

UM ALGORITMO BRANCH AND BOUND PARA UMA CLASSE DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO MULTIPLICATIVA

Alireza Mohebi Ashtiani

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
13083-852 Campinas, SP, Brasil
ashtiani@dt.fee.unicamp.br

Paulo Augusto Valente Ferreira

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
13083-852 Campinas, SP, Brasil
valente@dt.fee.unicamp.br

RESUMO

Neste trabalho propomos uma abordagem no espaço dos objetivos para resolver globalmente problemas multiplicativos generalizados côncavos, uma classe especial de problemas não convexos que envolvem a maximização de uma soma finita de produtos de funções côncavas sobre um conjunto convexo, compacto e não vazio. Veremos que no espaço dos objetivos este problema pode ser eficientemente resolvido por um algoritmo de aproximação externa. Demonstramos também que este problema pode ser reformulado como um problema de programação quadrática indefinida, com infinitas restrições lineares de desigualdade. Um algoritmo que combina relaxação com uma técnica de *branch-and-bound* é usado para resolver este problema. Algumas experiências computacionais são relatadas.

PALAVRAS-CHAVE. Otimização Global. Programação Multiplicativa. Análise Convexa. Área Principal: Programação Matemática.

ABSTRACT

In this work we propose an outcome space approach for globally solving generalized concave multiplicative problems, a special class of nonconvex problems which involves the maximization of a finite sum of products of concave functions over a nonempty compact convex set. We show that the problem can be efficiently solved in the *outcome space* by an outer approximation algorithm. It is also shown that this nonconvex maximization problem can be reformulated as an indefinite quadratic problem with infinitely many linear inequality constraints. A relaxation-constraint enumeration algorithm combined with the procedure branch-and-bound is used to solve such indefinite quadratic programming problem. Some computational experiences are reported.

KEYWORDS. Global Optimization. Multiplicative Programming. Convex Analysis. Main Area: Mathematical Programming.

1 Introdução

Neste trabalho, abordamos uma variante de problema de otimização de uma soma de produtos de funções escalares positivas sobre um conjunto viável convexo, problema que tem sido referido na literatura de otimização global como o problema multiplicativo generalizado. A generalização em relação ao problema multiplicativo tradicional, em que um único produto é otimizado, consiste em permitir que a função objetivo seja expressa como uma soma de produtos, em particular, como uma soma de produtos de duas funções (Konno et al., 1994), (Konno e Fukaiishi, 2000), (Benson, 2008) e (Oliveira e Ferreira, 2010), que é a formulação adotada no presente trabalho. Na última década, muitos algoritmos têm sido propostos para resolver globalmente o problema multiplicativo generalizado especialmente por Konno e co-autores (Konno e Kuno, 1992), (Konno et al., 1991) e (Kuno et al., 1993).

Os problemas de programação multiplicativa generalizada (PMG) considerados neste trabalho apresentam a seguinte forma geral:

$$\max_{x \in \Omega} \left[g_1(x) + \sum_{i=1}^r g_{2i}(x)g_{2i+1}(x) \right], \quad (1.1)$$

no qual $g_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são funções côncavas para $k = 1, 2, \dots, 2r + 1$. Assume-se que Ω é um subconjunto convexo, compacto e não-vazio de $\mathbb{R}^n$, e que as funções g_k são positivas em Ω para $k = 1, 2, \dots, 2r + 1$. Em otimização global não convexa, o problema (1.1) tem sido referido como o problema multiplicativo generalizado côncavo (Benson, 2008).

Os pressupostos de que cada função participante na soma seja positiva sobre o conjunto viável do problema, e, adicionalmente, que cada função seja côncava, fornecem alguma estrutura para o problema e não excluem aplicações importantes. Apesar da positividade e da hipótese de concavidade, o problema multiplicativo generalizado (1.1) é um problema não-convexo: embora o produto de funções côncavas positivas seja uma função quase-côncava, a soma de funções quase-côncavas não é nem mesmo quase-côncava, em geral (Horst et al., 1995).

Benson (2008) apresenta o primeiro algoritmo para resolver globalmente o problema (1.1). O algoritmo proposto é do tipo *branch-and-bound* e encontra uma solução ótima global para um problema que é equivalente ao problema (1.1). Durante o processo, os limites superiores exigidos são calculados através da resolução de problemas de programação convexa. O algoritmo *branch-and-bound* descrito em (Benson, 2008) opera no espaço $\mathbb{R}^r$ em vez do espaço $\mathbb{R}^n$, uma característica do algoritmo que o torna computacionalmente mais eficiente.

A versão de minimização do problema (1.1) é

$$\min_{x \in \Omega} \left[f_1(x) + \sum_{i=1}^r f_{2i}(x)f_{2i+1}(x) \right], \quad (1.2)$$

no qual $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, r$ são funções convexas positivas em Ω .

Um algoritmo para problemas de programação multiplicativa generalizada do tipo (1.2), baseado em elementos de análise convexa foi proposto em (Oliveira e Ferreira, 2010). Os autores utilizam uma extensão da abordagem proposta em (Oliveira e Ferreira, 2008), voltada a problemas de programação convexa multiplicativa. Em programação convexa multiplicativa o objetivo é minimizar um produto de funções convexas positivas sobre um conjunto convexo. Um aspecto central do algoritmo proposto em (Oliveira e Ferreira, 2008) é a redução do problema de programação convexa multiplicativa à minimização de uma função quase-côncava sobre um politopo, realizado por meio de um procedimento de enumeração de vértices. A extensão proposta em (Oliveira e Ferreira, 2010) implica no uso de uma técnica mais geral para se resolver o subproblema mestre, representado por um problema quadrático indefinido de pequena dimensão e estrutura particular. A partir de resultados de análise convexa, o problema (1.2) é reformulado no espaço dos objetivos como um problema

de programação quadrática indefinida equivalente, com restrições lineares de desigualdade. Em seguida, um algoritmo que combina relaxação com uma técnica de enumeração de restrições é usado para resolver o problema.

Problemas de programação multiplicativa generalizada têm atraído considerável atenção na literatura por causa de seu grande número de aplicações práticas em várias áreas de estudo, incluindo microeconomia (Henderson e Quandt, 1971), otimização financeira (Kuno et al., 1993) e (Maranas et al., 1997), projeto de circuito VLSI (Dorneich e Sahinidis, 1995) e (Maling et al., 1982), otimização da árvore de decisão (Bennett, 1994), otimização de portfólio (Konno et al., 1993) e (Markowitz, 1991), projeto de layouts (Quesada e Grossmann, 1996), problemas de otimização multicritério (Keeney e Raiffa, 1993), otimização robusta (Mulvey et al., 1995), geometria computacional (Konno et al., 1991), e mineração de dados/reconhecimento de padrões (Bennett e Mangasarian, 1994). Além disso alguns problemas clássicos da programação matemática podem ser reformulados como problemas multiplicativos, como o problema de programação quadrática

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && \frac{1}{2}x^T Qx + \langle q, x \rangle + \gamma \\ & \text{sujeito a} && x \in \Omega := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}, \end{aligned}$$

em que Ω é não-vazio, $Q^{n \times n}$ é uma matriz simétrica de posto p , $q \in \mathbb{R}^n$ e $\gamma \in \mathbb{R}$. Dada Q , (Tuy, 1998), por exemplo, fornece um método construtivo simples para se encontrar vetores linearmente independentes $v^1, v^2, \dots, v^r \in \mathbb{R}^n$ e vetores $w^1, w^2, \dots, w^r \in \mathbb{R}^n$ tais que, para todos $x \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{1}{2}x^T Qx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \langle v^i, x \rangle \langle w^i, x \rangle,$$

que é um caso especial do problema (1.2). As aplicações dos problemas (1.2) e (1.1) incluem todas as aplicações envolvendo problemas de programação quadrática.

Notação. O conjunto de todos os vetores n -dimensionais reais é representado como $\mathbb{R}^n$. Os conjuntos de todos os vetores não-negativos, positivos e não-positivos reais são indicados como $\mathbb{R}_+^n$, $\mathbb{R}_{++}^n$ e $\mathbb{R}_-^n$, respectivamente. Dados $x, y \in \mathbb{R}_+^n$, então $x \geq y$ ($x - y \in \mathbb{R}_+^n$) se e somente se $x_i \geq y_i, i = 1, 2, \dots, n$. Assim, $x > y$ ($x - y \in \mathbb{R}_{++}^n$) se e somente se $x_i > y_i, i = 1, 2, \dots, n$. O produto interno em $\mathbb{R}^n$ é denotado por $\langle x, y \rangle$. Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é definida em Ω , então $f(\Omega) := \{f(x) : x \in \Omega\}$. O símbolo $:=$ significa *igual por definição*.

2 Programação Multiplicativa Generalizada

Considere os problemas de otimização não-convexos

$$P_{MG} : \min_{x \in \Omega} \left[v_1(x) = f_1(x) + \sum_{i=1}^r f_{2i}(x) f_{2i+1}(x) \right],$$

e

$$Q_{MG} : \max_{x \in \Omega} \left[v_2(x) = g_1(x) + \sum_{i=1}^r g_{2i}(x) g_{2i+1}(x) \right],$$

no qual $f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são funções convexas e $g_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são funções côncavas para $k = 1, 2, \dots, 2r + 1$. Assume-se que Ω é um subconjunto convexo, compacto e não-vazio de $\mathbb{R}^n$, e que f_k e g_k são funções positivas em Ω para $k = 1, 2, \dots, 2r + 1$. Como as funções v_1 e v_2 não são, em geral, funções (quase)convexa e (quase)côncava, respectivamente, os problemas (P_{MG}) e (Q_{MG}) podem ter soluções locais que não são globais.

A relação entre os problemas (P_{MG}) e (Q_{MG}) torna-se evidente quando suas funções objetivos são reescritas como as composições $v_1(x) = u(f(x))$ e $v_2(x) = u(g(x))$, em que $f := (f_1, f_2, \dots, f_m)$, $g := (g_1, g_2, \dots, g_m)$, e $u : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $m = 2r + 1$, é dada por

$$u(\xi) := \xi_1 + \sum_{i=1}^r \xi_{2i} \xi_{2i+1} = \frac{1}{2} \xi^T Q \xi + c^T \xi, \quad (2.1)$$

com as definições adequadas para a matriz $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e o vetor de zeros e uns $c \in \mathbb{R}^m$. Deve-se notar que os problemas (P_{MG}) e (Q_{MG}) não são equivalentes no sentido de que, a partir de uma solução ótima de um deles, uma solução ótima do outro é facilmente encontrada. No entanto, os mesmos princípios utilizados em (Oliveira e Ferreira, 2010) para resolver globalmente o problema de minimização (P_{MG}) podem ser aplicados, com as modificações necessárias, para resolver globalmente o problema de maximização (Q_{MG}) (Ashtiani e Ferreira (2011)).

A formulação do problema (Q_{MG}) no espaço dos objetivos é

$$\max_{z \in Z} u(z) = \max_{z \in Z} z_1 + \sum_{i=1}^p z_{2i} z_{2i+1}. \quad (2.2)$$

sendo $Z = g(\Omega)$ o espaço dos objetivos associado ao problema (Q_{MG}) . As abordagens que visam a resolução do problema (Q_{PM}) por meio da resolução do seu problema equivalente (2.2) no espaço dos objetivos basicamente diferem na forma de representar o conjunto (geralmente) não-convexo Z . A continuidade (implicada pela concavidade) de g e a compacticidade de Ω implicam na compacticidade de Z , mas não na sua convexidade. Entretanto, Z é cone-convexo¹ no sentido de que $\mathcal{G} := Z + \mathbb{R}_+^m$ é um conjunto convexo (Yu, 1985). O problema de representação de $\mathcal{G}$ em termos práticos é abordado por meio de um resultado fundamental na análise convexa. Uma demonstração do resultado é apresentada a seguir.

Lema 2.1. Dado $z \in \mathbb{R}^m$, então $z \in \mathcal{G}$ se e somente se z satisfaz o sistema de infinitas desigualdades lineares

$$\langle w, z \rangle \leq \max_{x \in \Omega} \langle w, g(x) \rangle, \text{ para todo } w \in \mathcal{W}, \quad (2.3)$$

onde

$$\mathcal{W} := \left\{ w \in \mathbb{R}_+^m : \sum_{i=1}^m w_i = 1 \right\}.$$

Demonstração. Suponha que $z^* \in \mathcal{G}$. Então existe $x^* \in \Omega$ tal que $g(x^*) \geq z^*$. Segue-se que

$$\langle w, g(x^*) - z^* \rangle \geq 0, \text{ para todo } w \in \mathcal{W},$$

e (2.3) vale para $z = z^*$. Assuma agora que $z^* \notin \mathcal{G}$. Pelo Teorema de Separação (Rockafellar, 1970) existe $w \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ e $t \in \mathbb{R}$ tais que $\langle w, z^* \rangle > t$ e $\langle w, z \rangle \leq t$ para todo $z \in \mathcal{G}$, o que implica $w \in \mathbb{R}_+^m$, pois se $w_i < 0$ para algum i , a desigualdade $\langle w, z \rangle \leq t$ poderia ser violada ao se selecionar um vetor suficientemente grande $z \in \mathcal{G} \subset \mathbb{R}_+^m$. Portanto, podemos assumir $w \in \mathbb{R}_+^m$, e sabendo que $\langle w, g(x) \rangle \leq t$ para todo $x \in \Omega$, segue-se que $\langle w, g(x) - z^* \rangle < 0$ para todo $x \in \Omega$. Como Ω é compacto, conclui-se que $\max_{x \in \Omega} \langle w, g(x) - z^* \rangle < 0$ para algum $w \in \mathcal{W}$.

Como subproduto do Lema 2.1, para qualquer $w \in \mathcal{W}$,

$$\mathcal{H} := \left\{ z \in \mathbb{R}^m : \langle w, z \rangle \leq \langle w, g(x(w)) \rangle \right\},$$

é semi-espaço suporte a $\mathcal{G}$, pois $z \in \mathcal{G}$ implica $z \in \mathcal{H}$ e $\mathcal{H}$ tangencia o conjunto $\mathcal{G}$ no ponto $z = g(x(w))$. $\square$

¹A definição de cone-convexidade aqui empregada difere da definição mais usual em análise convexa (Rockafellar, 1970).

A partir do Lema 2.1, também é possível mostrar que (2.2) admite uma formulação equivalente com uma região viável convexa.

Teorema 2.2. *Seja z^* uma solução ótima para*

$$\max_{z \in \mathcal{G}} u(z). \quad (2.4)$$

Então z^ também é uma solução ótima para (2.2). Reciprocamente, se z^* resolve (2.2), então z^* também resolve (2.4).*

Demonstração. Como qualquer $z = g(x)$, $x \in \Omega$, é viável para (2.4), o conjunto viável de (2.4) contém o conjunto viável de (2.2), e o valor ótimo de (2.4) é um limite superior para o valor ótimo de (2.2). Se z^* resolve (2.4), então pelo Lema 2.1 existe $x^* \in \Omega$ tal que $g(x^*) \geq z^*$ e, de fato, $g(x^*) = z^*$. caso contrário, (ou seja, se $g(x^*) \geq z^*$ e $g(x^*) \neq z^*$), a viabilidade de $g(x^*)$ para (2.4) e o caráter estritamente crescente de u em $\mathcal{G}$ estaria em contradição com a otimalidade de z^* . Como $g(x^*)$ é viável para (2.2), conclui-se que z^* também resolve (2.2). A afirmação inversa é provada usando argumentos semelhantes. $\square$

O problema (2.4) é um problema de otimização semi-infinita devido ao sistema de desigualdades semi-infinito (2.3) (parametrizado por $w \in \mathcal{W}$), que descreve sua região viável. Algoritmos de relaxação têm sido utilizados para resolver problemas de otimização semi-infinitos. O algoritmo de relaxação adotado neste trabalho se desenvolve por meio de determinação de z^k , um maximizador global de u sobre uma aproximação externa $\mathcal{G}^k$ de $\mathcal{G}$, descrita por um subconjunto das restrições de desigualdade (2.3). Caso o problema relaxado não possua solução factível, o mesmo ocorre com o problema original e encerra-se o procedimento com esta conclusão. Caso contrário, obtém-se uma solução ótima para o problema relaxado e verifica-se se a solução satisfaz todas as restrições ignoradas. Se satisfazer, uma solução ótima do problema original também terá sido encontrada. Caso contrário, agrega-se a $\mathcal{G}^k$ uma única restrição de desigualdade, a restrição mais violada por z^k . Este procedimento básico pode ser refinado do ponto de vista computacional removendo-se restrições inativas por várias iterações, por exemplo. A restrição mais violada é determinada pelo cálculo

$$\theta(z^k) := \min_{w \in \mathcal{W}} \phi_{z^k}(w), \quad (2.5)$$

sendo

$$\phi_{z^k}(w) := \max_{x \in \Omega} \langle w, g(x) - z^k \rangle. \quad (2.6)$$

Teorema 2.3. *Para um $z^k \in \mathbb{R}^m$, o valor minmax $\theta(z^k)$ existe.*

Demonstração. Defina $\Phi(w, x) := \langle w, g(x) - z^k \rangle$. Por hipótese, Ω é compacto, e não é difícil ver que $\mathcal{W}$ também é um conjunto compacto. Pela linearidade de Φ em relação a w , $\Phi(w, \cdot)$ é contínua e convexa, enquanto $\Phi(\cdot, x)$ é contínua e côncava, logo o valor minmax existe. $\square$

Lema 2.4. *$z^k \in \mathcal{G}$ se e somente se $\theta(z^k) \geq 0$.*

Demonstração. Suponha que $z^k \in \mathcal{G}$, ou seja, $g(x) \geq z^k$ para algum $x \in \Omega$. Seja $w^* \in \mathcal{W}$ um maximizador de $\max_{x \in \Omega} \langle w, g(x) - z^k \rangle$. Obviamente isto implica que $\theta(z^k) \geq 0$. Reciprocamente, assumamos agora que $z^k \notin \mathcal{G}$, ou seja, $g(x) < z^k$ para todos $x \in \Omega$. Neste caso, existe algum $w^0 \in \mathcal{W}$ tal que

$$\theta(z^k) \leq \max_{x \in \Omega} \langle w^0, g(x) - z^k \rangle < 0,$$

o que completa a prova. $\square$

Teorema 2.5. $\theta(z)$, dado $z \in \mathbb{R}^m$, é o valor ótimo do problema de otimização convexa

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \sigma \\ \text{sujeito a} & g(x) \geq \sigma e + z, \quad x \in \Omega, \end{array} \quad (2.7)$$

onde $\sigma \in \mathbb{R}$ e $e \in \mathbb{R}^m$ é o vetor unitário.

Demonstração. O problema dual de (2.7) é descrito da seguinte forma:

$$\text{minimize} \quad \max_{w \in \mathbb{R}_+^m} \{ \sigma + \langle w, g(x) - \sigma e - z \rangle \}, \quad (2.8)$$

no qual $w \in \mathbb{R}_+^m$ é o vetor de variáveis duais associadas às restrições de desigualdades. A existência do máximo impõe que $\sum_{i=1}^m w_i = 1$, e (2.8) reduz-se a

$$\text{minimize} \quad \max_{w \in \mathcal{W}} \langle w, g(x) - z \rangle, \quad (2.9)$$

cujo valor ótimo é $\theta(z)$. Como o problema primal (2.7) é convexo, sob condições de qualificação das restrições suaves (Bertsekas, 1995), não há gap de dualidade e os problema (2.7) e (2.9) tem o mesmo valor ótimo, $\theta(z)$. $\square$

O teorema a seguir enumera algumas propriedades geométricas adicionais de ϕ_z e θ . A demonstração do teorema é encontrada em (Ashtiani e Ferreira, 2011).

Teorema 2.6. *Sejam ϕ_z e θ definidas por (2.6) e (2.5), respectivamente. Então*

- (i) *Dado $y \in \mathbb{R}^m$, a função ϕ_z é convexa em $\mathcal{W}$;*
- (ii) *$(g(x(w)) - z)$ é um subgradiente de ϕ_z em $w \in \mathcal{W}$;*
- (iii) *A função θ é côncava em $\mathbb{R}^m$.*

Em cada ponto $w \in \mathcal{W}$, um subgradiente $g(x(w)) - z$ determina um hiperplano suporte ao epígrafo de ϕ_z , o que nos permite construir aproximações lineares por partes para ϕ_z . Uma l -ésima aproximação de ϕ_z seria

$$\phi_z^l(w) = \max_{1 \leq i \leq l} \{ \langle w, g(x(w^i)) - z \rangle \}. \quad (2.10)$$

Em vez da minimização convexa em (2.5), consideramos o problema de minimizar ϕ_z^l em $\mathcal{W}$, que por sua vez pode ser descrito como um problema de programação linear. Especificamente, para algum l fixo e $w^l \in \mathcal{W}$, encontramos $x(w^l)$ resolvendo o problema de programação côncava $\max_{x \in \Omega} \langle w, g(x) - z \rangle$, e, em seguida, obtemos σ^{l+1} e w^{l+1} como o valor ótimo e uma solução ótima do seguinte problema de programação linear

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sigma \\ \text{sujeito a} & \sigma \geq \langle w, g(x(w^i)) - z \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, l, \\ & w \in \mathcal{W}, \sigma \in \mathbb{R}. \end{array} \quad (2.11)$$

2.1 Solução por Relaxação

O problema (2.4) tem um número pequeno de variáveis, m , mas um número infinito de restrições lineares. Uma abordagem possível para resolver (2.4) emprega a idéia de relaxação. Considere o politopo inicial

$$\mathcal{G}^0 := \left\{ z \in \mathbb{R}^m : 0 < \underline{z} \leq z \leq \bar{z} \right\},$$

em que $\underline{z}$ e $\bar{z}$ são definidos como

$$\underline{z}_i = \min_{x \in \Omega} g_i(x), \quad \bar{z}_i = \max_{x \in \Omega} g_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

por meio da resolução de m minimizações côncavas e m maximizações convexas, respectivamente. Na prática, $\underline{z}$ pode ser definido como um vetor positivo arbitrariamente pequeno. Pela definição de $\bar{z}$ é fácil ver que o máximo de u em $\mathcal{G}^0$ é alcançado em $z^0 = \bar{z}$. O ponto utópico z^0 raramente satisfaz o sistema de desigualdades (2.3), ou seja $\theta(z^0) < 0$, em geral. Seja $w^0 \in \mathcal{W}$ o minimizador ótimo correspondente em (2.5). Concluímos que z^0 não está no semi-espço suporte

$$\mathcal{H}^0 = \left\{ z \in \mathbb{R}^m : \langle w^0, z \rangle \leq \langle w^0, g(x(w^0)) \rangle \right\}. \quad (2.12)$$

Uma aproximação externa melhorada para $\mathcal{G}$ é $\mathcal{G}^1 = \mathcal{H}^0 \cap \mathcal{G}^0$. Se z^1 que maximiza u em $\mathcal{G}^1$ também é tal forma que $\theta(z^1) < 0$, então um novo semi-espço suporte $\mathcal{H}^1$ é determinado, e a região viável de (2.4) é aproximada de uma forma melhor por $\mathcal{G}^2 = \mathcal{G}^1 \cap \mathcal{H}^1$. Repetindo-se este procedimento, em uma iteração arbitrária k do algoritmo de relaxação, o seguinte problema relaxado é resolvido:

$$P_{\mathcal{G}^k} : \max_{z \in \mathcal{G}^k} u(z).$$

2.2 Resolução de $(P_{\mathcal{G}^k})$

Numa iteração genérica k do nosso procedimento iterativo, após a geração de k hiperplanos de corte, o problema se resume na obtenção da solução ótima global do problema $(P_{\mathcal{G}^k})$, em que $(P_{\mathcal{G}^k})$ é um problema quadrático indefinido da forma seguinte

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && u(z) = z_1 + \sum_{i=1}^r z_{2i} z_{2i+1} \\ &\text{sujeito a} && A^{(k)} z \leq b^{(k)}, \\ &&& \underline{z} \leq z \leq \bar{z}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

em que $A^{(k)} \in \mathbb{R}^{k \times m}$, $b^{(k)} \in \mathbb{R}^k$, $\underline{z} \in \mathbb{R}^m$ e $\bar{z} \in \mathbb{R}^m$ caracterizam a representação matricial do problema $(P_{\mathcal{G}^k})$.

Seja $\tilde{\mathcal{G}}$ a região viável do problema $(P_{\mathcal{G}^k})$ ou ainda qualquer sub-retângulo de $\{z \in \mathbb{R}^m : 0 < \underline{z} \leq z \leq \bar{z}\}$. Em cada um desses subretângulos, qualquer ponto viável fornece um limitante inferior para o valor ótimo de $(P_{\mathcal{G}^k})$. Em (Adjiman et al., 1998), os autores utilizam uma subestimação convexa de termos bilineares xy dentro de uma região retangular $[x^L, x^U] \times [y^L, y^U]$ da seguinte forma:

$$xy \geq \max \left\{ x^L y + y^L x - x^L y^L, x^U y + y^U x - x^U y^U \right\}, \quad (2.14)$$

sendo x^L, x^U, y^L e y^U limitantes inferiores e superiores para x e y , respectivamente. Termos bilineares da forma xy são subestimados da introdução de uma nova variável w e de duas novas restrições. O mesmo raciocínio se aplica a termos bilineares $-xy$:

$$-xy \geq \max \left\{ -x^U y - y^L x + x^U y^U, x^L y + y^U x + x^L y^U \right\}. \quad (2.15)$$

Portanto, a fim de encontrar um limitante superior para o valor ótimo do problema $(P_{\mathcal{G}^k})$ em algum subretângulo $\tilde{\mathcal{G}}$ de $\{z \in \mathbb{R}^m : 0 < \underline{z} \leq z \leq \bar{z}\}$, resolvemos o problema de programação convexa

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && \sum_{i=0}^r w_i \\ &\text{subject to} && A^{(k)} z \leq b^{(k)}, \\ &&& -w_i \geq -z_i^U z_{i+1} - z_{i+1}^L z_i + z_i^U z_{i+1}^L, \quad i = 0, 1, \dots, r, \\ &&& -w_i \geq -z_i^L z_{i+1} - z_{i+1}^U z_i + z_i^L z_{i+1}^U, \quad i = 0, 1, \dots, r, \\ &&& z \in \tilde{\mathcal{G}}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

Um algoritmo *branch-and-bound* simples para a resolução do problema $(P_{\mathcal{G}^k})$ é resumido a seguir.

Algoritmo 1 – Resolução do Problema ($P_{\mathcal{G}^k}$)

Passo 0: Faça $m = 0$;

Passo 1: Defina $\mathcal{L}_0 := \mathcal{G}^0$, L_0 um limitante inferior do valor ótimo de (2.13) e U_0 um limitante superior para o valor ótimo de (2.13) que pode ser encontrado por meio da resolução de (2.16).

Passo 2: Enquanto $U_m - L_m > \varepsilon_1$,
escolha $Q \in \mathcal{L}_m$ tal que o limitante superior em Q seja U_m ;
divida Q , ao longo do maior lado, em Q_I e Q_{II} ;
Defina

$$\mathcal{L}_{m+1} := (\mathcal{L}_m - \{Q\}) \cup \{Q_I, Q_{II}\},$$

L_{m+1} , o máximo dos limitantes inferiores entre todos os sub-retângulos $Q \in \mathcal{L}_{m+1}$,
e U_{m+1} , o máximo dos limitantes superiores entre todos os sub-retângulos $Q \in \mathcal{L}_{m+1}$.
 $m \leftarrow m + 1$;

Discussões sobre a convergência deste algoritmo de *branch-and-bound* podem ser encontrados em (Benson, 2002) e (Balakrishnan e Boyd, 1992), entre outros.

O Algoritmo 2 abaixo resolve globalmente o problema de programação multiplicativa generalizada côncava (Q_{MG}) por meio de aproximação externa.

Algoritmo 2

Passo 0: Defina $\mathcal{G}^0$ e faça $k := 0$;

Passo 1: Resolva o problema de programação generalizada côncava

$$P_{\mathcal{G}^k} : \max_{z \in \mathcal{G}^k} \frac{1}{2} z^T Q z + c^T z, \quad (2.17)$$

por meio do **Algoritmo 1**, obtendo z^k ;

Passo 2: Encontre $\theta(z^k)$ resolvendo o subproblema minmax (2.5)–(2.6). Se $-\theta(z^k) < \varepsilon_2$, sendo $\varepsilon_2 > 0$ é uma tolerância pré-especificada, pare: z^k e x^k são soluções ε_2 -ótimas de (2.4) and (Q_{MG}), respectivamente. Caso contrário, defina

$$\mathcal{G}^{k+1} := \{z \in \mathcal{G}^k : \langle w^k, z \rangle \leq \langle w^k, g(x^k) \rangle\},$$

faça $k \leftarrow k + 1$ e volte ao **Passo 1**.

As propriedades de convergência infinita e finita de Algoritmo2 são semelhantes às exibidas pelo algoritmo de (Oliveira e Ferreira, 2010).

3 Experimentos Numéricos

Os Algoritmos 1 e 2 foram implementados computacionalmente na linguagem de programação do MATLAB, versão 7.0.1/Optimization Toolbox Versão 4, e executados por um computador Pentium IV, 2,4 GHz com 2048 MB de memória RAM. As tolerâncias para as convergências finitas dos algoritmos foram fixadas em $\varepsilon_1 = 0,05$ e $\varepsilon_2 = 0,005$.

Exemplo 3.1. Como uma primeira experiência numérica, considere o problema discutido em (Benson, 2008), em que um algoritmo branch-and-bound é proposto para resolver globalmente o problema de programação multiplicativa generalizada (Q_{MG}). O problema é

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & v_2(x) = (x_1 - x_2 + 4) + (5 - 0,25x_1^2)(0,125x_2 + 1) \\ & + (0,25x_1 + 1)(4 - 0,125x_2^2), \\ \text{sujeito a} & 5x_1 - 8x_2 \geq -24, \\ & 5x_1 + 8x_2 \leq 44, \\ & 6x_1 - 3x_2 \leq 15, \\ & 4x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ & x_1 \geq 0. \end{array} \quad (3.1)$$

As funções g_1, g_2, g_3, g_4 e g_5 são positivas em Ω . Os limitantes inferiores e superiores de z são $\underline{z} = (1; 1; 1; 1; 1,7422)$ e $\bar{z} = (6,5; 5; 1,5312; 2; 4)$, respectivamente. O Algoritmo 2 convergiu após 6 iterações para uma solução ε_2 -ótima $x^* = (2,5000; 0,0000)$, a mesma solução é encontrada em (Benson, 2008), com valor ótimo $v_2^* = 16,4373$. A Tabela 1 apresenta os dados produzidos pelo Algoritmo 2 ao resolver o problema (3.1). Na solução global $x^* = (2,5000; 0,0000)$, $UB_6 - LB_6 = 16,4414 - 16,4913 = 0,0499 \leq \varepsilon_1$. O algoritmo proposto neste artigo chega à mesma solução encontrada em Benson (2008) executando um número bem menor de iterações - 67 iterações em Benson (2008) -, e um número equivalente de iterações se comparado ao encontrado em Ashtiani e Ferreira (2011).

Tabela 1: Convergência do Algoritmo 2 - Exemplo 3.1.

k	z^k	w^k	$x(w^k)$	$-\theta(z^k)$
0	(1,0000;6,5000;5,0000;1,5312;2,0000;4,0000)	(0;0,3562;0,6438;0,0000;0,0000;0)	(1,9531;0,4375)	0,9646
1	(1,0000;6,4914;3,5073;1,5265;1,9956;3,9951)	(0;0,1027;0,0741;0,8232;0,0000;0)	(2,6875;0,3750)	0,4364
2	(0,9999;6,4020;3,5300;1,0070;1,9831;3,9811)	(0;0,0000;0,1616;0,0000;0,8384;0)	(2,6875;0,3750)	0,3151
3	(1,0000;5,7902;2,7277;1,1769;1,7447;3,7152)	(0;0,1025;0,0666;0,8308;0,0000;0)	(3,0625;1,1250)	0,0198
4	(1,0000;6,4142;2,7824;1,0494;1,7824;3,9295)	(0;0,2000;0,0000;0,0000;0,8000;0)	(4,0000;3,0000)	0,1087
5	(0,9995;6,4453;3,3115;1,0156;1,6397;3,9638)	(0;0,2000;0,0000;0,8000;0,0000;0)	(2,5000;0,0000)	0,0016

Exemplo 3.2. Como uma segunda experiência numérica, considere o problema utilizado em (Konno et al., 1994), em que um algoritmo alternativo de aproximação externa para resolver globalmente (P_{MG}) é proposto. O problema é

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & v_2(x) = (3x_1 - 4x_2 + 15) + (x_1 + 2x_2 - 1,5)(2x_1 - x_2 + 4) \\ & + (x_1 - 2x_2 + 8,5)(2x_1 + x_2 - 1), \\ \text{sujeito a} & 5x_1 - 8x_2 \geq -24, \\ & 5x_1 + 8x_2 \leq 44, \\ & 6x_1 - 3x_2 \leq 15, \\ & 4x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ & x_1 \geq 0. \end{array} \quad (3.2)$$

Novamente as funções g_1, g_2, g_3, g_4 e g_5 são positivas em Ω . Os limitantes inferiores e superiores em z são $\underline{z} = (3; 1; 1; 2; 2)$ e $\bar{z} = (22, 5; 9; 9; 11; 11)$, respectivamente. A solução ótima $x^* = (4; 3)$ com um valor ε_2 -ótimo $v_2^* = 156,5$ foi encontrada pelo Algoritmo 2 após 5 iterações. A Tabela 2 apresenta os resultados do Algoritmo 2 ao resolver o problema (3.2).

Tabela 2: Convergência do Algoritmo 2 - Exemplo 3.2.

k	z^k	w^k	$x(w^k)$	$-\theta(z^k)$
0	(1;22,5000;9,0000;9,0000;11,0000;11,0000)	(0;0,5000;0,5000;0;0,0000;0,0000)	(2,5;0,0000)	4,0000
1	(1;14,5008;8,9991;8,9991;10,9990;10,9990)	(0;0,0000;0,3750;0;0,6250;0,0000)	(4,0;3,0000)	2,9990
2	(1;14,5043;8,9884;8,9962; 6,2057;10,9913)	(0;0,0000;0,0000;0;0,0000;1,0000)	(4,0;3,0000)	0,9913
3	(1;14,5258;8,9610;8,9923; 6,2188; 9,9981)	(0;0,0435;0,9565;0;0,0000;0,0000)	(2,0;4,2500)	0,4204
4	(1;14,9875;8,4845;8,9688; 6,5089; 9,9894)	(0;0,0000;0,0000;0;0,5714;0,4286)	(4,0;3,0000)	5,1855e-004

Observe-se que no final do processo iterativo, o algoritmo proposto relata os limitantes superior e inferior como $UB_5 = 156,5273$ e $LB_5 = 156,4773$, respectivamente, com $UB_5 - LB_5 = 0,0500 \leq \varepsilon_1$.

4 Conclusões

Um algoritmo de otimização global para resolver globalmente uma classe de problemas de otimização global foi proposto neste trabalho. Resultados de análise convexa permitiram decompor o problema de programação multiplicativa generalizada côncava em um problema mestre, um problema de programação quadrática indefinida com infinitas restrições lineares de desigualdade no espaço dos objetivos, globalmente resolvido por um algoritmo do tipo *branch-and-bound*.

Os resultados experimentais atestaram a viabilidade e a eficiência do algoritmo de otimização global proposto, que é, além disso, facilmente programável a partir de pacotes padrões de otimização. Os autores atualmente investem em extensões da abordagem proposta para outras classes de problemas de programação multiplicativa e fracionária.

Agradecimento

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, Brasil.

Referencias

- Adjiman, C.S., Dallwig, S., Floudas, C.A. e Neumaier, A.** (1998), A global optimization method, α BB, for general twice-differentiable constrained NLPs - I. Theoretical Advances, *Computers and Chemical Engineering*, 22, 1137–1158.
- Ashtiani, A. M. e Ferreira, P. A. V.** (2011), On the solution of generalized multiplicative extremum problems, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 149, 411–419.
- Balakrishnan, V. e Boyd, S.** (1992), Global optimization in control system analysis and design, Book chapter in *Control and Dynamics: Advanced in Theory and Application*, C. T. Leondes, editor, part 1, 53, 1–56.
- Bennett, K. P.** (1994), Global tree optimization: A non-greedy decision tree algorithm, *Computing Sciences and Statistics*, 26, 156–160.
- Bennett, K. P. e Mangasarian, O. L.** (1994), Bilinear separation of two sets in n -space, *Computational Optimization and Applications*, 2, 207–227.
- Benson, H. P.** (2002), Using concave envelopes to globally solve the nonlinear sum of ratios problem, *Journal of Global Optimization*, 22, 343–364.

- Benson, H. P.** (2008), Global maximization of a generalized concave multiplicative function, *Journal of Optimization Theory and Application*, 137, 105–120.
- Bertsekas, D. P.**, *Nonlinear Programming*, 2nd edn. Athena Scientific, Belmont, 1995.
- Dorneich, M. C. e Sahinidis, N. V.** (1995), Global optimization algorithms for chip design and compaction, *Engineering Optimization*, 25, 131–154.
- Henderson, J. M. e Quandt, R. E.**, *Microeconomic Theory: A Mathematical Approach*, McGraw-Hill, 1971.
- Horst, R., Pardalos, P. M. e Thoai, N. V.** *Introduction to global optimization. Nonconvex Optimization and its Applications*, 3, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- Keeney, R. L. e Raiffa, H.**, *Decisions with Multiple Objectives*, Cambridge University Press, Cambridge, MA, 1993.
- Konno, H. e Fukaishi, K.** (2000) A branch and bound algorithm for solving low rank linear multiplicative and fractional programming problems, *Journal of Global Optimization*, 18, 283–299.
- Konno, H. e Kuno, T.** (1992), Linear multiplicative programming, *Mathematical Programming*, 59, 51–64.
- Konno, H., Kuno, T. e Yajima, Y.** (1994), Global minimization of a generalized convex multiplicative function, *Journal of Global Optimization*, 4, 47–62.
- Konno, H., Shirakawa, H. e Yamazaki, H.** (1993), A mean-absolute deviation-skewness portfolio optimization model, *Annals of Operations Research*, 1–4, 205–220.
- Konno, H., Yajima, Y. e Matsui, T.** (1991), Parametric simplex algorithms for solving a special class of nonconvex minimization problems, *Journal of Global Optimization*, 1, 65–81.
- Kuno, T., Yajima, Y. e Konno, H.** (1993), An outer approximation method for minimization the product of several convex functions on a convex set, *Journal of Global Optimization*, 3, 325–335.
- Maling, K., Mueller, S. H. e Heller, W. R.** (1982), On finding most optimal rectangular package plans. In: *Proceeding of the 19th Design Automation Conference*, 663–670.
- Maranas, C. D., Androulakis, I. P., Floudas, C. A., Berger, A. J. e Mulvey, J. M.** (1997), Solving long-term financial planning problems via global optimization, *Computational financial modelling. J. Econom. Dynam. Control* 21, 8–9, 1405–1425.
- Markowitz, H. M.**, *Portfolio Selection*, Brasil Blackwell Inc., Oxford, 2nd edition, 1991.
- Mulvey, J. M., Vanderbei, R. J. e Zenios, S. A.** (1995), Robust optimization of large-scale systems, *Operations Research*, 2, 264–281.
- Oliveira, R. M. e Ferreira, P. A. V.** (2008), A convex analysis approach for convex multiplicative programming, *Journal of Global Optimization*, 41, 579–592.
- Oliveira, R. M. e Ferreira, P. A. V.** (2010), An outcome space approach for generalized convex multiplicative programs, *Journal of Global Optimization*, 47, 107–118.
- Quesada, I. e Grossmann, I. E.** (1996), Alternative bounding approximations for the global optimization of various engineering design problems, In I. E. Grossmann, (ed), *Global optimization in Engineering Design*, Vol 9 *Nonconvex Optimization and Its Applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 309–331.
- Rockafellar, R. T.**, *Convex analysis*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- Tuy, H.**, *Convex analysis and global optimization. Nonconvex Optimization and its Applications*, 22, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.
- Yu, P. L.**, *Multiple-Criteria Decision Marketing*, Plenum Press, New York, 1985.