

## **SOBRE O PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO DE TROCAS DE FERRAMENTAS: UM CASO ESPECIAL**

**Horacio Hideki Yanasse**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE  
Avenida dos Astronautas, 1.758 - São José dos Campos, SP, Brasil  
horacio@lac.inpe.br

### **RESUMO**

Mostra-se que quando um grafo MOSP correspondente a um problema de minimização de trocas de ferramentas possui algum vértice de corte então quando se remove este vértice de corte e todas as arestas incidentes nele, uma solução ótima para o problema original pode ser construído a partir de soluções ótimas dos problemas de minimização de trocas de ferramentas correspondentes às componentes conexas do grafo resultante.

**PALAVRAS CHAVE.** Minimização de troca de ferramentas, Minimização de pilhas abertas, Decomposição.

**Área principal:** Otimização Combinatória

### **ABSTRACT**

We show that when the MOSP graph corresponding to a minimization of tool switches problem has some cutting vertex then, when we remove this vertex and all edges incident to it, an optimal solution for the original problem can be built from optimal solutions of minimization of tool switches problems corresponding to the connected components of the resulting graph.

**KEYWORDS.** Minimization of tool switches, Minimization of open stacks, Decomposition.

**Main area:** Combinatorial optimization

## 1. Introdução

No problema de minimização de troca de ferramentas (MTSP) tem-se um conjunto de tarefas que precisam ser processadas em uma máquina flexível de manufatura. Cada tarefa necessita de um conjunto de ferramentas para ser processada. Estas ferramentas precisam estar todas na caixa de ferramentas da máquina para que a tarefa possa ser processada. A caixa de ferramentas da máquina tem uma capacidade limitada, não sendo possível colocar simultaneamente todas as ferramentas necessárias para processar todas as tarefas. Procura-se por uma sequência de processamento deste conjunto de tarefas de modo que o número requerido de trocas de ferramentas seja o menor possível.

Um outro problema de sequenciamento que tem uma estreita relação com o MTSP é o problema de minimização de pilhas abertas (MOSP). No MOSP procura-se por uma sequência para processar um conjunto de tarefas de modo que o número máximo de pilhas abertas seja o menor possível. Uma pilha é aberta na primeira vez que uma ferramenta é utilizada e permanece aberta enquanto existir alguma tarefa que a utilize ainda a processar. Observe que se for possível encontrar uma solução para o MOSP em que o número máximo de pilhas abertas for menor ou igual à capacidade da caixa de ferramentas da máquina, então utilizando-se esta mesma solução para o MTSP correspondente, nas necessidades de trocas de ferramentas é possível retirar da caixa apenas aquelas ferramentas que não serão mais utilizadas por nenhuma outra tarefa da sequência. Esta, portanto, é uma solução ótima para o MTSP pois minimiza o número de trocas de ferramentas.

Podemos em princípio achar uma solução ótima para o MOSP correspondente e, com isso, obter uma solução ótima para o MTSP se o número máximo de pilhas abertas for menor ou igual à capacidade da caixa de ferramentas da máquina.

O MOSP, entretanto, é um problema NP-difícil (veja Linhares e Yanasse, 2002). Além disso, no caso do valor ótimo do MOSP ser superior à capacidade da caixa de ferramentas, a sequência ótima do MOSP correspondente não necessariamente fornece uma sequência ótima para o MTSP. Por outro lado, se o número máximo de pilhas abertas for igual à capacidade da caixa de ferramentas da máquina, então uma solução ótima do MTSP também fornece uma solução ótima para o MOSP correspondente. Assim como o MOSP, o MTSP é NP-difícil (Garey e Johnson, 1979; Crama *et al.*, 1994; Tang e Denardo, 1988), portanto, também é exigido um esforço computacional grande para encontrar uma solução para o MOSP resolvendo-se o MTSP correspondente. MOSP e MTSP são similares mas não são equivalentes.

O MTSP tem sido estudado por diversos autores (Tang e Denardo, 1988; Laporte *et al.*, 2002; Bard, 1988; Crama *et al.*, 1994; Hertz *et al.*, 1996; Yanasse e Lamosa, 2005; Yanasse *et al.*, 2009). De nosso conhecimento, são muito poucos os métodos exatos para resolver este problema. Além disso, eles têm tido sucesso limitado na obtenção de soluções ótimas em problemas pequenos. No trabalho de Laporte e outros (Laporte *et al.*, 2002) são reportados resultados computacionais em que apenas alguns poucos exemplares particulares de problemas com 25 tarefas puderam ser resolvidos de maneira ótima com um algoritmo do tipo “*branch-and-bound*”. Em Yanasse *et al.* (2009) um novo algoritmo enumerativo utilizando ordenamentos parciais para resolução do MTSP foi proposto com resultados melhores para alguns casos e piores para outros, quando comparados com os resultados apresentados por Laporte *et al.* (2002).

Em Yanasse (1996, 1997), alguns algoritmos polinomiais para casos especiais do MOSP foram apresentados. Com o mesmo objetivo, ou seja, o desenvolvimento de alguns algoritmos polinomiais para casos especiais do MTSP, neste trabalho apresentamos um resultado que pode ser útil para este desenvolvimento. Os casos especiais em mente são os que apresentam um grafo MOSP correspondente (veja por exemplo, Yanasse, 1997; Yanasse e Senne, 2010) com topologias especiais. O grafo MOSP de um exemplar do problema é construído da seguinte forma: a cada ferramenta do problema corresponde um vértice do grafo; uma aresta une dois vértices neste grafo MOSP se e somente se existe pelo menos uma tarefa no problema que necessita estas duas ferramentas para ser processada.

Na próxima seção apresentamos o resultado principal deste trabalho. Mostra-se que quando um grafo MOSP correspondente a um problema de minimização de trocas de ferramentas possui algum vértice de corte (um vértice é dito ser um vértice de corte se sua remoção, juntamente com as arestas a ele conectadas, provoca uma redução na conexidade do grafo) então quando se remove este vértice de corte e todas as arestas incidentes nele, uma solução ótima para o problema original pode ser construído a partir de soluções ótimas dos problemas de minimização de trocas de ferramentas correspondentes às componentes conexas do grafo resultante. Na seção 3, tecemos algumas considerações sobre a utilização deste resultado.

## 2. Decomposição da solução para topologias especiais

Seja  $M$  o número total de ferramentas distintas de um exemplar do MTSP. Seja  $C$  a capacidade da caixa de ferramentas da máquina. Admitimos que  $M > C$  pois, caso contrário, o problema é trivial uma vez que todas as ferramentas cabem na caixa de ferramentas da máquina e, portanto, não há trocas a fazer. Se  $M > C$ , o número mínimo de trocas necessárias em qualquer exemplar do MTSP é  $(M - C)$  uma vez que todas as ferramentas tem que ser utilizadas alguma vez e  $M - C$  ferramentas necessariamente ficam de fora da máquina e precisam entrar na máquina em algum momento para processar alguma tarefa.

Seja  $G(V, E)$  o grafo MOSP correspondente a um exemplar do MTSP. Sem perda de generalidade, admite-se que  $G(V, E)$  seja conexo. Caso isto não aconteça, cada um dos componentes do grafo  $G(V, E)$  pode ser resolvido de maneira independente. Vamos admitir que no grafo  $G(V, E)$  exista um vértice de corte  $k$ , com grau  $n$  ( $n \geq 2$ ), de tal forma que se este nó  $k$  e todas as arestas incidentes a ele forem eliminadas, o grafo  $G(V, E)$  se subdivide em  $m \geq 2$  ( $m \leq n$ ) sub-grafos (componentes) conexos,  $\text{Subgraph}_1, \text{Subgraph}_2, \dots, \text{Subgraph}_{m-1}, \text{Subgraph}_m$ . Um exemplo deste tipo de grafo é ilustrado na Figura 1.

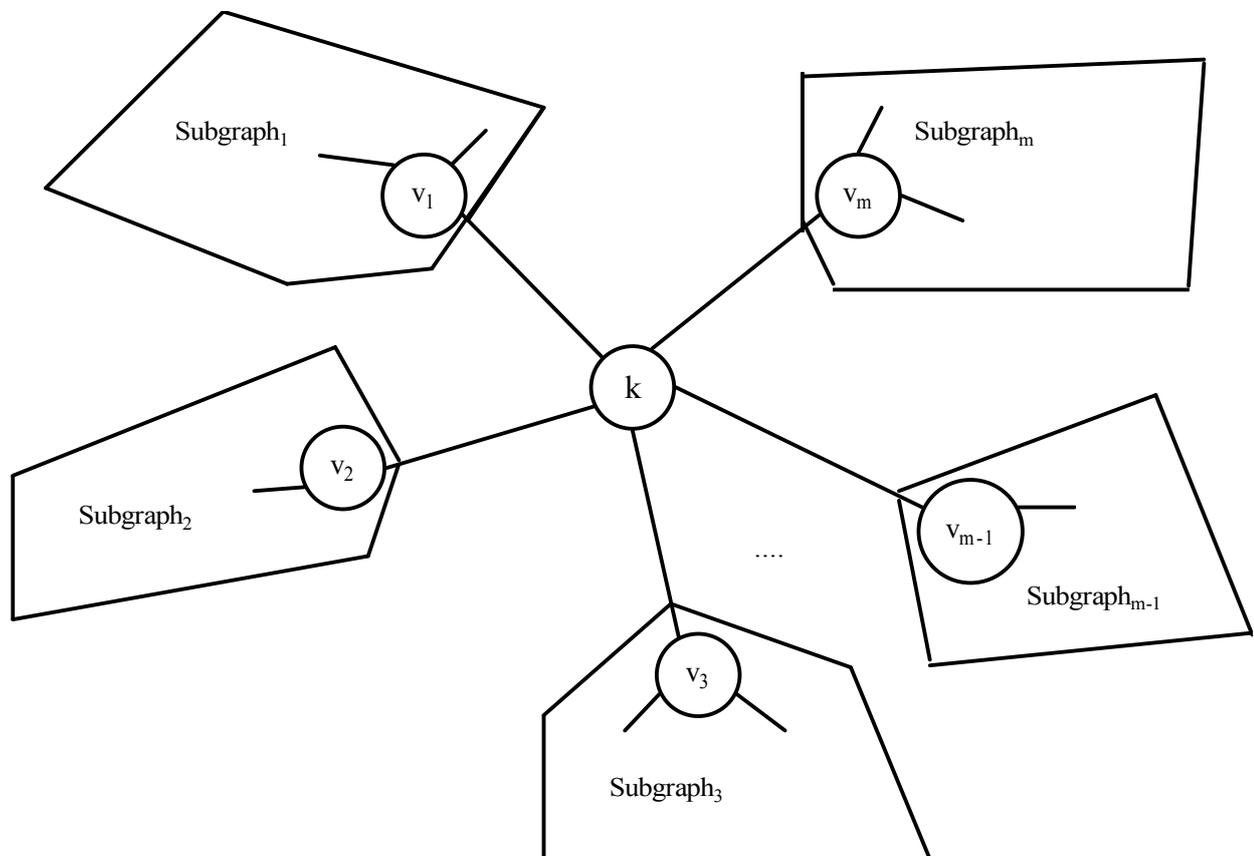


Figura 1 -  $m$  sub-grafos conexos através de um nó  $k$

Consideraremos o caso mais simples em que  $m = 2$ . A extensão para os casos com  $m > 2$  é similar e direta. Neste trabalho denotamos este tipo de grafo como grafo tipo I.

Denotemos por  $E\text{Subgraph}_i$ ,  $i = 1$  ou  $2$ , o subgrafo composto do  $\text{Subgraph}_i$ , com a adição do nó  $k$  e mais todas as arestas originais  $(v_{ij}, k)$  do grafo  $G(V, E)$ , em que o vértice  $v_{ij}$  pertence ao subgrafo  $\text{Subgraph}_i$  (no exemplo da figura 1 temos apenas um vértice em cada  $\text{Subgraph}_i$  adjacente ao vértice  $k$  mas podem existir mais vértices no caso geral).

Denotemos as  $h$  tarefas correspondentes ao  $E\text{Subgraph}_1$  por  $T_{1j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, h$  e as  $s$  tarefas correspondentes ao  $E\text{Subgraph}_2$  por  $Q_{2j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ . Observe que devido à estrutura especial do grafo  $G(V, E)$  considerado e a maneira como os grafos MOSP são construídos, não existe nenhuma tarefa que precisa de ferramentas correspondentes a vértices do grafo  $\text{Subgraph}_1$  e ferramentas correspondentes a vértices do grafo  $\text{Subgraph}_2$  para ser processada. Assim, se  $H$  é o conjunto formado por todas as tarefas do problema MTSP original, então  $T = \{T_{11}, T_{12}, \dots, T_{1h}\}$  e  $Q = \{Q_{21}, Q_{22}, \dots, Q_{2s}\}$  são tais que  $T \cap Q = \emptyset$  e  $T \cup Q = H$ .

**Teorema:** Seja um exemplar do MTSP cujo grafo MOSP é do tipo I e sejam  $E\text{Subgraph}_1$  e  $E\text{Subgraph}_2$  os subgrafos conexos correspondentes a este exemplar de grafo MOSP, conforme definidos anteriormente. Para qualquer sequência viável de processamento de tarefas deste exemplar do MTSP é sempre possível, em correspondência, determinar uma outra sequência em que todas as tarefas correspondentes ao  $E\text{Subgraph}_1$  (as tarefas  $T_{1j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, h$ , e somente elas) são processadas uma após a outra e só depois, todas as tarefas correspondentes ao  $E\text{Subgraph}_2$  são processadas uma após a outra (as tarefas  $Q_{2j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ , e somente elas) sem que o número total de trocas de ferramentas desta nova sequência seja superior ao da sequência original.

**Prova:** Considere uma sequência viável qualquer de tarefas do MTSP correspondente ao grafo  $G(V, E)$ . Uma sequência viável qualquer tem a forma genérica  $T_{1x}, T_{1y}, \dots, Q_{2a}, Q_{2g}, T_{1z}, \dots, Q_{2j}, \dots, Q_{2r}, T_{1q}$ . Sem perda de generalidade, vamos supor que a primeira tarefa desta sequência seja do  $E\text{Subgraph}_1$  (se não for, basta renomear  $E\text{Subgraph}_2$  e denominá-la  $E\text{Subgraph}_1$  e, renomear  $E\text{Subgraph}_1$  e denominá-la  $E\text{Subgraph}_2$ ). Também, sem perda de generalidade, vamos admitir que a sequência genérica tem a forma  $T_{11}, T_{12}, \dots, Q_{21}, Q_{22}, T_{1f}, \dots, Q_{2j}, \dots, Q_{2s}, T_{1h}$  (basta enumerar as tarefas desta forma). Seguindo-se esta sequência de tarefas, seja  $pw_0$  o número mínimo de troca de ferramentas necessárias para processar estas tarefas seguindo esta sequência. Em correspondência a esta sequência, consideremos uma outra sequência, também viável, construída a partir da sequência dada em que se mantém a ordem relativa das tarefas de cada subgrafo  $E\text{Subgraph}_1$  e  $E\text{Subgraph}_2$  mas, antecipando todas as tarefas correspondentes ao  $E\text{Subgraph}_1$  antes de qualquer tarefa do  $E\text{Subgraph}_2$ . No caso da sequência genérica considerada  $T_{11}, T_{12}, \dots, Q_{21}, Q_{22}, T_{1f}, \dots, Q_{2j}, \dots, Q_{2s}, T_{1h}$ , resultaria, em correspondência, a sequência:  $T_{11}, T_{12}, \dots, T_{1f}, \dots, T_{1h}, Q_{21}, Q_{22}, \dots, Q_{2j}, \dots, Q_{2s}$ . Seja  $pw_1$  o número mínimo de troca de ferramentas necessárias seguindo esta outra sequência de processamento de tarefas. O que precisamos demonstrar é que  $pw_1 \leq pw_0$ .

Considere a sequência original  $T_{11}, T_{12}, \dots, Q_{21}, Q_{22}, T_{1f}, \dots, Q_{2j}, \dots, Q_{2s}, T_{1h}$ . Sejam  $tt_{12}, tt_{23}, \dots, tq_{f-1,f}, qq_{f, f+1}, qt_{f+1,f+2}, \dots, qt_{s+h-1,s+h}$  os números de trocas de ferramentas incorridas no processamento das tarefas desta sequência quando se processa  $T_{11}$ , seguida de  $T_{12}$ , depois  $T_{12}$  seguida de  $T_{13}, \dots$ , depois  $T_{1f-1}$  seguida de  $Q_{21}$ , depois  $Q_{21}$  seguida de  $Q_{22}$ , depois  $Q_{22}$  seguida de  $T_{1f}, \dots$ , depois  $Q_{2s}$  seguida de  $T_{1h}$ , respectivamente. Observe que denotamos o número de trocas por  $tt_{xy}$ , quando temos duas tarefas correspondentes ao  $E\text{Subgraph}_1$  em seguida, por  $qq_{xy}$ , quando temos duas tarefas correspondentes ao  $E\text{Subgraph}_2$  em seguida, por  $tq_{xy}$ , quando na sequência temos uma tarefa correspondente ao  $E\text{Subgraph}_1$  seguida de uma tarefa correspondente a  $E\text{Subgraph}_2$ , e por  $qt_{xy}$ , quando temos uma tarefa correspondente ao  $E\text{Subgraph}_2$  seguida de uma

tarefa correspondente a ESubgraph<sub>1</sub>. Por definição, temos que  $pw_o = tt_{12} + tt_{23} + \dots + tq_{f-1,f} + qq_f$   
 $f+1 + qt_{f+1,f+2} + \dots + qt_{s+h-1,s+h}$ .

Consideremos agora a sequência T<sub>11</sub>, T<sub>12</sub>, ..., T<sub>1f</sub>, ..., T<sub>1h</sub>, Q<sub>21</sub>, Q<sub>22</sub>, ..., Q<sub>2j</sub>, ..., Q<sub>2s</sub>. Seguindo-se esta sequência, vamos realizar trocas de ferramentas da seguinte forma:

- (i) “as mesmas trocas” que as ocorridas na sequência T<sub>11</sub>, T<sub>12</sub>, ..., Q<sub>21</sub>, Q<sub>22</sub>, T<sub>1f</sub>, ..., Q<sub>2j</sub>, ..., Q<sub>2s</sub>, T<sub>1h</sub> são realizadas quando na nova sequência temos as tarefas correspondentes ao ESubgraph<sub>1</sub> (a primeira parte da subsequência, ou seja, T<sub>11</sub>, T<sub>12</sub>, ..., T<sub>1f</sub>, ..., T<sub>1h</sub>). Por “mesmas trocas” queremos dizer, se na sequência original uma ferramenta correspondente a um vértice de ESubgraph<sub>1</sub> é que sai da máquina ao entrar uma nova ferramenta para processar uma tarefa referente ao ESubgraph<sub>1</sub>, exatamente as mesmas trocas de ferramentas são realizadas na nova sequência (vide figuras 2, 3, 4, 5); se na sequência original uma ferramenta correspondente a um vértice de ESubgraph<sub>2</sub> é que sai da máquina ao entrar uma nova ferramenta para processar uma tarefa referente ao ESubgraph<sub>1</sub>, troca-se a mesma ferramenta correspondente ao vértice de ESubgraph<sub>1</sub> que saiu quando a ferramenta correspondente ao vértice de ESubgraph<sub>2</sub>, que estava na caixa e foi trocada, entrou na caixa de ferramentas. Se mais de uma ferramenta correspondente a vértices de ESubgraph<sub>2</sub> foi trocada nesta posição seguindo a sequência original, retroagimos até a primeira ferramenta que entrou nesta posição correspondente a um vértice de ESubgraph<sub>2</sub>. Observe que se naquela primeira ocasião não houve troca de ferramentas é por que havia espaço vazio na caixa de ferramentas para se colocar a nova ferramenta e, assim sendo, o mesmo acontecerá também com a tarefa introduzida na nova sequência (vide figuras 2, 6, 7, 8). Neste caso, temos um crédito em trocas na nova sequência. Este crédito será descontado depois quando forem sequenciadas as tarefas correspondentes ao grafo ESubgraph<sub>2</sub>. Pode-se verificar que, seguindo-se este procedimento de troca, todas as trocas indicadas são viáveis de serem realizadas e todas as tarefas com a nova sequência podem ser processadas e, o número total de trocas resultante na nova sequência é igual ou menor do que a soma de todas as parcelas da forma  $tt_{xy}$  e  $qt_{bk}$ , menos um  $\Delta$  (os créditos), ou seja,  $tt_{12} + tt_{23} + \dots + tq_{f-1,f+2} + \dots + qt_{s+h-1,s+h} - \Delta$ , em que  $\Delta$  são as economias incorridas quando se antecipou alguma tarefa referente ao ESubgraph<sub>1</sub> e não há trocas de ferramentas pois ainda há espaço na caixa de ferramentas, mas se incorria em trocas de ferramentas na sequência original.

X	X	...	Y	Y	...	Vago	Vago	Vago
---	---	-----	---	---	-----	------	------	------

Figura 2 - Retrato da caixa de ferramentas imediatamente antes de processar a tarefa T<sub>1z</sub> seguindo a sequência T<sub>1x</sub>, T<sub>1y</sub>, ..., Q<sub>2a</sub>, Q<sub>2g</sub>, T<sub>1z</sub>, ..., Q<sub>2j</sub>, ..., Q<sub>2r</sub>, T<sub>1q</sub>. (X denotam ferramentas utilizadas para processar tarefas do tipo T<sub>1</sub>; Y denotam ferramentas utilizadas para processar tarefas do tipo Q<sub>2</sub>.)

X	<u>X</u>	...	Y	Y	...	Vago	Vago	Vago
---	----------	-----	---	---	-----	------	------	------

Figura 3 - Retrato da caixa de ferramentas imediatamente após processar a tarefa T<sub>1z</sub> seguindo a sequência T<sub>1x</sub>, T<sub>1y</sub>, ..., Q<sub>2a</sub>, Q<sub>2g</sub>, T<sub>1z</sub>, ..., Q<sub>2j</sub>, ..., Q<sub>2r</sub>, T<sub>1q</sub>. A ferramenta trocada está indicada em sublinhado. Uma ferramenta da classe X foi trocada por outra ferramenta da classe X.

X	X	...	?	?	...	Vago	Vago	Vago
---	---	-----	---	---	-----	------	------	------

Figura 4 - Retrato da caixa de ferramentas imediatamente antes de processar a tarefa  $T_{1z}$  seguindo a seqüência  $T_{11}, T_{12}, \dots, T_{1f}, \dots, T_{1h}, Q_{21}, Q_{22}, \dots, Q_{2j}, \dots, Q_{2s}$ . Denotamos por “?” o não conhecido (pode ser X, Y, ou vago)

X	<u>X</u>	...	?	?	...	Vago	Vago	vago
---	----------	-----	---	---	-----	------	------	------

Figura 5 - Retrato da caixa de ferramentas imediatamente após processar a tarefa  $T_{1z}$  seguindo a seqüência  $T_{11}, T_{12}, \dots, T_{1f}, \dots, T_{1h}, Q_{21}, Q_{22}, \dots, Q_{2j}, \dots, Q_{2s}$ . A mesma troca de ferramenta ilustrada na figura 3 é trocada também nesta seqüência.

X	X	...	<u>X</u>	Y	...	Vago	Vago	Vago
---	---	-----	----------	---	-----	------	------	------

Figura 6 - Retrato da caixa de ferramentas imediatamente após processar a tarefa  $T_{1z}$  seguindo a seqüência  $T_{1x}, T_{1y}, \dots, Q_{2a}, Q_{2g}, T_{1z}, \dots, Q_{2j}, \dots, Q_{2r}, T_{1q}$ . A ferramenta trocada está indicada em sublinhado. Uma ferramenta da classe Y foi trocada por outra ferramenta da classe X.

X	X	...	?	?	...	Vago	Vago	vago
---	---	-----	---	---	-----	------	------	------

Figura 7 - Retrato da caixa de ferramentas imediatamente antes de processar a tarefa  $T_{1z}$  seguindo a seqüência  $T_{11}, T_{12}, \dots, T_{1f}, \dots, T_{1h}, Q_{21}, Q_{22}, \dots, Q_{2j}, \dots, Q_{2s}$ .

X	X	...	<u>X</u>	?	...	Vago	Vago	Vago
---	---	-----	----------	---	-----	------	------	------

Figura 8 - Retrato da caixa de ferramentas imediatamente após processar a tarefa  $T_{1z}$  seguindo a seqüência  $T_{11}, T_{12}, \dots, T_{1f}, \dots, T_{1h}, Q_{21}, Q_{22}, \dots, Q_{2j}, \dots, Q_{2s}$ . A mesma "troca de ferramenta" na posição da ferramenta da classe Y que foi substituída na caixa de ferramentas (veja posição ilustrada na figura 3) é trocada também nesta seqüência.

(ii) Similarmente, “as mesmas trocas” que as ocorridas na seqüência  $T_{11}, T_{12}, \dots, Q_{21}, Q_{22}, T_{1f}, \dots, Q_{2j}, \dots, Q_{2s}, T_{1h}$  são realizadas quando na nova seqüência temos as tarefas correspondentes ao ESubgraph<sub>2</sub> (a segunda parte da subseqüência, ou seja,  $Q_{21}, Q_{22}, \dots, Q_{2j}, \dots, Q_{2s}$ ). Por “mesmas trocas” queremos dizer, se na seqüência original nenhuma troca é realizada é porque existem espaços vagos na caixa de ferramentas e na nova seqüência, os mesmos espaços vazios também existirão com as trocas feitas seguindo o procedimento sugerido em (i). Se já não existem espaços vazios e antes existiam foi porque ao antecipar as tarefas do ESubgraph<sub>1</sub> as posições agora estão ocupadas com ferramentas correspondentes a vértices de ESubgraph<sub>1</sub>. Os créditos em trocas obtidos com a antecipação são agora utilizados para trocar as ferramentas correspondentes a vértices de ESubgraph<sub>1</sub> com ferramentas correspondentes a vértices de ESubgraph<sub>2</sub>, não incorrendo portanto, em um número de trocas superior ao da seqüência original. Se na seqüência original uma ferramenta correspondente a um vértice de ESubgraph<sub>2</sub> é que sai da máquina ao entrar uma nova ferramenta para processar uma tarefa referente ao ESubgraph<sub>2</sub>, exatamente a mesma troca de ferramenta é realizada na nova seqüência. Se na seqüência original uma ferramenta correspondente a um vértice de ESubgraph<sub>1</sub> é que sai da máquina ao entrar uma nova ferramenta para processar uma tarefa referente ao ESubgraph<sub>2</sub>, troca-se a mesma ferramenta se ela ainda estiver na caixa de ferramentas ou, se ela já não estiver, troca-se pela ferramenta correspondente ao vértice de

ESubgraph<sub>2</sub> que entrou quando ela saiu. Pode-se verificar que, seguindo-se este procedimento de troca, todas as trocas são viáveis de serem realizadas com a nova sequência, todas as tarefas podem ser processadas, e o número total de trocas correspondentes a estas trocas na nova sequência é a soma de todas as parcelas da forma  $qq_{xy}$  e  $tq_{bk}$ , mais um  $\Delta$ , ou seja  $tq_{f-1,f} + qq_{f,f+1} \dots + \Delta$ . Observe que a economia obtida quando se antecipou alguma tarefa referente ao ESubgraph<sub>1</sub> e não há trocas de ferramentas é agora utilizada quando se retorna a ferramenta correspondente a vértices de ESubgraph<sub>2</sub> ao se postergar o processamento das tarefas relativas ao mesmo.

Com estas trocas de ferramentas propostas para a sequência  $T_{11}, T_{12}, \dots, Q_{21}, Q_{22}, T_{1f}, \dots, Q_{2j}, \dots, Q_{2s}$ , resulta em um total de trocas igual a  $tt_{12} + tt_{23} + \dots + qt_{f+1,f+2} + \dots + qt_{s+h-1,s+h} - \Delta + tq_{f-1,f} + qq_{f,f+1} \dots + \Delta$ , que é igual a  $pw_o$ . Como o número mínimo de trocas de ferramentas,  $pw_1$ , para esta sequência é menor ou igual ao obtido com as trocas sugeridas (que é viável, mas não necessariamente as mínimas possíveis), o resultado desejado segue.

### 3. Conclusões

O resultado apresentado na seção 2 nos garante que, para exemplares do problema de troca de ferramentas que apresentem um grafo MOSP em que existe um vértice de corte tal que se ele e todas as arestas incidentes a ele forem excluídas, o grafo resultante é composto de dois componentes, então existe sempre uma sequência ótima de sequenciamento das tarefas em que todas as tarefas correspondentes ao primeiro “componente estendido” são sequenciadas primeiro antes das demais tarefas (ou seja, todas as demais tarefas do segundo “componente estendido” são sequenciadas depois).

O resultado apresentado pode ser estendido diretamente para o caso em que o número de componentes é maior do que dois, utilizando a mesma raciocínio. Para isso, basta dividir sucessivamente os componentes em dois grupos e estender a prova de maneira direta.

Com este resultado, pode-se desenvolver algoritmos (polinomiais) para casos especiais do MTSP, por exemplo, quando o grafo MOSP correspondente é uma árvore. Outros casos polinomiais para o MTSP podem ser sugeridos para outras topologias especiais de grafos MOSP. Estes algoritmos polinomiais estão em desenvolvimento pelo autor. Este autor desconhece trabalhos da literatura em que casos polinomiais do MTSP tenham sido apresentados e/ou desenvolvidos.

*Agradecimentos: Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq e pela FAPESP.*

### Referências

- Garey, M.R.; Johnson, D.S.** *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman, San Francisco, 1979.
- Bard, J.F.** (1988), A Heuristic for Minimizing the Number of Tool Switches on Flexible Machine. *IIE Transactions*, 20, 382-391.
- Crama, Y.; Kolen, A.W.J.; Oelermans, A.G.; Spieksma, F.C.R.** (1994), Minimizing the number of tool switches on a flexible machine, *International Journal of Flexible Manufacturing Systems*, 6, 33-54.
- Hertz, A.; Laporte, G.; Mittaz, M.; Stecke, K.** (1998), Heuristics for minimizing tool switches when scheduling part types on a flexible machine. *IEE Transactions*, 30, 689-694.
- Laporte, G.; Salazar, J.J.; Semet, F.** Exact Algorithms for the Job Sequencing and Tool Switching Problem. *Les Cahiers du GERAD*, G-2002-40, July 2002.
- Linhares, A.; Yanasse, H.H.** (2002), Connections between cutting-pattern sequencing, VLSI design, and flexible machines. *Computers and Operations Research*, 29(12):1759-1772.
- Tang, C.S.; Denardo, E.V.** (1988), Models Arising from a Flexible Manufacturing Machine, Part I: Minimization of the Number of Tool Switches, *Operations Research*, 36, 767-777.
- Yanasse, H.H.** (1996), Minimization of open orders - polynomial algorithms for some special cases, *Pesquisa Operacional*, 16(1):1-26.



**Yanasse, H.H.** (1997), A transformation for solving a pattern sequencing problem in the wood cut industry. *Pesquisa Operacional*, 17(1):57-70.

**Yanasse, H.H.** An exact algorithm for the tree case of the minimization of open orders problem. *XXIX Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO)*, Salvador, BA, 22 a 24 de outubro de 1997.

**Yanasse, H.H.; Lamosa, M.J.P.** An application of the generalized travelling salesman problem: the minimization of tool switches problem, *Operations Research 2005 - International Annual Scientific Conference of the German Operations Research Society*, Bremen, Germany, 7-9 September, 2005, Program, p. 90.

**Yanasse, H.H.; Rodrigues, R.C.M. Senne, E.L.F.** (2009), Um algoritmo enumerativo baseado em ordenamento parcial para resolução do problema de minimização de trocas de ferramentas. *Gestão e Produção*, 16(3): 370-381.

**Yanasse, H.H.; Senne, E.L.F.** (2010), The minimization of open stacks problem: a review of some properties and their use in pre-processing operations. *European Journal of Operational Research*, 203(3): 559-567. Doi: 10.1016/j.ejor.2009.09.017.