COMPARAÇÃO ENTRE DUAS ESTRATÉGIAS DE ELIMINAÇÃO DE *SUBTOURS* PARA UM MODELO DE DIMENSIONAMENTO E SEQUENCIAMENTO DE LOTES BASEADO NO MODELO ATSP

Deisemara Ferreira
Universidade Federal do Triângulo Mineiro, UFTM;
Departamento de Engenharias
Rua Frei Paulino, 30, 38025-180, Uberaba, MG
deisemara@icte.uftm.edu.br

Alistair R. Clark
University of the West of England, Bristol Institute of Technology,
Frenchay Campus, Coldharbour Lane, Bristol, BS16 1QY, England;
alistair.Clark@uwe.ac.uk

Bernardo Almada-Lobo
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto,
Rua Dr. Roberto Frias s/n, Porto 4200-465, Portugal,
almada.lobo@fe.up.pt

Reinaldo Morabito
Universidade Federal de São Carlos, UFSCar;
Departamento de Engenharia de Produção
Rod. Washington Luís - Km 235; 13565-905, São Carlos, SP
morabito@power.ufscar.br

Resumo
Apresentamos neste trabalho uma nova estratégia de eliminação de *subtours*, F1, para o modelo proposto por Ferreira *et al.* (2010) baseado em um modelo do caixeiro viajante assimétrico, modelo ATSP (*Asymmetric travelling salesman problem*) para a programação da produção de bebidas dois estágios multi-máquinas. Experimentos computacionais realizados com instâncias baseadas em dados reais e indicam que a nova estratégia é competitiva em relação à estratégia proposta por Ferreira *et al.* (2010).

Palavras-chave: Modelos integrados de dimensionamento e sequenciamento da produção. Problema do caixeiro viajante assimétrico. Programação inteira mista.

Abstract
In this work we present a new strategy called F1 to eliminate subtours in a model proposed by Ferreira *et al.* (2010) based on the asymmetric travelling salesman problem, ATSP model, to define the two stage multi machine soft drink production process. The computational tests with instances based on real data show that the new constraints tested are competitive when compared with Ferreira *et al.* (2010) subtours elimination constraints.

Keywords: Integrated lot sizing and scheduling problems, Asymmetric Travelling Salesman problem, Mixed integer programming.

1. Introdução

Em muitas empresas o planejamento da produção envolve o dimensionamento e o sequenciamento dos lotes. Observando estas duas decisões, nota-se que há um *trade off* entre fazer trocas de itens (definir o sequenciamento) e gerar estoques (definir os tamanhos dos lotes de produção), pois muitas trocas implicam em estoques menores mas acarretam em custos de troca, enquanto ao fazer poucas trocas tem-se a redução destes custos, porém são necessários estoques maiores que também são onerosos.

Na prática as empresas tomam as decisões do dimensionamento e sequenciamento da produção em etapas diferentes. Em um momento são definidos os lotes de produção enquanto em outro momento é definido o sequenciamento dos itens. Este tipo de programação da produção de forma independente pode não considerar o *trade off* entre trocas de itens e lotes de estoque.

Na literatura já há trabalhos que integram em modelos matemáticos estas decisões, e tornam possível avaliar de forma mais realista o *trade off* entre o sequenciamento dos itens e o dimensionamento dos lotes. Revisões de problemas integrados de dimensionamento e sequenciamento da produção são (Drexl and Kimms, 1997), (Koçlar, 2005), (Zhu and Wilhelm, 2006). Exemplos de trabalhos aplicados à programação da produção de algumas indústrias brasileiras são Araújo *et al.* (2008), Toso *et al.* (2009) e Luche *et al.* (2008) aplicados nos setores de fundição, nutrição animal e grãos eletrofundidos, respectivamente.

Em Ferreira *et al.* (2008, 2010) foi estudado um problema de dimensionamento e sequenciamento da produção de refrigerantes em uma fábrica de pequeno porte por meio de um modelo de otimização baseado no modelo GLSP (Fleischmann e Meyr, 1997). O modelo considera apenas um estágio de produção, envase da bebida, tratado como gargalo da produção, com uma única linha de envase. Heurísticas do tipo *relax and fix* foram propostas para resolver o modelo. Um caso mais geral do problema considerando dois estágios de produção (preparo do xarope e envase da bebida) foi estudado em Toledo *et al.* (2007, 2008). Foi proposto um modelo de otimização inteira mista que considera a sincronia entre os estágios, que é um aspecto importante em fábricas de médio e grande porte, com várias linhas de envase paralelas. Devido à complexidade e dimensão do modelo, foram propostas abordagens de solução por meio de algoritmos genéticos e meméticos (Toledo *et al.*, 2008).

Em Ferreira *et al.* (2009) é proposto um modelo de otimização inteira mista, Modelo Dois Estágios Multi-Máquinas (P2EMM), que considera várias linhas de envase em paralelo, sincronia entre os dois estágios de produção (preparo do xarope e envase da bebida) e tempos e custos de troca dependentes da sequência em ambos os estágios. Este modelo admite hipóteses simplificadoras em relação ao modelo proposto em Toledo *et. al.* (2007), como a dedicação de linha a tanque. Para resolvê-lo, é então estudada uma abordagem de solução baseada em uma estratégia de relaxação (ER) do modelo, combinada com heurísticas do tipo *relax and fix*. Uma comparação destas abordagens pode ser encontrada em Ferreira *et al.* (2008). Ferreira et al. (2010) propõem uma reformulação do modelo P2EMM onde o problema dois estágios foi remodelado em um modelo um estágio, modelo R1. Em todos estes trabalhos as modelagens matemáticas utilizam a estrutura de dimensionamento e sequenciamento de lotes, baseada na divisão do período em períodos menores.

Uma forma diferente de sequenciamento aplicada a um problema que possui características em comum com a produção de bebidas com tempos de troca dependentes é o trabalho de Toso *et al.* (2009). Nele uma estratégia para a programação da produção de ração animal é feita baseada na solução de um modelo do caixeiro viajante assimétrico, modelo ATSP (*Assimetric Travelling Salesman Problem*). Esta modelagem que também integra dimensionamento e sequenciamento de lotes foi comparada a um modelo do tipo GLSP e forneceu bons resultados.

Na literatura, Almada-Lobo et al. (2007) apresentam um modelo para o planejamento da produção de uma indústria de contêineres de vidro cujas decisões de dimensionamento de lotes são baseadas no modelo *Capacitated Lotsizing and Scheduling Problem* e do sequenciamento são reformuladas com base no problema do caixeiro viajante assimétrico, porém diferente de Toso et al. (2009) são consideradas restrições de setup *carryover*.

No presente trabalho comparamos duas formulações, modelo F1 e modelo F2, baseadas na resolução de um modelo do tipo ATSP (*Asymmetric travelling salesman problem*) para resolver o problema de programação de bebidas dois estágios com sincronia tratado em Ferreira *et al.* (2009), que é um problema difícil de ser resolvido. A formulação F2 foi proposta por Ferreira *et al.* (2010), o modelo F1 utiliza um conjunto base de restrições semelhantes às do modelo F2, porém com as inequações de eliminação de *subtours* propostas por Miller, Tucker e Zemlim (MTZ) (Lawler et al., 1986). Estas inequações foram utilizadas por Almada-Lobo *et al.* (2007) e posteriormente por Menezes *et al.* (2011) em problemas com custos e tempos de *set up* não triangulares.

As soluções fornecidas por estes modelos são comparadas e a formulação F1 forneceu resultados competitivos. Na próxima seção deste artigo é descrito resumidamente o processo de produção de bebidas. Os modelos F1 e F2 são apresentados na Seção 3. Na Seção 4 são realizados os experimentos computacionais. E finalmente, na Seção 5 apresentamos as considerações finais e propostas de trabalhos futuros.

2. Processo de Produção de Refrigerantes

A aplicação de que se tratam os modelos propostos é a programação da produção de bebidas. Este processo produtivo possui dois estágios principais que são o preparo do xarope (sabor) e o envase da bebida pronta. O xarope é preparado em tanques especiais que possuem hélices para agitar o líquido. Uma quantidade mínima de xarope, suficiente para cobrir as hélices, deve ser preparada para garantir a homogeneidade do mesmo. Há necessidade de preparar o tanque (limpeza) antes de seu uso. Este preparo é dependente da sequência e ocorre mesmo entre trocas de xaropes de mesmo sabor. O tempo de troca no tanque é então o tempo de limpeza do tanque somado ao tempo de preparar o xarope (mistura dos ingredientes), ou seja, sempre há um tempo de troca entre os lotes de xarope.

Após o preparo, o xarope é enviado para as linhas de envase se estas estiverem prontas. Independente do número de tanques, cada linha de envase recebe xarope de apenas um tanque por vez, porém um tanque pode enviar xarope para mais de uma linha simultaneamente se elas estiverem envasando o mesmo sabor de bebida. O tempo de troca na linha é considerado o tempo de limpeza da linha, se o novo item a ser produzido for de sabor diferente, e/ou ajuste mecânico se o novo item a ser produzido utilizar um vasilhame de tamanho diferente.

Além dos tempos e custos de trocas dependentes da sequência, é necessário considerar a sincronia entre os estágios de preparo de xarope e envase da bebida. Na prática, se o tanque não estiver com o xarope pronto para ser enviado para a linha de envase, esta deve aguardar até que o xarope esteja pronto. Do mesmo modo, o tanque só pode iniciar o envio de xarope para a linha de envase se ela estiver preparada. Assim, podem ocorrer esperas da linha de envase pelo tanque e do tanque pela linha de envase. Uma programação da produção não sincronizada, ou seja, sem a consideração das diferenças entre os tempos de troca dos dois estágios, pode levar a uma programação inviável na prática, uma vez que os tempos de espera podem consumir parte da capacidade de produção (Ferreira *et al.*, 2009). No presente trabalho representamos matematicamente este processo produtivo, considerando que há um tanque dedicado a cada linha. Desta forma é necessário sincronizar cada linha a seu tanque de uso exclusivo.

3. Modelagem da programação da produção de bebidas

As modelagens matemáticas propostas no presente trabalho utilizam um modelo base do tipo ATSP proposto por Ferreira *et al.* (2010), e se diferem pelas inequações de eliminação de *subtours*. Os modelos são do tipo *big bucket*, pois os vários itens podem ser produzidos no período. Os detalhes desta proposta estão a seguir.

3.1 Modelo Base

Considere os conjuntos de índices e parâmetros: parâmetros número total de refrigerantes (itens); xaropes; linhas de envase (máquinas) e tanques; períodos; sub-períodos (i.e. número total de preparos em cada macro-período) são designados respectivamente pelas letras maiúsculas *J, L, M, T* e *N*. Os índices $i, j \in (1,\dots,J)$ itens; $t \in (1,\dots,T)$ períodos; $k, l \in (1,\dots,L)$ sabor dos xaropes; $m \in (1,\dots,M)$ máquinas e tanques; e suponha que os seguintes conjuntos são conhecidos: λ_j conjunto de todas as máquinas que podem produzir o item *j*; α_m conjunto de todos os refrigerantes que podem ser produzidos na máquina *m*; β_m conjunto de todos os xaropes que podem ser preparados no tanque *m*; γ_{ml} conjunto de todos os refrigerantes que podem ser produzidos na máquina *m* e utilizam o xarope *l*; $\phi(i)$ é o xarope utilizado para preparar a bebida *i*.

Os dados de entrada do problema são: d_{jt} é a demanda do item *j* no período *t*; h_j é o custo de estocar o item *j*; g_j é o custo de atrasar a entrega do item *j;* c_{ij} é o custo de fazer a troca do item *i* para *j;* a_{mj} é a quantidade consumida de tempo para produção de uma unidade do item *j* na máquina *m*; K_{mt} é a capacidade de tempo disponível na máquina *m* para envase no período *t*; UB_{mj} é o lote máximo de refrigerante *j* que se pode envasar com um tanque cheio do xarope.

Para modelagem do processo de programação de bebidas é necessário preparar alguns dos dados de entrada e toma-los em termos apenas do estágio de envase. A seguir são definidos parâmetros que devem ser pré-processados. O sobrescrito *I* se refere ao estágio de xaroparia e o sobrescrito *II* se refere ao estágio de envase.

b_{ij}^{II} = quantidade consumida de tempo para fazer a troca de produção do item *i* para *j*;

b_{kl}^{I} = quantidade consumida de tempo para fazer a troca do xarope *k* para o xarope *l*;

q_{ls}^{I} = quantidade mínima do xarope *l* a ser preparada nos tanques no sub-período *s*.

Os parâmetros de lotes máximos e mínimos dos xaropes são transformados em termos de bebida pronta. Desta forma, UB_{mj} é o lote máximo de refrigerante *j* que se pode envasar com um tanque cheio do xarope, q_{mj} é o mínimo de bebida que se envasa com o lote mínimo de xarope q_{ls}^{I} que deve ser preparado. O parâmetro $\overline{b}_{ij}$ é o máximo entre o tempo de troca da linha e o tempo necessário para o preparo do xarope a ser envasado, $\max\left\{b_{ij}^{II}, b_{kl}^{I} : i, j \in \alpha_m,\ k = \phi(i) \text{ e } l = \phi(j)\right\}$, onde $\phi(i)$ é o xarope utilizado para preparar a bebida *i*. Este pré-processamento dos dados de tempos de troca garante a sincronia entre os estágios, pois sempre o maior tempo é considerado evitando que a linha (ou o tanque) comece a envasar (ou enviar xarope) antes que o outro estágio esteja pronto.

Considere o seguinte conjunto de variáveis:

I_{jt}^{+} = estoque do item *j* no período *t*;

I_{jt}^{-} = quantidade em atraso do item *j* no período *t*;

x'_{mjt} = produção da máquina *m* do item *j* no período *t*;

η_{mjt} = 1 se a máquina *m* está configurada para o item j no início do período t; 0 caso contrário.

ξ_{mjt} = número de vezes que a linha *m* está configurada para produção do item *j* no período *t*.

z'_{mijt} = 1 se há troca na máquina *m* do item *i* para o item *j* no período *t*; 0 caso contrário.

z'_{mjjt} = 0 para $j \in \alpha_m$.

Note que outra forma de interpretar as variáveis η_{mjt} é que elas definem a última configuração da máquina *m* no período *t-1*. Portanto, este conjunto de variáveis não implica produção do item *j* na máquina *m* no período *t*, elas apenas mantém a informação sobre a configuração no início do período *t*, que equivale à última configuração do período *t-1*.

Através das variáveis η_{mjt} e ξ_{mjs} é possível definir o número de *set ups*. As variáveis ξ_{mjs} são a configuração da máquina *m* para produção do item *j* no período *t*, então quando a primeira configuração η_{mjt} é subtraída o resultado (ξ_{mjs}-η_{mjt}) é o número total de trocas do item *j* na máquina *m* no período *t*.

A soma $\sum_{i\in\alpha_m, i\neq j} z'_{mijt}$ representa o número total de trocas do item *i* para *j*, onde *i* é diferente de *j*, então o termo $(\xi_{mjt} - \eta_{mjt} - \sum_{i\in\alpha_m, i\neq j} z'_{mijt})$ é o número total de trocas do item *j* para *j*.

O Modelo Base é dado a seguir:

Modelo Base

$$\text{(1) } Min\ Z=\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T}(h_j I^+_{jt} + g_j I^-_{jt}) + \sum_{m=1}^{M}\sum_{t=1}^{T}\sum_{j\in\alpha_m} c_{ij}(\xi_{mjt} - \eta_{mjt} - \sum_{i\in\alpha_m, i\neq j} z'_{mijt}) + \sum_{m=1}^{M}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in\alpha_m}\sum_{j\in\alpha_m, i\neq j} c_{ij} z'_{mijt}$$

$$\text{(2) } I^+_{j(t-1)} + I^-_{jt} + \sum_{m=1}^{M} x^{II}_{mjt} = I^+_{jt} + I^-_{j(t-1)} + d_{jt}, \qquad j=1,\dots,J,\ t=1,\dots,T;$$

$$\text{(3) } \sum_{j\in\alpha_m} a_{mj} x'_{mjt} + \sum_{i\in\alpha_m}\sum_{j\in\alpha_m} b_{ij} z_{mijt} + \sum_{j\in\alpha_m} \bar{b}_{jj}(\xi_{mjt} - \eta_{mjt} - \sum_{i\in\alpha_m, i\neq j} z'_{mijt}) \le K_{mt}, \qquad m=1,\dots,M,\ t=1,\dots,T;$$

$$\text{(4) } \sum_{j\in\alpha_m} \eta_{mjt} = 1, \qquad m=1,\dots,M,\ t=1,\dots,T;$$

$$\text{(5) } \eta_{mjt} + \sum_{i} z'_{mijt} = \sum_{k} z'_{mjkt} + \eta_{mj(t+1)}, \qquad m=1,\dots,M,\ j\in\alpha_m\ t=1,\dots,T;$$

$$\text{(6) } \xi_{mjt} \le |S_t|(\sum_{i\in\alpha_m} z'_{mijt} + \eta_{mjt}), \qquad m=1,\dots,M,\ j\in\alpha_m\ t=1,\dots,T;$$

$$\text{(7) } x'_{mjt} \le UB_{mj}(\xi_{mjt} - \eta_{mjt}), \qquad m=1,\dots,M,\ j\in\alpha_m\ t=1,\dots,T;$$

$$\text{(8) } x'_{mjt} \ge q_{mj}(\xi_{mjt} - \eta_{mjt}), \qquad m=1,\dots,M,\ j\in\alpha_m\ t=1,\dots,T;$$

$$\text{(9) } \sum_{i\in\alpha_m} z'_{mijt} \le \xi_{mjt}, \qquad m=1,\dots,M,\ j\in\alpha_m\ t=1,\dots,T;$$

$$\text{(10) } \sum_{j\in\alpha_m} \xi_{mjt} \le |S_t|, \qquad m=1,\dots,M,\ t=1,\dots,T;$$

$$\text{(11) } I^+_{jt},\ I^-_{jt},\ x'_{mjt} \ge 0,\ \eta_{mjt},\ z'_{mijt} = \{0,1\},\ \xi_{mjt} \ge 0 \text{ e inteiro},\ m=1,\dots,M,\ i \text{ e } j\in\alpha_m\ t=1,\dots,T.$$

A função objetivo (1) minimiza o estoque total, o atraso e os custos de troca. O termo $\sum_{m=1}^{M}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in\alpha_m}\sum_{j\in\alpha_m, i\neq j} c_{ij} z'_{mijt}$ considera os custos de troca, c_{ij} entre diferentes itens. O termo $(\xi_{mjt} - \eta_{mjt} - \sum_{i\in\alpha_m, i\neq j} z'_{mijt})$ representa o número de trocas do item j para j como explicado anteriormente. As restrições (12) são de balanceamento de estoque. As restrições (3) são restrições de capacidade. Os tempos de troca são considerados da mesma forma que os custos.

As máquinas estão configuradas pelo menos para um item em cada período, o que é garantido pelas restrições (4). As restrições (5) garantem que na máquina *m* no período *t* o item *j* é o primeiro item configurado para ela, e também caso haja uma troca do item *i* para *j* então necessariamente haverá uma troca do item *j* para outro item *k* a menos que ele seja o último item preparado do período (e será o primeiro item configurado para produção no período (*t+1*)).

As restrições (6) são restrições de *set up*, pois se a máquina m não está configurada para produzir o item j no início do período t e não há troca de um item i para j então o número de configurações, variáveis ξ_{mjt}, deve ser 0. Os lotes máximos e mínimos são definidos respectivamente pelas restrições (7) e restrições (8). Além disto, como explicado anteriormente, o termo (ξ_{mjs} - η_{mjt}) é o número total de trocas do item *j* na máquina *m* no período *t*, pelas restrições (8) eles definem também o número máximo de lotes produzidos no período, a restrições (7) garantem que se não houver preparo das máquinas não haverá produção. As restrições (9) irão garantir que se há troca há o preparo da máquina e consequentemente (restrição (8)) a produção do item.

Na aplicação estudada, produção de bebidas, há uma limitação no número de lotes de produção de xarope, o que equivale a uma limitação no número de lotes de itens produzidos no período, por esta razão as restrições (10) foram inseridas no modelo. As restrições (11) são a definição do domínio das variáveis.

3.2 Formulação F1.

As soluções fornecidas pelo Modelo Base permitem a geração de *subtours*. Neste trabalho, consideramos as restrições (13) propostas por Miller, Tucker e Zemlim (MTZ) (Lawler et al., 1986). Diferente de outras restrições que devem ser incorporadas de forma dinâmica por causa do número elevado de possibilidades, as restrições MTZ podem ser incorporadas a priori no modelo base, (Sherali *et al.*, 2002). Para gera-las é necessário um novo conjunto de variáveis reais não nulas. Sejam v_{mj} as variáveis auxiliares utilizadas na restrição de eliminação de *subtours*. As inequações são:

(12) $v_{mit} + 1 \leq v_{mjt} + |S_t|(1 + \xi_{mit} - z_{mijt}) \qquad m = 1,...,M,\ i \in \alpha_m,\ j \in \alpha_m \setminus \{i\}\ t = 1,...,T;$

O modelo F1 consiste no Modelo Base com o novo conjunto de variáveis e as restrições (12). Veja a seguir.

Modelo F1.

$$Min\ Z = \sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T}(h_j I^{+}_{jt} + g_j I^{-}_{jt}) + \sum_{m=1}^{M}\sum_{t=1}^{T}\sum_{j\in\alpha_m} c_{ij}(\xi_{mjt} - \eta_{mjt} - \sum_{i\in\alpha_m, i\neq j} z'_{mijt}) + \sum_{m=1}^{M}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in\alpha_m}\sum_{j\in\alpha_m, i\neq j} c_{ij} z'_{mijt} \quad (1)$$

Sujeito as restrições

(2)-(10)

(12) $v_{mit} + 1 \le v_{mjt} + |S_t|(1 + \xi_{mit} - z_{mijt}) \qquad m = 1,\dots,M,\ i \in \alpha_m,\ j \in \alpha_m \setminus \{i\}\ t = 1,\dots,T;$

(13) I^{+}_{jt}, I^{-}_{jt}, $x^{'}_{mjt} \ge 0$, η_{mjt}, $z^{'}_{mijt} = \{0,1\}$, $\xi_{mjt} \ge 0$ e inteiro, $m = 1,\dots,M$, i e $j \in \alpha_m$ $t = 1,\dots,T$.

3.2 Formulação F2.

Na segunda modelagem testada para eliminar *subtours* foram utilizadas as inequações testadas por Menezes *et al.* (2009). Cada item representa um nó do caminho que se pretende formar. Seja C o conjunto de nós do *subtour*. As restrições de eliminação de *subtour* são:

(14) $\sum_{j \in \alpha_m} z_{mijt} \le 1 \quad m = 1,\dots,M \quad i \in \alpha_m \ t = 1,\dots,T$

(15) $\sum_{i \in \alpha_m} z_{mijt} \le 1 \quad m = 1,\dots,M \quad j \in \alpha_m \ t = 1,\dots,T$

(16) $\sum_{i \in \alpha_m} \sum_{j \in \alpha_m / C} z_{mijt} + \sum_{j \in C} \eta_{mjt} \ge \sum_{i \in \alpha_m} z_{mikt} \quad m = 1,\dots,M,\ k \in C, C \subseteq \alpha_m \ t = 1,\dots,T.$

As restrições (14) e (15) garantem que haverá apenas uma troca de um item *i* para outro *j*. Enquanto as restrições (16) eliminam os *subtour*s desconexos. Para todo *subtour* desconexo $\sum_{i \in \alpha_m} \sum_{j \in \alpha_m / C} z_{mijt} = 0$ e $\sum_{j \in C} \eta_{mjt} = 0$ então $0 \ge \sum_{i \in \alpha_m} z_{mikt}$, porém temos que $z_{mikt} = 1$ para $i \in C$ e $k \in C$. Portanto a solução com o *subtour* desconexo não satisfaz a inequação (16).

O processo de eliminação de *subtour* é iterativo, a cada solução ótima do modelo o conjunto C é identificado a inequação é gerada, inserida no modelo que é resolvido novamente até a otimalidade. O processo se repete até que uma solução ótima sem *subtour* seja encontrada.

Temos que o modelo utilizado é composto pela função objetivo 1 pelas restrições (02) a (11), (14)-(16).

Modelo F2.

(1) $$Min\ Z = \sum_{j=1}^{J} \sum_{t=1}^{T} (h_j I^{+}_{jt} + g_j I^{-}_{jt}) + \sum_{m=1}^{M} \sum_{t=1}^{T} \sum_{j \in \alpha_m} c_{ij} (\xi_{mjt} - \eta_{mjt} - \sum_{i \in \alpha_m, i \ne j} z^{'}_{mijt}) + \sum_{m=1}^{M} \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in \alpha_m} \sum_{j \in \alpha_m, i \ne j} c_{ij} z^{'}_{mijt}$$

Sujeito as restrições

(2)-(11)

(14) $\sum_{j \in \alpha_m} z_{mijt} \le 1 \quad m = 1,\dots,M \quad i \in \alpha_m \ t = 1,\dots,T$

(15) $\sum_{i \in \alpha_m} z_{mijt} \le 1 \quad m = 1,\dots,M \quad j \in \alpha_m \ t = 1,\dots,T$

(16) $\sum_{i \in \alpha_m} \sum_{j \in \alpha_m / C} z_{mijt} + \sum_{j \in C} \eta_{mjt} \ge \sum_{i \in \alpha_m} z_{mikt} \quad m = 1,\dots,M,\ k \in C, C \subseteq \alpha_m \ t = 1,\dots,T.$

(11) I_{jt}^{+}, I_{jt}^{-}, $x'_{mjt} \geq 0$, η_{mjt}, $z'_{mijt} = \{0,1\}$, $\xi_{mjt} \geq 0$ e inteiro, $m = 1,...,M$, i e $j \in \alpha_m$ $t = 1,...,T$.

4. Experimentos Computacionais

Para comparar o desempenho dos modelos F1 e F2 foram utilizados 28 exemplares baseados em dados reais de uma empresa de bebidas, envolvendo, porém um número menor de itens e linhas de envase (exemplares relativamente pequenos). A motivação para esta simplificação é comparar as soluções ótimas dos modelos. Sabe-se da literatura que em exemplares realistas de dimensões maiores é difícil encontrar soluções ótimas deste problema em tempos aceitáveis. Estes exemplares possuem 2 linhas de envase, para 4 bebidas, com 2 xaropes diferentes. A programação é para 3 períodos.

Os exemplares E8-E14 são baseados nas sete primeiras instâncias, mas a capacidade das linhas foi reduzida. Os exemplares E15 a E21 são baseados nos exemplares E8 a E14, mas nestes exemplares foram considerados custos de troca de xarope, $c_{kl}^{I} > 0$, que nos outros exemplares estavam embutidos nos custos de troca dos itens. Os últimos sete exemplares (22 a 28) são baseados nos exemplares E1 a E7, mas com custos de preparo de xarope como nos exemplares 15 a 21.

Os modelos foram implementados na linguagem de modelagem AMPL 100 (Fourer *et al.*, 1993) e resolvidos pelo sistema de otimização CPLEX versão 10.0 (ILOG, 2006).

Foram obtidas as soluções ótimas para todos os exemplares. A Tabela 1 apresenta o tempo em segundos para obtenção das soluções. Na primeira coluna da Tabela 1 estão apresentados os nomes das instâncias, na segunda coluna os valores do custo total das soluções ótimas obtidas. Na terceira e quarta colunas da Tabela 2 estão os tempos de solução, respectivamente do modelo F1 e F2 para cada exemplar, e a última coluna apresenta a porcentagem de redução nos tempos de solução da estratégia F2 pelo modelo F1 em cada instância. Os valores em negrito são os menores tempos obtidos de cada exemplar.

Tabela 1. Tempos de solução de cada instâncias dos modelos F1 e F2.

Ex.	**Sol. ótima**	**F1**	**F2**	**Porc. %**
E1	*257,7*	**7,5**	290,0	97,4
E2	*264,3*	**9,0**	1201,0	99,3
E3	*275,3*	**8,2**	208,0	96,1
E4	*278,2*	**14,4**	1392,0	99,0
E5	*260,9*	**7,6**	73,0	89,6
E6	*271,0*	**3,0**	137,0	97,8
E7	*215,3*	**4,1**	128,0	96,8
E8	*257,7*	**1,0**	57,0	98,2
E9	*264,3*	**7,0**	71,0	90,1
E10	*345,4*	**5,0**	49,0	89,8
E11	*336,0*	**3,0**	106,0	97,2
E12	*272,5*	**4,0**	12,0	66,7
E13	*354, 7*	**2,0**	28,0	92,9
E14	*215,3*	**2,0**	32,0	93,8
E15	*1.028,1*	**1,0**	6,0	83,3

E16	*347,7*	**3,0**	13,0	76,9
E17	*720,4*	**7,0**	14,0	50,0
E18	*770,9*	**3,0**	7,0	57,1
E19	*658,2*	**2,0**	7,0	71,4
E20	*719,7*	**1,0**	10,0	90,0
E21	*910,6*	**1,0**	14,0	92,9
E22	*267,7*	**1,0**	22,0	95,5
E23	*274,3*	**6,0**	97,0	93,8
E24	*285,3*	**4,0**	12,0	66,7
E25	*288,2*	**13,0**	21,0	38,1
E26	*270,9*	**2,0**	17,0	88,2
E27	*280,9*	**6,0**	36,0	83,3
E28	*225,3*	**2,0**	8,0	75,0
Média	*377,2*	**4,6**	145,3	84,5

5. Conclusões e perspectivas futuras

Neste trabalho foram comparados os resultados de duas formulações baseadas em um modelo do tipo ATSP, modelos F1 e F2, para o problema de programação de bebidas dois estágios com sincronia. Este problema é um problema de dimensionamento e sequenciamento da produção de difícil solução. Foram utilizadas instâncias de pequeno porte baseadas em dados reais, para as quais se conseguiu soluções ótimas.

Das duas inequações testadas as inequações propostas por Miller, Tucker e Zemlim (MTZ), modelo F1, forneceu resultados com tempos muito inferiores aos tempos obtidos pela estratégia F2 em todas as 28 instâncias testadas.

O modelo F1 consegue em média tempos 84,5% menores que a estratégia F2. Os tempos mínimo e máximo de solução do modelo F1 são, respectivamente, 1 e 14,4 segundos, enquanto da estratégia F2 são 6 e 1392 segundos, respectivamente. O maior tempo de solução em ambos os modelos foi obtido na solução da instância E4. Nota-se, uma diferença de mais de 1300 segundos.

Dado o bom desempenho do modelo F1 pretende-se como perspectiva futura testar instâncias de diferentes dimensões, incluindo exemplares realistas de empresas, para os quais é difícil obter soluções ótimas em tempos aceitáveis. Além, de serem pesquisadas outras inequações de eliminação de *subtour*.

Agradecimentos: Os autores agradecem à FAPESP e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Referências bibliográficas

Almada-Lobo, B., Klabjan, D., Carravilla, M.A., Oliveira, J.F. (2007) Single machine multi-product capacitated lot sizing with sequence-dependent setups, *International Journal of Production Research* 45, 20, 4873-4894.

Araújo, S. A., Arenales, M. N. e Clark, A. R. (2008) Lot-Sizing and Furnace Scheduling in Small Foundries, Computers and Operations Research, 35, 916 - 932.

Drexl, A., A. Kimms. "Lot sizing and scheduling - Survey and extensions." *European Journal Of Operational Research* 00, no. 97 (1997): 221-235.

Ferreira, D., Morabito, R. e Rangel, S. (2008), Um modelo de otimização inteira mista e heurísticas relax and fix para a programação da produção de fábricas de refrigerantes de pequeno porte, Produção, 18, 1, 76-88.

Ferreira, D., Morabito, R. e Rangel, S. (2009), Solution approaches for the soft drink integrated production lot sizing and scheduling problem, European Journal of Operational Research, 196 (2), 697-706.

Ferreira, D., Almada-Lobo, B., Morabito, R., (2010) Modelagem do problema de programação de bebidas baseado em um modelo do tipo ATSP, 42 Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Bento Gonçalves, RS.

Fleischmann, B. e **Meyr. H.** (1997) The general lotsizing and scheduling problem, *OR Spektrum*, 19, 11-21.

Fourer, R., Gay, M. D., e Kernighan, B. W., (1993) *AMPL - A Modeling Language for Mathematical Programming*, The Scientific Press, Danvers, Massachusetts.

ILOG (2006) Using the CPLEX Callable Library, Copyright, ILOG.

Koçlar, A. The general lot sizing and scheduling problem with sequence dependent changeovers, *Mathematical Programming*, Middle East Technical University, 2005.

Lawler, E., J. Lenstra, A. Kan, D. Shmoys. (1992). *The Traveling Salesman Problem*. John Wiley and Sons, New York.

Luche, J. R., Morabito, R., e Pureza, V., (2008) Combining process selection and lot sizing models for production scheduling of electrofused grains, aceito para publicação no Asia-Pacific Journal of Operational Research.

Menezes A. A., Clark A. R., Almada-Lobo B., (2011) *Capacitated Lotsizing and Scheduling with Sequence-dependent, Period Overlapping and Non Triangular Setups*, Journal of Scheduling, 209-219.

Sherali, H. D., and P.J. Driscoll. (2002) On tightening the relaxations of miller-tucker-zemlin formulations for asymmetric traveling salesman problems, *Operations Research*, 50, 4, 656-669.

Toledo, C. F. M., França, P. M., Morabito, R. e Kimms, A. (2007), Um Modelo de Otimização para o Problema Integrado de Dimensionamento de Lotes e Programação da Produção em Fábrica de Refrigerantes, *Pesquisa Operacional*, 27, 155-186.

Toledo, C. F. M., França, P. M., Morabito e R., Kimms, A. (2008), Multi-population genetic algorithm to solve the synchronized and integrated two-level lot sizing and scheduling problem. *International Journal of Production Research*, 1-23. doi: 10.1080/00207540701675833

Toso, E.V, Morabito, R., e Clark, A. R. (2009) Lot sizing and sequencing optimization at an animal-feed plant, Computers & Industrial Engineering, doi:10.1016/j.cie.2009.02.011.

Zhu, X. Y., Wilhelm, W. E. (2006) Scheduling and lot sizing with sequence-dependent setup: a literature review. *IIE Transactions*, 38(11), 987–1007.