_{a,t}$.

Na outra interpretação, os produtos ocupam os arcos por um tempo inversamente proprocional à sua velocidade de transporte. Neste caso, $arcMax_{a,t}$ representa a duração do periodo t e $arcFtr_{a,p,t}$ o inverso da velocidade (ou vazão) do produto p no arco a no período t.

3.7 Restrição de percurso de transporte

O conjunto de conexões descreve as possibilidades de caminhos que um transporte pode realizar sobre a malha.

Parâmetros:

- cxA_c seqüência de arcos que formam a conexão c; $cxA_c \subseteq A$.

Variáveis:

- $xc_{c,p,t}$: a quantidade do produto p transportada através da conexão c no período t.

A função objetivo apresentada na seção 3.1 considerava somente a penalização pelo uso do arco. Agora considerará também uma penalização pelo uso da conexão. O primeiro caso penaliza o transporte de acordo com a topologia da malha, o último penaliza de acordo com o par de nós envolvidos. A escolha da penalização predominante dependerá das características do problema.

- $c_{c,p,t}$: a penalização para transportar uma unidade do produto p na conexão c no período t.

$$\min \sum_{a \in A,\, p \in P, t \in T} c_{a,p,t} x_{a,p,t} + \ldots + \sum_{c \in C,\, p \in P, t \in T} c_{c,p,t} xc_{c,p,t} \quad (16)$$

Nesta nova modelagem a variável x_a torna-se uma combinação linear das variáveis xc_c:

$$x_{a,p,t} = \sum_{c \in C \,|\, a \in cxA_c} xc_{c,p,t}, \quad a \in A,\ p \in P, t \in T \quad (17)$$

3.8 Estoque de produtos em trânsito

O estoque de produtos em trânsito implica a modelagem equações de conservação de massa também para os arcos.

Parâmetros:

- $arcCap_a$: a capacidade do arco, ou seja, a quantidade que de produto que o arco a retém no estoque de um período para o próximo; $arcCap_a \geq 0$.
- $arcI_{a,p}$: quantidade de estoque do produto p no arco a no início do horizonte de planejamento; $arcI_{a,p} \geq 0$ e $\sum_{p \in P} arcI_{a,p} = arcCap_a$.

Variáveis:

- $xe_{a,p,t}$, $xs_{a,p,t}$: respectivamente, a quantidade do produto p que entra no arco a e que sai do arco a no período t; $xe_{a,p,t} \geq 0$, $xs_{a,p,t} \geq 0$.
- $arcF_{a,p,t}$: a quantidade de estoque do produto p no arco a na fronteira entre o período t e o próximo período; $arcF_{a,p,t} \geq 0$.
- $arcEM_{a,p,t}$: a quantidade de estoque do produto p no arco a no período t que será movimentada para a saída do arco; $arcEM_{a,p,t} \geq 0$.
- $arcEE_{a,p,t}$: a quantidade de estoque do produto p no arco a no período t que permanecerá retida no estoque para o próximo período; $arcEE_{a,p,t} \geq 0$.
- $arcMM_{a,p,t}$: a quantidade do produto p no arco a no período t que entra no arco e que será enviada pela saída do arco; $arcoMM_{a,p,t} \geq 0$.
- $arcME_{a,p,t}$: a quantidade do produto p no arco a no período t que entra no arco e que será retida no estoque; $arcME_{a,p,t} \geq 0$.

A retenção do estoque é constante de um período para o próximo. A quantidade entrando no arco é igual à quantidade saindo:

$$arcCap_a = \sum_{p \in P} xe_{a,p,t} = \sum_{p \in P} xs_{a,p,t}, \quad a \in A, t \in T \tag{18}$$

O estoque de produto em transito é movimento para a saída ($arcEM_{a,p,t} > 0$) ou continua retido ($arcEE_{a,p,t} > 0$). O movimento da entrada é enviado pela saída ($arcMM_{a,p,t} > 0$) ou é retido ($arcME_{a,p,t} > 0$):

$$\left.\begin{aligned} arcI_{a,p} &= arcEE_{a,p,t_0} + arcEM_{a,p,t_0} \\ xs_{a,p,t_0} &= arcEM_{a,p,t_0} + arcMM_{a,p,t_0} \\ xe_{a,p,t_0} &= arcMM_{a,p,t_0} + arcME_{a,p,t_0} \\ arcF_{a,p,t_0} &= arcME_{a,p,t_0} + arcEE_{a,p,t_0} \end{aligned}\right\} \quad a \in A,\ p \in P \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} arcF_{a,p,t-1} &= arcEE_{a,p,t} + arcEM_{a,p,t} \\ xs_{a,p,t} &= arcEM_{a,p,t} + arcMM_{a,p,t} \\ xe_{a,p,t} &= arcMM_{a,p,t} + arcME_{a,p,t} \\ arcF_{a,p,t} &= arcME_{a,p,t} + arcEE_{a,p,t} \end{aligned}\right\} \quad a \in A,\ p \in P, t \in T, t \neq t_0 \tag{20}$$

Para evitar o uso de variáveis binárias, cabe à função objetivo favorecer uma aproximação linear adequada para o comportamento do estoque de produtos em trânsito.

- p_{EE}: penalização para uma unidade de produto que permanece retido no estoque de um período para o próximo.
- p_{MM}: penalização para uma unidade de produto movimentado da entrada para a saída.
- p_{EM}: penalização para uma unidade de produto do estoque entregue na saída.
- p_{ME}: penalização para uma unidade de produto da entrada que permanece retido no estoque.
- p_S: penalização para uma unidade de produto enviado pela saída do arco.
- p_E: penalização para uma unidade de produto recebido na entrada do arco.

As penalizações precisam ser calibradas para priorizar o repouso da malha. Todos os produtos em estoque no arco devem permanecer retidos de um período para o próximo, a não se que justifique realizar movimento para atender uma demanda. E caso haja movimento, deve priorizar entregar o estoque em trânsito do arco na saída antes de entregar novos movimentos.

A formulação omite as parcelas introduzidas nas seções 3.2 a 3.4 e 3.7. Nova função objetivo:

$$\begin{aligned} \min \sum_{a\in A,\, p\in P, t\in T} c_{a,p,t} x_{a,p,t} + \ldots + \sum_{a\in A,\, p\in P, t\in T} (p_S xs_{a,p,t} + p_E xe_{a,p,t}) + \\ + \sum_{a\in A,\, p\in P, t\in T} (p_{EE} arcEE_{a,p,t} + p_{MM} arcMM_{a,p,t} + p_{EM} arcEM_{a,p,t} + p_{ME} arcME_{a,p,t}) \end{aligned} \quad (21)$$

Para o estoque em trânsito satisfazer as restrições de percurso apresentadas na seção 3.7, é necessário adicionar algumas variáveis e restrições adicionais.

Parâmetros:

- $cxI_{c,a,p}$: a quantidade do produto p que em estoque no arco a da conexão c no no início do horizonte de tempo do planejamento; $cxI_{c,a,p} \geq 0$.
- cxA_c seqüência de arcos que formam a conexão tal como descrito no modelo da seção 3.7.

Variáveis:

- $xce_{c,a,p,t}$ e $xcs_{c,a,p,t}$: respectivamente, a quantidade do produto p que entra no arco a e que sai do arco a da conexão c no período t; $xce_{c,a,p,t} \geq 0$, $xcs_{c,a,p,t} \geq 0$.
- $cxF_{c,a,p,t}$: a quantidade do produto p em estoque no arco a da conexão c no período t; $cxF_{c,a,p,t} \geq 0$.

As variáveis relacionadas a arcos são combinações lineares das respectivas variáveis das conexões:

$$xe_{a,p,t} = \sum_{c\in C\,|\,a\in cxA_c} xce_{c,a,p,t}, \quad a\in A,\ p\in P,\ t\in T \quad (22)$$

$$xs_{a,p,t} = \sum_{c\in C\,|\,a\in cxA_c} xcs_{c,a,p,t}, \quad a\in A,\ p\in P,\ t\in T \quad (23)$$

$$arcI_{a,p} = \sum_{c\in C\,|\,a\in cxA_c} cxI_{c,a,p}, \quad a\in A,\ p\in P \quad (24)$$

$$arcF_{a,p,t} = \sum_{c\in C\,|\,a\in cxA_c} cxF_{c,a,p}, \quad a\in A,\ p\in P,\ t\in T \quad (25)$$

Seja $a-1\in A$ o arco que antecede a em uma conexão. Então preserva-se as quantidades relativas a uma conexão entre dois arcos consecutivos.

$$xce_{c,a,p,t} = xcs_{c,a-1,p,t}, \quad c\in C,\ a\in cxA_c,\ p\in P,\ t\in T \quad (26)$$

A nova restrição de balanceamento substitui a equação 2 trocando as variáveis $x_{a,p,t}$ por $xe_{a,p,t}$ e $xs_{a,p,t}$:

$$\sum_{i\in N\,|\,a=\{i,n\}\in A} xs_{a,p,t} + pro_{n,p,t} + \ldots = \sum_{j\in N\,|\,a'=\{n,j\}\in A} xe_{a',p,t} + con_{n,p,t} + \ldots, \quad n\in N,\ p\in P,\ t\in T \quad (27)$$

4 Conclusão e trabalhos futuros

Este artigo apresentou um modelo de programação linear para vários aspectos do planejamento da cadeia de distribuição de suprimentos. Ele acrescenta formulações para a transformação de produtos ao longo da malha e restrições de roteamento.

Optou-se por não considerar as decisões estratégicas como localização e dimensionamento de instalações, mas somente as decisões táticas do planejamento da distribuição de suprimentos. São elas: ajustes na produção ou no consumo das instalações, previsão de estoque nas instalações, decisões de transformações de produtos, taxa de utilização dos meios de transporte, rotas pré-estabelecidas para os movimentos e estoque de produtos em trânsito. Desta forma, a resolução do modelo obtém uma estimativa das atividades durante o horizonte de tempo do planejamento e também uma estimativa dos recursos operacionais necessários.

Através da divisão do horizonte de tempo em períodos é possível reconhecer na solução as atividades de maior prioridade em cada período e as atividades críticas. Estas informações poderão guiar o planejamento operacional da malha de distribuição de suprimentos. As variáveis de folga da seção 3.2 indicam potencialmente em quais instalações existem condições inviáveis para a operação.

As atividades descritas neste antigo concentram-se nas instalações. Trabalhos futuros preveem melhorias no modelamento dos movimentos de produtos nos arcos. Pretende-se utilizar períodos mais curtos para atenuar a noção simplesta de que os movimentos são instantâneos e simultâneos. Isto possibilitará aproximar melhor a existência de produtos em trânsito nos arcos entre dois períodos consecutivos. Estes produtos precisariam ser entregues no destino antes da entrega dos movimentos do próximo período. Tal formulação envolveria também conceitos da velocidade dos movimentos, e indiretamente estoques intermediários caso a distância entre duas instalações impeça uma entrega no mesmo período. Por fim, deseja-se evoluir o modelo para arcos bi-direcionais, cujos produtos em transito serão forçados a realizar uma reversão antes de alternar o sentido dos próximos movimentos. Esta é a realidade de dutos, esteiras ou trilhos. Em um futuro trabalho será implementado um protótipo como prova de conceito para o modelo proposto.

As variantes mencionadas são certamente desafios para o desenvolvimento de novos métodos eficientes para problemas práticos tão importantes e estratégicos como a distribuição de suprimentos.

Referências

DANTZIG, G. *Linear programming and extensions*. [S.l.]: Princeton University Press, 1998. (Landmarks in Physics and Mathematics).

HINOJOSA, Y. et al. Dynamic supply chain design with inventory. *Computers & Operations Research*, v. 35, n. 2, p. 373 – 391, 2008.

LUENBERGER, D.; YE, Y. *Linear and nonlinear programming*. [S.l.]: Springer, 2008. (International series in operations research & management science).

MELO, M.; NICKEL, S.; GAMA, F. S. da. Dynamic multi-commodity capacitated facility location: a mathematical modeling framework for strategic supply chain planning. *Computers & Operations Research*, v. 33, n. 1, p. 181 – 208, 2006.

MELO, M.; NICKEL, S.; GAMA, F. S. da. Facility location and supply chain management - a review. *European Journal of Operational Research*, v. 196, n. 2, p. 401 – 412, 2009.

WINSTON, W.; GOLDBERG, J. *Operations research: applications and algorithms*. [S.l.]: Thomson Brooks/Cole, 2004.