

A Utilização da Função Arbitragem de Nash nos Modelos DEA CCR: Uma abordagem na orientação combinada input/output sob a ótica da Teoria dos Jogos de Barganha .

Marco Aurélio Reis dos Santos - marcoaurelioreis@yahoo.com.br

Fernando Augusto Silva Marins - fmarins@feg.unesp.br

Valério A. P. Salomon - salomon@feg.unesp.br

Universidade Estadual Paulista - UNESP

Av. Ariberto Pereira da Cunha, 333 – 12516-410 – Guaratinguetá - SP

RESUMO

Um dos principais propósitos da utilização do método DEA são as projeções dos alvos sobre uma fronteira de eficiência dando suporte ao tomador de decisão quanto as oportunidades de melhoria. Entretanto, nos modelos aditivos que combinam as orientações *input/output*, os resultados dos alvos podem sofrer influência das unidades de medida das variáveis até mesmo indicar uma única orientação. Este artigo propõe um novo modelo como solução deste problema para orientação combinada baseado na teoria dos jogos, mas especificamente no Problema da Barganha Cooperativa, além de apresentar dois exemplos que ilustram interessantes propósitos de aplicação em processos de negociação.

PALAVRAS CHAVE. DEA. Teoria dos Jogos. Problema da Barganha.

ABSTRACT

The main purposes of using the DEA method are the projections of the targets on an efficient frontier supporting the decision maker as the opportunities for improvement. However, the additive models that combine orient to input / output, the results of targets can be influenced by the units of measurement and consequently it may indicates a single orientation. This article shows a new model that combines the classical Bargaining Problem with DEA method. Two examples are presented in order to illustrate interesting applications purposes.

KEYWORDS. DEA. Game Theory. Bargaining Problem.

1. Introdução

Segundo Cook e Seiford (2009), a medida de Eficiência tem sido um assunto de interesse para as organizações produtivas na medida em que elas vêm lutando para melhorar a produtividade. Charnes *et al.* (1978) desenvolveram um método conhecido como Análise Envoltória de Dados - DEA (*Data Envelopment Analysis*) a partir do estudo da comparação de eficiências de escolas públicas consideradas como um conjunto de Unidades Tomadoras de Decisão - DMU (*Decision Making Units*).

Desde que surgiu, a DEA tem tido excelentes aplicações nas medidas de desempenho em diversas situações tais como aplicações em indústrias, hospitais, escolas, universidades, cadeia de suprimentos, restaurantes, bancos etc. Vários modelos para tratar de diferentes abordagens de medida de desempenho têm sido desenvolvidos pelos pesquisadores com a finalidade de potencializar as vantagens da DEA a diferentes aplicações (COOK e SEIFORD, 2009). Segundo Cooper *et al.* (2000), um dos principais propósitos de um estudo DEA é a projeção das DMU ineficientes sobre uma fronteira de eficiência, fornecendo suporte ao tomador de decisão a respeito dos alvos *inputs* e *outputs*. Os alvos indicam quais os níveis de *outputs* e *inputs* em que DMU ineficientes devem alcançar para que estas se tornem eficientes.

Assim há três direções que podem ser adotadas nas projeções das DMU ineficientes sobre a fronteira de produção, conforme ilustrado na Figura 1. Um procedimento é chamado de orientação a *input*, cujo objetivo é minimizar os *inputs* enquanto pelo menos mantêm os níveis atuais de *outputs*, outro é chamado de orientação a *output*, cujo objetivo é maximizar os níveis de *outputs* mantendo o mesmo consumo atual de *inputs*, uma terceira opção tenta combinar ambas as orientações, o que pode ser representado pelos modelos Aditivos (*Additive models*) ou baseados em folgas (*Slack Based Measure*).

- | | | |
|--|---|---|
| 1. Fixar Produtos (Y)
Reduzir os Recursos (X) | 2. Fixar Recursos (X)
Aumentar os Produtos (Y) | 3. Reduzir Recursos (X)
Aumentar os Produtos (Y) |
|--|---|---|

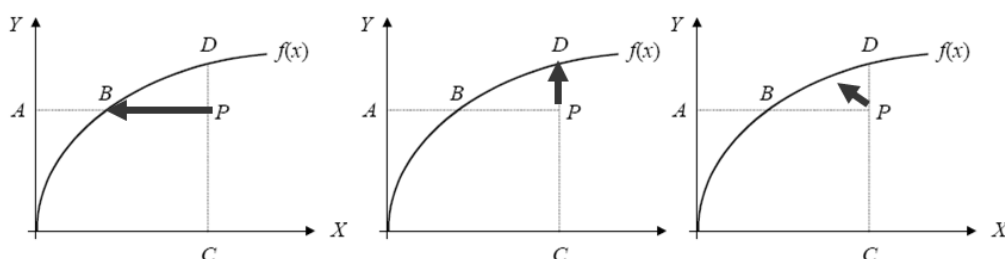


Figura 1-Representação Gráfica para o modelo DEA três orientações do modelo (Adaptado de Mello *et al.* 2005).

Os modelos aditivos, ou baseados em folgas, buscam estabelecer um acordo entre duas perspectivas:

- Uma sob ponto de vista de consumo abusivo de *inputs*, cujo objetivo é maximizar a parcela que pode ser economizada (correspondente ao excesso);
- Outra sob ponto vista de produção deficiente de *outputs*, cujo objetivo é maximizar a parcela que pode ser acrescentada (correspondente às deficiências) aos níveis atuais de *outputs*.

Porém, devido à natureza conflitante entre as duas orientações, os modelos baseados em folgas precisam ser calibrados, por exemplo, por meio de atribuição de pesos ou coeficientes de importância relativa às parcelas a serem otimizadas, caso contrário os resultados do modelo podem indicar uma única orientação, ou para *output* ou *input*, conforme será ilustrado mais adiante.

Este artigo propõe um novo modelo como solução deste conflito para orientação combinada baseado na teoria dos jogos, mais especificamente no Problema da Barganha Cooperativa, ou da Negociação Cooperativa, proposto por Nash (1950, 1953).

Uma das vantagens desta abordagem é que o processo de calibração da otimização, dos dois agentes *outputs* e *inputs*, pode ser mais objetivo do que a dos modelos baseados em folgas, uma vez que tenta encontrar uma solução ótima para os níveis de *outputs* e *inputs* que seja melhor do que aqueles níveis exigidos, ou prometidos ou ameaçados por estes agentes antes de estabelecerem um acordo. Espera-se oferecer um auxílio na concepção de unidades produtivas que não somente sejam eficientes, mas também eficazes. Segundo Cooper *et al.* (2000), eficácia implica na destreza de se alcançar objetivos desejados, enquanto a eficiência relaciona os benefícios realizados com os recursos utilizados. Portanto, uma DMU que seja classificada como eficiente não significa necessariamente que seja eficaz.

Outra vantagem que este modelo pode oferecer, conforme será ilustrado mais adiante, é que em casos de avaliações de organizações públicas, por exemplo, onde o grande desafio é maximizar os benefícios à população, dados os recursos escassos, a orientação combinada pode ser mais interessante do que simplesmente aplicar modelos com orientação a *output*, uma vez que unidades eficientes podem, ainda, serem consideradas deficientes pela população em termos de eficácia. Combinando as duas orientações, pode-se negociar uma economia de recursos nas unidades ineficientes, na medida em que se busca atender exigências da população, de fato, o que puder ser economizado poderá ser reaplicado às unidades eficientes, porém ineficazes.

Podem-se citar algumas abordagens recentes de utilização da Teoria dos Jogos da Barganha Cooperativa em conjunto com o método DEA, como, por exemplo, Wu *et al.* (2009) que propõem uma melhoria na avaliação de desempenho baseado num processo de barganha entre avaliação obtida pelo modelo CCR e a avaliação por meio da Eficiência Cruzada. Du *et al.* (2011) utilizam a Teoria dos Jogos da Barganha no processo de avaliação de eficiência no modelo DEA com dois estágios, onde a medida global de eficiência é obtida por meio de medidas parciais de eficiência barganhada em cada um dos dois estágios de uma unidade produtiva.

O modelo aqui proposto, diferentemente destas abordagens citadas, não foca na medida de desempenho, mas nas projeções dos Alvos, pois se acredita que mais interessante do que identificar o grau de ineficiência de cada uma das DMU é apontar as oportunidades de melhoria de cada uma das DMU. O objetivo geral deste artigo é propor um modelo DEA com retorno constante de escala baseado no modelo clássico da Teoria dos Jogos Cooperativos na orientação combinada *input/output* e ilustrar o modelo por meio de exemplos extraídos da literatura.

Este artigo está estruturado como: na Seção 2 os modelos DEA CCR e Aditivos são apresentados, na Seção 3 alguns conceitos básicos do modelo da Barganha é comentado, na Seção 4 é apresentada a formulação do modelo DEA proposto baseado na Teoria da Barganha Cooperativa, na Seção 5 ilustra-se a aplicação do modelo por meio de dois exemplos e, finalmente, estão as referências.

2. Data Envelopment Analysis

Eficiência técnica é um conceito relativo, compara o que foi produzido, a partir dos recursos disponíveis, com o que foi produzido pelas suas DMU concorrentes ou parceiras mais eficientes (*benchmark*). Quando há n DMU, cada qual com r *inputs* e m *outputs*, a eficiência relativa pode ser obtida resolvendo o Problema de Programação Fracional, (1) - (3):

$$\text{Max } \theta_0 = \left(\frac{\sum_{j=1}^m u_j y_{jo}}{\sum_{i=1}^r v_i x_{i0}} \right) \quad (1)$$

sujeito a

$$\frac{\sum_{j=1}^m u_j y_{jk}}{\sum_{i=1}^r v_i x_{ik}} \leq 1 \quad \forall k, \quad (2)$$

$$u_j \geq 0 \quad \forall j, \quad v_i \geq 0 \quad \forall i. \quad (3)$$

Este modelo que é conhecido como modelo CCR (CHARNES, COOPER, e RHODES) pode ser convertido para um Problema de Programação Linear dado por (4) - (7):

$$\text{Max } \theta_0 = \sum_{j=1}^m u_j y_{jo} \quad (4)$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^r v_i x_{i0} = 1, \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^m u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} \leq 0 \quad \forall k, \quad (6)$$

$$u_j \geq 0 \quad \forall j, \quad v_i \geq 0 \quad \forall i. \quad (7)$$

Este modelo é chamado de Modelo dos Multiplicadores, com orientação a *input*, que vem do fato de a eficiência ser atingida com a redução de *inputs*. Isso é melhor representado no dual deste modelo, em (8) - (11), conhecido como Modelo Envelope.

(8)

$$\text{Min } \theta_0$$

sujeito a

$$x_{i0} \theta_0 \geq \sum_{k=1}^n x_{ik} \lambda_k = x_{i\min} \quad \forall i, \quad (9)$$

$$y_{jo} \leq \sum_{k=1}^n y_{jk} \lambda_k = y_{j\max} \quad \forall j, \quad (10)$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad \forall k. \quad (11)$$

onde λ_k é o coeficiente de importância relativa da DMU_k; θ_0 é a medida radial de eficiência técnica da DMU₀; $x_{i\min}$ é o valor do alvo para o *input* i da DMU₀; $y_{j\max}$ é o valor do alvo para o *output* j da DMU₀.

Por serem duais, os modelos (4) - (7) e (8) - (11) têm o mesmo valor para a função objetivo.

Debreu (1951) introduziu o conceito de medida radial de eficiência técnica, ou coeficiente de utilização dos recursos, que mede o grau de ineficiência relativa de um conjunto de DMU. A medida radial de eficiência é um fator que, ao ser multiplicado pelo vetor *inputs* ou *outputs*, permite (independentemente da unidade de medida):

- A máxima redução equiproporcional de todos os *inputs*;
- A máxima expansão equiproporcional de todos os *outputs*.

Até este ponto, requer-se que o avaliador escolha entre utilizar um de dois modelos distintos: orientado a *output* ou orientado a *input*. Charnes *et al.* (1985) combinaram ambas as orientações em um modelo simples chamado de Modelo Aditivo que é bem próxima dos modelos típicos de Programação por Metas - GP (*Goal Programming*) de Charnes e Cooper (1961). A diferença entre GP e DEA é que, enquanto a GP tenta prever o desempenho futuro (*ex-ante facto*) minimizando os desvios as metas, a DEA avalia o desempenho passado (*ex-post facto*) maximizando os desvios unilaterais dos atuais níveis de *outputs* e *inputs*, obtendo-se os alvos em ambas as orientações (COOPER, 2005).

O Modelo Aditivo permite que se incluam julgamentos de valor de especialistas conhecedores do ramo de atividades e características das DMU por meio de pesos (w_m),

associados às folgas conforme (12) - (15), buscando-se atribuir importância diferenciada na avaliação dos *inputs* e *outputs* (FERREIRA e GOMES, 2009).

$$\text{Max } \sum_{i=1}^r w_i^- s_i^- + \sum_{j=1}^m w_j^+ s_j^+ \quad (12)$$

sujeito a

$$x_{io} - s_i^- = \sum_{k=1}^n x_{ik} \lambda_k = x_{i \min} \quad \forall i, \quad (13)$$

$$y_{jo} + s_j^+ = \sum_{k=1}^n y_{jk} \lambda_k = y_{j \max} \quad \forall j, \quad (14)$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad \forall k. \quad (15)$$

onde s_i^- é a folga associada ao *input* i ; s_j^+ é a folga associada ao *output* j ; w_i^- é o peso associado a importância relativa do *input* i ; w_j^+ é o peso associado a importância relativa do *output* j .

Cooper *et al.* (1999) propuseram utilizar o inverso das amplitudes ($Z = x_{0\text{maior}} - x_{0\text{menor}}$; $Z^+ = y_{0\text{maior}} - y_{0\text{menor}}$) para tornar o processo de maximização da função objetivo independente das unidades de medidas dos *inputs* e *outputs*. Desta forma, os pesos dos *inputs* serão $w_i^- = 1/Z$ e dos *outputs* $w_j^+ = 1/Z^+$.

Baseado no conceito do coeficiente de utilização dos recursos de Debreu (1951), pode-se introduzir dois coeficientes escalares e independentes das unidades de medida: α e β , onde α proporciona a máxima redução de todos os *inputs*, e β permite a máxima expansão de todos os *outputs*. Assim passa-se a definir eficiência técnica relativa conforme (16):

$$\text{Eficiência} = \left\{ \min \frac{\alpha}{\beta} \text{ tal que } \frac{\alpha \sum_{i=1}^r v_i x_{i0}}{\beta \sum_{j=1}^m u_j y_{j0}} \geq \frac{\sum_{i=1}^r v_i x_{i \min}}{\sum_{j=1}^m u_j y_{j \max}}, \frac{\sum_{i=1}^r v_i x_{i \min}}{\sum_{j=1}^m u_j y_{j \max}} = 1, \right. \\ \left. \sum_{k=1}^n x_{ik} \lambda_k = x_{i \min} \quad \forall i, \sum_{k=1}^n y_{jk} \lambda_k = y_{j \max} \quad \forall j, \alpha \leq 1, \beta \geq 1, v_i \geq 0 \quad \forall i, u_j \geq 0 \quad \forall j \right\} \quad (16)$$

De forma análoga, pode-se representar (16) pelo modelo (17) - (20), que tem múltiplas soluções ótimas representando as diversas opções de projeções de *output* e *input*:

$$\text{Min } \frac{\alpha}{\beta} \quad (17)$$

sujeito a

$$x_{io} \alpha \geq \sum_{k=1}^n x_{ik} \lambda_k = x_{i \min} \quad \forall i, \quad (18)$$

$$y_{jo} \beta \leq \sum_{k=1}^n y_{jk} \lambda_k = y_{j \max} \quad \forall j, \quad (19)$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad \forall k, \alpha \leq 1, \beta \geq 1. \quad (20)$$

3. Modelo do Problema da Barganha de Nash

Aqui se comenta o Modelo de Jogos de Barganha de Nash para dois Jogadores (NASH, 1953), denotados pelo conjunto $N=\{1,2\}$ e um vetor de *payoff* (U_1, U_2) (representando os pagamentos ou as recompensas de cada agente no jogo) definido como um elemento no espaço Euclidiano R^2 . Seja um conjunto convexo S definido como um subconjunto factível de *payoffs*,

representando o conjunto finito de estratégias cooperativas para ambos os jogadores, e um ponto d chamado de ponto de desacordo (*breakdown point* ou *disagreement point*) como um elemento pertencente ao conjunto factível de *payoffs* que é um limitante inferior para conjunto de estratégias cooperativas S .

A formulação sugerida por Nash (1953) requer que o conjunto S seja convexo e compacto e, que cada elemento do vetor *payoff* pertencente a S , seja maior ou igual aos níveis de *payoffs* em que se encontram ambos os agentes, antes de estabelecerem um acordo (ponto de desacordo). A idéia é que cada jogador, supostamente sem nenhum tipo de empatia entre si (ou de justiça ou de equidade), mas com alto grau de racionalidade, partindo de uma recompensa já garantida (ponto de desacordo), tentaria negociar ou barganhar estratégias cooperativas de forma a encontrar uma situação melhor do que aquela antes de chegar ao acordo. A solução proposta por Nash (1953), como resultado da negociação, é aquela encontrada pela função arbitragem $F(N=2, S, d)$ expressa em (21):

$$\max_{\bar{U} \in \bar{S}, \bar{U} \geq \bar{d}} \prod_{i=1}^{N=2} (U_i - d_i) \quad (21)$$

Tal solução é que respeita satisfatoriamente quatro axiomas nos quais Nash formaliza o Problema da Barganha:

- Ótimo de Pareto - Considerando dois pontos $x, y \in S$, se $y > x$ então $f(S, d) \neq x$. Na solução encontrada, nenhum dos agentes pode aumentar o seu nível de *payoff* sem que o do seu adversário diminua, ou seja, ambos agentes já alcançaram o máximo de benefício sem prejudicar o outro. Isto significa encontrar uma solução de *payoffs* em S que seja justa para ambos os jogadores;
- Simetria - Sejam (S, d) um conjunto simétrico $d_1 = d_2$ e $[(U_1, U_2) \in S$ se e somente se $(U_2, U_1) \in S]$. Então, $f_1(S, d) = f_2(S, d)$. Este axioma garante a inclusão de todos os parâmetros relevantes para a barganha. Numa representação gráfica, como a da Figura 2, invertendo-se os eixos que representam U_1 e U_2 (que no caso da Figura 2 são *Input* e *Output*), a solução deverá ser equivalente à solução original;
- Independência das alternativas irrelevantes - se $T \subset S$ e $f(S, d) \in T$, então $f(T, d) = f(S, d)$, o que indica que a solução não deve ser influenciada pela escolha de alternativas irrelevantes no processo de negociação;
- Invariância por transformações lineares - $\forall (S, d), \forall (S', d'), a_i > 0, S' = \{s' / s'_i = a_i s_i + b_i \forall i \in N\}$ e $d'_i = a_i d_i + b_i \forall i \in N \Rightarrow f(S', d') = a_i f(S, d) + b_i \forall i \in N$. Tal axioma reflete a ideia de que a solução do jogo de barganha deve ser independente de qualquer escala utilizada.

O último axioma torna o Modelo da Barganha interessante de ser aplicado em conjunto com o DEA, uma vez que as projeções dos Alvos no modelo Aditivo são influenciadas pelas unidades de medida dos *inputs* e *outputs*.

4. Modelo da Barganha no processo de Avaliação de desempenho

Aqui propõe-se a formulação de um modelo DEA baseado no modelo da Barganha que busque avaliar o desempenho a partir de níveis mínimos de *outputs* e máximos de *inputs* prometidos, ou exigidos por ambos agentes (que serão os *outputs* e os *inputs*, jogadores considerados no modelo), antes de chegarem a um acordo cooperativo que garantam níveis máximos de *outputs* e mínimos de *inputs*.

Os níveis mínimos de *outputs* e os níveis máximos de *inputs*, que irão definir os pontos de desacordo ou *breakdown point*, não necessariamente precisam ser os níveis atuais, mas podem ser outros, superiores aos *outputs* atuais, e inferiores aos *inputs*, desde que pertençam ao conjunto de possibilidades de produção. Desta forma, podem-se estabelecer projeções de alvos que satisfaçam

as condições mínimas que garantam a eficácia da DMU, desde que estas condições estejam dentro de um conjunto de estratégias factíveis, ou seja, pertençam ao conjunto de possibilidades de produção; caso contrário, o modelo não possuirá solução viável.

Neste modelo, dado um conjunto de possibilidades de produção P , o conjunto de estratégias cooperativas factíveis S será um subconjunto de P conforme ilustrado na Figura 2. Assim, $P \subset S$.

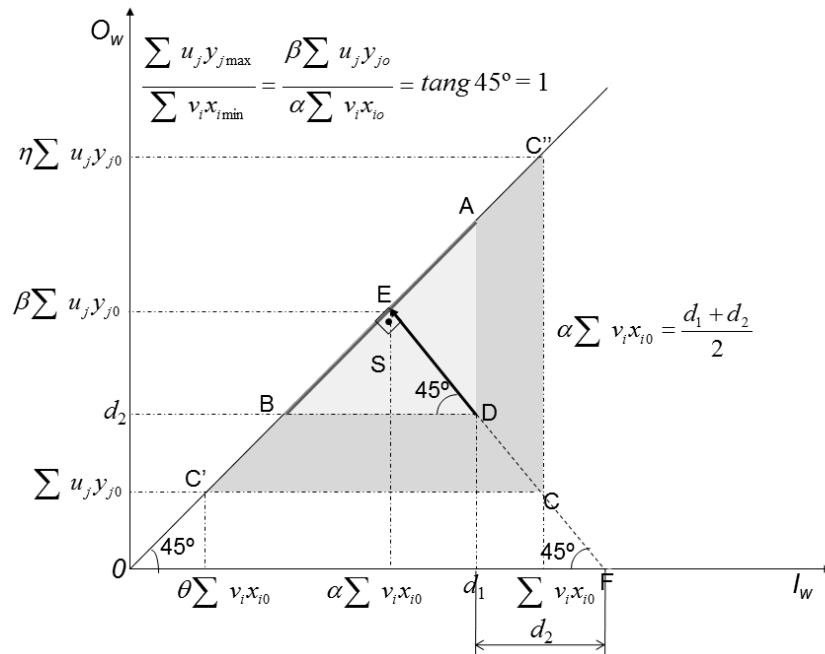


Figura 2-Representação Gráfica para o modelo DEA sob a orientação do modelo da Barganha

Na Figura 2, o ponto $C(\sum v_i x_{i0}, \sum u_j y_{j0})$ representa a DMU C avaliada, o ponto $D(d_1, d_2)$ representa o ponto de desacordo para DMU C e pode representar os mínimos níveis exigidos de produção de *output* (d_2) e a mínima economia exigida para os *inputs* (d_1). Os pontos A , B e D delimitam a Região de estratégias cooperativas S (conjunto compacto e convexo). A região delimitada pelos pontos A e B constitui a Região de Barganha. O ponto E , pertencente à região de barganha, representa a projeção dos alvos da DMU C que satisfaz os quatro axiomas formalizados por Nash.

Tal solução pode ser encontrada substituindo a função objetivo (17), do modelo (17) - (20), pela função arbitragem de Nash (1953) como está no modelo (22) - (25):

(22)

$$\text{Max } z = (\varepsilon_1 - \alpha)(\beta - \varepsilon_2)$$

sujeito a

$$x_{i0} \alpha \geq \sum_{k=1}^n x_{ik} \lambda_k = x_{i \min} \quad \forall i, \quad (23)$$

$$y_{j0} \beta \leq \sum_{k=1}^n y_{jk} \lambda_k = y_{j \max} \quad \forall j, \quad (24)$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad \forall k, \alpha \leq \varepsilon_1, \beta \geq \varepsilon_2. \quad (25)$$

onde $\varepsilon_1 \sum_{i=1}^r v_i x_{i0} = d_1$; $\varepsilon_2 \sum_{j=1}^m u_j y_{j0} = d_2$; $\varepsilon_1 = 1 - \phi_1/100$; $\varepsilon_2 = 1 + \phi_2/100$; ϕ_1 é o percentual mínimo exigido de redução dos *inputs*; ϕ_2 é o percentual mínimo exigido de aumento dos *outputs*.

Uma formulação equivalente está em (26) - (29):

(26)

$$\text{Max } z = \varepsilon_1 \beta + \varepsilon_2 \alpha - \alpha \beta - \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

sujeito a

$$x_{io}\alpha \geq \sum_{k=1}^n x_{ik}\lambda_k = x_{i\min} \quad \forall i, \quad (27)$$

$$y_{jo}\beta \leq \sum_{k=1}^n y_{jk}\lambda_k = y_{j\max} \quad \forall j, \quad (28)$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad \forall k, \alpha \leq \varepsilon_1, \beta \geq \varepsilon_2. \quad (29)$$

No modelo CCR o retorno é constante de escala, e a eficiência relativa é obtida por meio da relação entre a produtividade atual e a máxima produtividade que se pode alcançar, que é sempre igual a 1 para qualquer projeção dos alvos na curva de eficiência. A produtividade máxima é representada pelo coeficiente angular da reta que representa a fronteira de eficiência, sendo seu valor igual a tangente de 45° conforme ilustrado na Figura 2.

Desta forma, para o caso do modelo CCR, a eficiência obtida será constante para qualquer orientação, seja orientado a *input*, seja orientado a *output*, ou seja, as duas orientações combinadas. Desta forma, pode-se afirmar que $\theta_0 = \alpha/\beta$. Uma vez conhecendo θ_0 por meio do modelo CCR clássico orientado a *input*, pode-se elaborar o modelo (30) - (33), considerando $\alpha = \theta_0 \beta$.

$$\text{Max } z = -\theta_0 \beta^2 + (\varepsilon_1 + \theta_0 \varepsilon_2) \beta - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \quad (30)$$

sujeito a

$$x_{io}\alpha \geq \sum_{k=1}^n x_{ik}\lambda_k = x_{i\min} \quad \forall i, \quad (31)$$

$$y_{jo}\beta \leq \sum_{k=1}^n y_{jk}\lambda_k = y_{j\max} \quad \forall j, \quad (32)$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad \forall k, \alpha \leq \varepsilon_1, \beta \geq \varepsilon_2. \quad (33)$$

O conhecimento prévio da eficiência técnica θ_0 é uma informação útil ao tomador de decisão, uma vez que os agentes só conseguirão negociar uma melhoria nos níveis de *outputs* e de *inputs* caso a DMU seja considerada ineficiente e a escolha do ponto de desacordo satisfaça $\theta_0 \leq \varepsilon_1 / \varepsilon_2$. Não sendo respeitada esta condição, o modelo será inviável, pois qualquer tentativa de melhoria estará fora do conjunto de estratégias cooperativas factíveis. A função objetivo (30) é uma equação do segundo grau que pode ser linearizada, uma vez que z terá valor máximo quando a sua derivada em relação a β for igual a zero, conforme ilustrado na Figura 3.

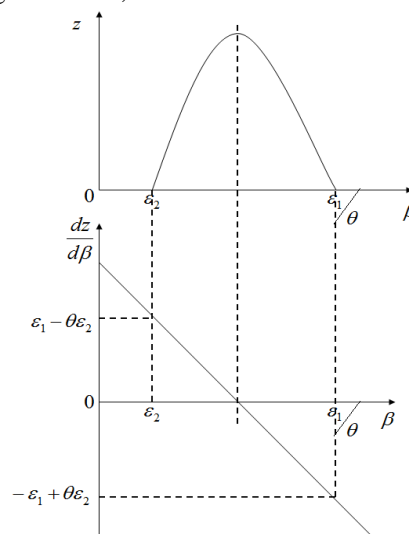


Figura 3-Representação Gráfica da derivada de z em relação a β .

A equação da derivada de z em relação a β é representada em (34):

$$\frac{dz}{d\beta} = -2\theta_0\beta + \varepsilon_1 + \theta_0\varepsilon_2 \quad (34)$$

Pode-se obter um modelo de Programação Linear (35) - (39) equivalente ao modelo representado por (30) - (33):

$$\text{Max } \beta \quad (35)$$

sujeito a:

$$x_{io}\alpha \geq \sum_{k=1}^n x_{ik}\lambda_k = x_{i\min} \quad \forall i, \quad (36)$$

$$y_{jo}\beta \leq \sum_{k=1}^n y_{jk}\lambda_k = y_{j\max} \quad \forall j, \quad (37)$$

$$2\alpha = \varepsilon_1 + \theta_0\varepsilon_2 \quad (38)$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad \forall k, \alpha \leq \varepsilon_1, \beta \geq \varepsilon_2. \quad (39)$$

Combinando o modelo CCR orientado a *input*, ver (8) - (11), com o modelo baseado na Teoria dos Jogos de Barganha, ver (35) - (39) tem-se o modelo de (40) - (46):

$$\text{Max } \beta - \theta_0 \quad (40)$$

sujeito a

$$x_{io}\theta_0 \geq \sum_{k=1}^n x_{ik}t_k \quad \forall i, \quad (41)$$

$$y_{jo} \leq \sum_{k=1}^n y_{jk}t_k \quad \forall j, \quad (42)$$

$$x_{io}\alpha \geq \sum_{k=1}^n x_{ik}\lambda_k = x_{i\min} \quad \forall i, \quad (43)$$

$$y_{jo}\beta \leq \sum_{k=1}^n y_{jk}\lambda_k = y_{j\max} \quad \forall j, \quad (44)$$

$$2\alpha = \varepsilon_1 + \theta_0\varepsilon_2 \quad (45)$$

$$t_k \geq 0 \quad \lambda_k \geq 0 \quad \forall k, \alpha \leq \varepsilon_1, \beta \geq \varepsilon_2. \quad (46)$$

A partir de (45) pode-se chegar a relação (47):

$$\varepsilon_1 - \alpha = \alpha - \theta_0\varepsilon_2 \therefore \varepsilon_1 - \alpha = \theta_0\beta - \theta_0\varepsilon_2 \therefore \theta_0 = \frac{\varepsilon_1 - \alpha}{\beta - \varepsilon_2} \quad (47)$$

5. Exemplo Numérico

Para ilustrar o propósito do modelo, apresentam-se dois exemplos numéricos de Ferreira e Gomes (2009) e Cooper *et al.* (2000), respectivamente.

A Tabela 1 mostra os resultados obtidos pelo primeiro exemplo, que é uma aplicação do Modelo Aditivo, ver (12) - (15), e utiliza o critério proposto por Cooper *et al.* (1999) para atribuição de pesos (w_m) associados às folgas de forma a torná-lo adimensional, mas, no entanto, observa-se na Tabela 1 que o alvo projetado para o produto da DMU_3 se manteve fixo, obtendo-se assim uma única orientação (orientação a *input*).

Tabela 1-Comparativo dos resultados entre o modelo DEA Aditivo e o Modelo DEA da Barganha.

		Alvos eficientes													
		Dados Originais				Modelo Aditivo			Modelo da Barganha						
DMU	Eficiência	Insumo 1	Insumo 2	Produto	Insumo 1	Insumo 2	Produto	Insumo 1	Insumo 2	Produto	α	β	$\varepsilon 1$	$\varepsilon 2$	
DMU_1	0,666667	6	14	2	6	4	2	5	10	2,5	0,833333	1,25	1	1	
DMU_2	1	8	16	4	8	16	4	8	16	4	1	1	1	1	
DMU_3	0,666667	12	12	3	9	6	3	10	10	3,75	0,833333	1,25	1	1	
DMU_4	1	6	4	2	6	4	2	6	4	2	1	1	1	1	
DMU_5	0,583333	6	3	1	3	2	1	4,75	2,375	1,357143	0,791667	1,357143	1	1	
DMU_6	1	15	3	3	15	3	3	15	3	3	1	1	1	1	

No entanto, ao aplicar a avaliação segundo o modelo da Barganha de Nash, ver (40) - (46), e partindo de um *breakdown point* $\varepsilon(1,1)$, obtém-se um aumento de 25% ($1-\beta$) no nível dos produtos e uma redução de 16,7% ($1-\alpha$) no nível de insumos para a DMU_3. Tal situação pode representar um processo de negociação entre o produtor da DMU_3, que busca economizar a quantidade de insumos utilizados, e o cliente da DMU_3, que busca demandar uma quantidade crescente do Produto ofertado pelo produtor da DMU_3. Ilustrando, suponha-se que o Cliente da DMU_3 necessite aumentar o consumo do produto em pelo menos 10% e o produtor da DMU_3 resolva cortar gastos com insumos em pelo menos 5%. Para o modelo proposto, o ponto de desacordo correspondente para DMU_3 será $\varepsilon(0,95;1,1)$. Note-se que as condições exigidas satisfazem as condições de viabilidade ($\theta_3=0,6667 \leq 0,95/1,1=0,8636$). Assim, quanto maior o nível de ineficiência, maior o poder de negociação dos jogadores.

A Tabela 2 mostra o novo resultado da projeção dos alvos para DMU_3 com as novas condições exigidas por ambos os jogadores da DMU_3.

Tabela 2-Resultados do Modelo DEA da Barganha para as Novas Condições Exigidas para DMU_3.

DMU	Eficiência	Modelo da Barganha							
		Insumo 1	Insumo 2	Produto	α	β	$\varepsilon 1$	$\varepsilon 2$	
DMU_1	0,666667	5	10	2,5	0,833333	1,25	1	1	
DMU_2	1	8	16	4	1	1	1	1	
DMU_3	0,666667	10,1	10,1	3,7875	0,841667	1,2625	0,95	1,1	
DMU_4	1	6	4	2	1	1	1	1	
DMU_5	0,583333	4,75	2,375	1,357143	0,791667	1,357143	1	1	
DMU_6	1	15	3	3	1	1	1	1	

Pela Tabela 2, a solução obtida pelo modelo da barganha é aumentar a produção da DMU_3 em 26,25% e reduzir o seu nível de insumos em 15,85%, uma situação melhor para ambos os jogadores do que aquela exigida antes de estabelecerem um acordo.

No exemplo 2, Cooper *et al.* (2000) avaliam a eficiência de 12 hospitais onde os *inputs* são o número de médicos e enfermeiros, e os *outputs* são o número de pacientes não internados e o número de pacientes internados (cada um em unidades de 100 pessoas/mês). Aplicou-se o modelo CCR orientado a *input* e depois o modelo CCR orientado a *output*. Em seguida, os autores fizeram uma combinação de ambas as projeções com pesos de 1/2 para cada orientação, estabelecendo um compromisso igual para ambos os agentes. Aplicando o modelo aqui proposto, com um *breakdown point* de $\varepsilon(1;1)$, obtém-se o mesmo resultado (conforme ilustrado na Tabela 3) com a vantagem de aplicar um único modelo.

Tabela 3-Resultados do Modelo DEA da Barganha para o caso de 12 Hospitais.

Hospital	Dados Originais				Alvos eficientes								
	Médicos	Efermeiro	nº Pacientes		Médicos	Efermeiro	nº Pacientes		θ	α	β	ε_1	ε_2
			Não Internos	Internos			Não Internos	Internos					
A	20	151	100	90	20	151	100	90	1	1	1	1	1
B	19	131	150	50	19	131	150	50	1	1	1	1	1
C	25	160	160	55	22	150	171	59	0,882708	0,941354	1,066439	1	1
D	27	168	180	72	27	168	180	72	1	1	1	1	1
E	22	158	94	66	19	139	109	77	0,763499	0,88175	1,154879	1	1
F	55	255	230	90	37	233	253	99	0,834771	0,917386	1,098966	1	1
G	33	235	220	88	31	219	232	93	0,901961	0,95098	1,054348	1	1
H	31	206	152	80	27	185	172	91	0,796334	0,898167	1,127877	1	1
I	30	244	190	100	29	211	194	103	0,960392	0,980196	1,020621	1	1
J	50	268	250	100	40	250	269	108	0,870647	0,935323	1,074286	1	1
K	53	306	260	147	44	299	267	151	0,955098	0,977549	1,023506	1	1
L	38	284	250	120	37	265	256	123	0,958204	0,979102	1,021809	1	1

Como ilustração, supondo que a demanda real do hospital A é de 110 pacientes não internos e de 92 pacientes internos, mas que, entretanto só tem condições de atender 100 e 90 respectivamente, conforme ilustrado na Tabela 3. O hospital A pode ser considerado eficiente ($\theta_A=1$) porém não é eficaz. Neste caso não se pode negociar uma melhoria, mas alguma quantidade de médicos e enfermeiros, que pode ser reduzida nos Hospitais ineficientes, poderá ser realocada para o Hospital A e, desta forma, pode-se aumentar a capacidade de Atendimento do Hospital A sem que ele deixe de ser eficiente.

Com os alvos projetados do modelo proposto e adicionando mais 3 médicos para o hospital A (proveniente de algum hospital ineficiente), mais 2 médicos para os hospitais B e D e mais 15 enfermeiros para os Hospitais A, B e D e aplicando o modelo CCR orientado a *output*, obtém-se uma melhoria na capacidade de atendimento destes três hospitais, conforme ilustrado na Tabela 4. De fato, com os aumentos dos recursos humanos nestes três hospitais consequentemente eles se tornam ineficientes, mas os hospitais considerados ineficientes no primeiro modelo com utilização de recursos e níveis de serviços eficientes acabam se tornando eficientes (Tabela 4).

Tabela 4-Resultados do Modelo DEA CCR orientado a *output* a partir de dados projetados no Modelo DEA da Barganha e recursos realocados.

Hospital	eficiência	Alvos eficientes			
		Médicos	Efermeiros	nº Pacientes	
				Não Internos	Internos
A	0,985459	23	166	131	92
B	0,901172	21	146	16	58
C	1	22	150	171	59
D	0,913407	29	183	198	79
E	1	19	139	109	77
F	1	37	233	253	99
G	1	31	219	232	93
H	1	27	185	172	91
I	1	29	211	194	103
J	1	40	250	269	108
K	1	44	299	267	151
L	1	37	265	256	123

Lembrando que, para o hospital A, para que ele seja considerado eficaz, ele deve possuir uma capacidade de Atendimento de pelo menos 110 pacientes não internos e 92 pacientes internos. Com três médicos e 15 enfermeiros adicionais, o hospital A consegue atender com um desempenho eficiente, 131 pacientes não internos e 92 pacientes internos, ver Tabela 4, tornando-se assim eficiente e eficaz.

Assim, para um caso de Gestão Pública de Saúde, onde não se é usual cortar recursos que já são escassos, tornar-se interessante negociar melhorias em unidades de atendimento de saúde

ineficientes, cortando gastos excessivos para reaplicá-los em unidades eficientes, ao mesmo tempo em que se tenta aumentar a qualidade dos serviços oferecidos, conforme uma demanda mínima de serviços exigida pela população.

6. Conclusões

Este artigo apresenta a utilização de um modelo DEA incorporando conceitos da Teoria dos Jogos. A orientação combinada baseou-se no Problema da Barganha de Nash para projeção dos Alvos. Por meio de exemplos numéricos pôde-se comparar a vantagem do novo proposto com a abordagem do modelo Aditivo e da abordagem da combinação linear convexa dos Alvos projetados nos modelos orientados a *input* e orientados a *output*. Além disso, os dois exemplos numéricos ilustram potenciais e interessantes aplicações práticas.

Como futuras direções de pesquisa sugere-se a validação deste modelo por meio de aplicações em casos práticos. Outra direção de pesquisa é a utilização do modelo de retorno variável de escala.

Referências

- Banker, R., Charnes, A. e Cooper, W. W.** (1984), Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, 30 (9), 1078–1092.
- Charnes, A., Cooper, W., W.** (1961), *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*. Wiley: New York.
- Charnes, A., Cooper, W., W. e Rhodes, E.** (1978), Measuring the Efficiency of Making Units. *European Journal of Operational Research*, 2 (6), 429-444.
- Charnes, A., Cooper, W., W., Golany, B., Seiford, L. M., Stutz, J.** (1985), Foundations of data envelopment analysis for pareto-koopmans efficient empirical production functions. *Journal of Econometrics*, 30, 91-107.
- Cooper, W. W., Park, K. S., Pastor, J. T.** (1999), A range adjusted measure of efficiency for use with additive models, and relations to other models and measures in DEA. *Journal of Production Analysis*, 11, 5-42.
- Cooper, W. W., Seiford, L. M. e Tone, K.** (2000) *Data Envelopment Analysis: a comprehensive text with models, applications, references and DEA – solver software*, Kluwer Academic Publisher.
- Cooper, W. W.** (2005), Origins, Uses of, and Relations Between Goal Programming and Data Envelopment Analysis. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 13, 3-11.
- Cook, W. D. e Seiford, L. M.** (2009), Data Envelopment Analysis (DEA)—Thirty years on. *European Journal of Operational Research*, 192, 1-17.
- Debreu, G.** (1951), The coefficient of resource utilization. *Econometrica*, 19, 273-292.
- Du, J., Liang L. Chen, Y., Cook, W. D. e Zhu, J.** (2011), A bargaining game model for measuring performance of two-stage network structures. *European Journal of Operational Research*, 210, 390-397.
- Ferreira, C. M. C. e Gomes, A. P.** (2009), *Introdução à Análise Envoltória de Dados—Teoria, Modelos e Aplicações*, Editora UFV.
- Mello, J. C. C. B. S., Meza, L. A., Gomes, E. G. e Neto, L. B.** (2005), Curso de Análise de Envoltória de Dados. In: Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 37. Gramado. *Anais: Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional*, 2520-2547.
- Nash, J. F.** (1950), The bargaining problem. *Econometrica*, 18, 155-162.
- Nash, J. F.** (1953), Two-person cooperatives games. *Econometrica*, 21, 128-140.
- Wu, J., Liang, L., Yang, F., Yan, H.** (2009), Bargaining game model in the evaluation of decision making units. *Expert Systems with Applications*, 36, 4357-4362.