b-coloração e b-continuidade em grafos

Lucas Pierezan
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Curso de Matemática Aplicada – Instituto de Matemática
Curso de Mestrado em Engenharia de Sistemas e Computação – COPPE
lucas.pierezan@gmail.com

Márcia R. Cerioli
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática e COPPE Sistemas
cerioli@cos.ufrj.br

Resumo

Uma b-coloração de um grafo G é uma coloração dos vértices de G em que cada classe de cor tem um vértice que é adjacente a pelo menos um vértice de cada uma das outras cores. O número b-cromático de um grafo G é o maior k tal que G admite uma b-coloração com k cores enquanto que G é b-contínuo se tem b-coloração com k cores para todo k, variando entre o número cromático e o número b-cromático de G. Neste trabalho estudamos em detalhes os resultados existentes referentes a b-coloração e b-continuidade em grafos em geral, e também em classes restritas. Nossa contribuição é um algoritmo polinomial para o problema do número b-cromático em grafos com cintura grande e mostramos valer a propriedade de b-continuidade para novas classes de grafos, entre elas, a dos grafos periplanares e bipartidos distância hereditários. Trabalho desenvolvido na UFRJ com bolsa de Iniciação Científica da Faperj.

Palavras-chave: Classes de grafos. b-coloração. b-continuidade.
Área Principal: Teoria e Algoritmos em Grafos

Abstract

A b-colouring of a graph G is a colouring of the vertices of G such that each color class has a vertex that is adjacent to at least one vertex of each of the other colors. The b-chromatic number of a graph G is the maximum number k such that G admits a b-colouring with k colours, whereas G is b-continuous if it admits a b-colouring with k colors, for all values of k ranging from its chromatic number to its b-chromatic number. In this work we study in details the known results concerning b-colouring and b-continuity for general graphs and also for restricted classes of graphs. Our contribution is a polynomial-time algorithm for determining the b-chromatic number of graphs with large girth, and we prove that the b-continuity property holds for new classes of graphs, including outerplanar and bipartite distance-hereditary. Work developed at UFRJ sponsored by a Faperj Scientific Initiation scholarship.

Keywords: Graph classes. b-colouring. b-continuity.
Main area: Graph Theory and Algorithms

1 Introdução

Coloração é um dos temas mais importantes da teoria dos grafos e diversas variações já foram propostas na literatura, cada uma delas com o objetivo de modelar com mais precisão um determinado problema real [Kubale (2004)]. Neste trabalho estudamos uma variação denominada b-coloração, introduzida em [Irving e Manlove (1999)]. A motivação inicial deste tipo de coloração vem de um processo guloso para diminuir o número de cores usadas em uma coloração.

Além desta motivação inicial, b-colorações têm se mostrado úteis nas áreas de *Clusterização* e *Data Mining*. Uma b-coloração pode ser vista como uma partição do grafo em *clusters* tal que cada *cluster* tem um *clusterhead* adjacente aos outros *clusters*. Essa propriedade é interessante para grandes sistemas distribuídos e redes, por exemplo, em [Effantin e Kheddouci (2006)] é proposto um algoritmo de roteamento em redes baseado nessa propriedade enquanto que em [Dekar e Kheddouci (2008)] é proposto um sistema de classificação de *web services* baseado em b-coloração.

Um grafo $G = (V,E)$ é determinado por seu conjunto de vértices V e de arestas E. Se $uv \in E(G)$ dizemos que u e v são *adjacentes* (ou *vizinhos*) em G. Denotamos por $N(v)$ a *vizinhança* de v, ou seja, o conjunto de vizinhos de v e $d(v) = |N(v)|$ é o *grau* de v em G. Um *caminho* P em G é uma sequência de vértices distintos $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tal que $v_i v_{i+1} \in E(G), 1 \leq i < k$. Se $k > 2$ e $v_k v_1 \in E(G)$ temos que P é um *ciclo*. A *cintura* de um grafo G, denotada por $g(G)$, é o tamanho isto é, o número de vértices, do menor ciclo de G. Uma *corda* de um ciclo é uma aresta entre vértices não consecutivos no ciclo.

Uma k-coloração de $G = (V,E)$ ou, equivalentemente, uma coloração com k cores, é uma função $c : V \to \{1,2,\ldots,k\}$ tal que $uv \in E \Rightarrow c(u) \neq c(v)$. Em outras palavras, é uma atribuição de cores (numeradas de 1 a k) aos vértices de G tal que vértices adjacentes não têm a mesma cor. O *número cromático* de G, $\chi(G)$, é o menor k para o qual existe uma k-coloração de G. Determinar o número cromático de um grafo é um problema clássico da teoria dos grafos com diversas aplicações [Kubale (2004)]. No entanto, para um grafo G qualquer, determinar $\chi(G)$ é um problema NP-difícil [Karp (1972)].

Dado um grafo G, colorido com k cores, dizemos que um vértice v é *dominante* se v é adjacente a pelo menos um vértice de cada uma das outras cores que não a sua, ou seja, $c(N(v)) = \{1,2,\ldots,k\} \setminus \{c(v)\}$. Portanto se v não é dominante, existe alguma cor $A \neq c(v)$ que não aparece em sua vizinhança e podemos trocar a cor de v para A obtendo uma nova coloração de G. Logo, se existe uma cor X tal que todos vértices com $c(v) = X$ não são dominantes, podemos suprimir a cor X da coloração, reduzindo o número de cores utilizadas. Vértices dominantes também são conhecidos como *b-vértices*.

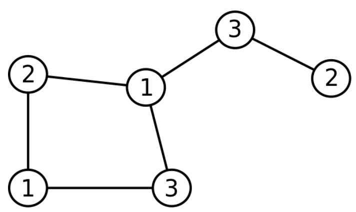

Figura 1: Coloração sem vértice dominante de cor 2.

Com esta motivação, em [Irving e Manlove (1999)] foi definida como uma b-coloração de um grafo uma coloração que não possa ser reduzida pelo processo descrito acima. Equivalentemente, uma *b-coloração* é uma coloração tal que toda cor possui pelo menos um vértice dominante. Observamos que toda coloração com $\chi(G)$ cores é uma b-coloração, caso contrário poderíamos suprimir uma cor e obter uma coloração com $\chi(G) - 1$ cores, uma contradição. O *número b-cromático*, denotado por $\chi_b(G)$, é o maior k tal que G admite uma k-b-coloração. Por exemplo, para o grafo G

ilustrado na Figura 1, temos $\chi_b(G) = 3$ pois, ele tem uma 3-b-coloração e, não tem vértices de grau 3 em número suficiente para admitir b-coloração com mais cores.

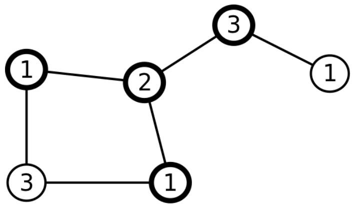

Figura 2: 3-b-coloração com vértices dominantes demarcados.

Determinar o número b-cromático de um grafo qualquer ou seja, o problema do número b-cromático, é NP-difícil [Irving e Manlove (1999)] mesmo quando restrito a classe dos grafos bipartidos [Kratochvíl et al (2002)]. Com isto, torna-se relevante o estudo deste problema para classes específicas de grafos. São conhecidos algoritmos polinomiais somente para algumas classes: árvores [Irving e Manlove (1999)], cactus com cintura maior que 4 [Campos et al (2009)], P_4-esparsos [Bonomo et al (2009)] e cúbicos [Jakovac e Jakovac (2010)].

A b-coloração, diferente da maioria das variações de coloração, não é contínua, no sentido que os valores de k tal que G admite uma k-b-coloração não necessariamente correspondem a um intervalo de inteiros. Por exemplo, sabe-se que o grafo $K_{n,n} - M$, o grafo obtido de um grafo bipartido completo $K_{n,n}$ pela remoção de um emparelhamento completo, admite k-b-coloração apenas para os valores 2 e n [Kratochvíl et al (2002)]. Assim, o grafo $K_{4,4} - M$ (Figura 3) não possui 3-b-coloração. Desta forma $\chi_b(K_{n,n} - M) = n$.

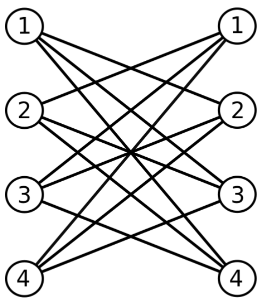

Figura 3: 4-b-coloração de $K_{4,4} - M$.

Como toda coloração mínima ($\chi(G)$-coloração) é uma b-coloração, podemos dizer que um grafo é *b-contínuo* se admite uma k-b-coloração para cada k com $\chi(G) \leq k \leq \chi_b(G)$. A propriedade de b-continuidade para uma classe de grafos torna mais tratável o desenvolvimento de algoritmos aproximativos ou heurísticas, ou mesmo algoritmos polinomiais exatos para o problema do número b-cromático na classe, como pode-se ver em [Bonomo et al (2009)]. Determinar se um grafo é b-contínuo também ajuda quando se pretende obter uma b-coloração com um valor específico. É sabido que determinar se um grafo qualquer é b-contínuo é um problema NP-completo [Barth e tal (2007)]. São poucas as classes para as quais a propriedade de b-continuidade foi provada, sendo estas os cordais [Kára et al (2004)] e cografos [Bonomo et al (2009)].

Neste trabalho estudamos detalhadamente os resultados já conhecidos sobre b-coloração e b-continuidade para grafos em geral e, em especial, para classes de grafos. Além de fazer um apanhado destes resultados, para o problema do número b-cromático desenvolvemos um algoritmo polinomial para grafos com cintura grande. Também foi feito um estudo sobre a propriedade de b-continuidade em grafos sob um enfoque de operações em grafos. Mostramos que algumas operações em grafos preservam b-continuidade e conseguimos resultados de b-continuidade para as classes de grafos periplanares e bipartidos distância hereditários.

2 Grafos com cintura grande

Nesta seção apresentamos nossos resultados sobre o problema do número b-cromático para grafos quaisquer com cintura maior que 10. Para isso vamos precisar de algumas definições básicas, algumas das quais já utilizadas na solução deste problema para árvores.

Dada uma k-b-coloração de G, temos que cada classe de cor tem um vértice dominante. Sejam eles $v_1, v_2, \cdots, v_k$. Como v_i é dominante, por definição, é adjacente a pelo menos um outro vértice de cada uma das outras cores que não a sua, logo $d(v_i) \geq k-1,\ 1 \leq i \leq k$. Concluimos que se um grafo G está b-colorido com k cores então existem k vértices com grau maior ou igual a $k-1$. Define-se como $m(G)$ o maior k tal que existem k vértices de G com grau maior ou igual a $k-1$. Da discussão anterior, observamos que se G pode ser b-colorido com k cores então $m(G) \geq k$ e portanto $\chi_b(G) \leq m(G)$. O parâmetro $m(G)$ pode ser computado eficientemente através da sequência de graus do grafo. Para tal, considerando a sequência de graus ordenada de forma decrescente, $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \cdots \geq d(v_n)$, temos que $m(G) = \max\{i \mid d(v_i) \geq i-1\}$.

O limite superior $m(G)$ vem se mostrando de grande importância para o problema do número b-cromático. Em especial, ao se mostrar que o grafo G admite uma $m(G)$-b-coloração, o número b-cromático de G fica determinado. Em [Irving e Manlove (1999)] é mostrado que se T é uma árvore, então $m(T)-1 \leq \chi_b(T) \leq m(T)$ e, além disso, $\chi_b(T) = m(T)-1$ se, e somente se, T possui uma propriedade estrutural que pode ser verificada polinomialmente. A seguir, analisamos melhor esta estrutura.

Um vértice v tal que $d(v) \geq m(G)-1$ é dito *denso* e V' denota o conjunto dos vértices densos de G. Observe que se estamos tentando b-colorir G com $m(G)$ cores os vértices em V' são os únicos elegíveis a serem dominantes pois atendem a restrição de grau. De fato, a estratégia que é usada para b-colorir G com $m(G)$ cores consiste em selecionar um subconjunto adequado W de V' de tamanho $m(G)$ e usar as cores de 1 a $m(G)$, atribuindo uma cor para cada vértice de W. Por fim, expande-se essa coloração de forma que os vértices em W se tornem os dominantes representantes de cada uma das cores de 1 a $m(G)$, obtendo assim uma b-coloração.

É fato que a escolha de um tal conjunto $W \subset V'$ dos vértices dominantes com as cores de 1 a m impõem algumas restrições nas cores que podemos atribuir ao restante do grafo. Essas restrições podem ser expressas pela relação de *alcance*. Se $u \in V \setminus W$ e $v \in W$ dizemos que *u alcança v*, $u \sim v$, se $uv \in E$ ou $uw \in E$ e $wv \in E$ para algum $w \in W$ tal que $d(w) = m(G)-1$. A ideia é que se $u \sim v$, então u não pode ter a mesma cor que v. A primeira condição vem da definição de coloração e a segunda, diz respeito ao fato de que se w é dominante e $d(w) = m(G)-1$, então não se repetem cores em $N(w)$. Se $u \in V \setminus W$ e $u \sim v$ para todo vértice v no conjunto W de vértices densos escolhido, dizemos que *W circula u*. Um conjunto W que circula algum vértice não pode ser escolhido para ser um conjunto de dominantes com as cores de 1 a $m(G)$ pois pela relação de alcance o vértice circulado ficaria sem opção de cor. Por outro lado, dado $W \subset V'$ com $|W| = m(G)$ dizemos que W é um *conjunto bom* se este não circula nenhum vértice e se $u \in V \setminus W$ e $d(u) \geq m(G)$ então $uv \in E$ para algum $v \in W$ com $d(v) = m(G)-1$.

Dizemos que um grafo G é *pivoteado* se $|V'| = m(G)$ e V' circula algum vértice. Portanto, para grafos pivoteados, temos que $\chi_b(G) < m(G)$ pois não há liberdade para escolher W que seja bom. Em [Irving e Manlove (1999)] mostra-se que se T é uma árvore pivoteada, então $\chi_b(T) = m(T)-1$ e, se T não é pivoteada, então T possui um conjunto bom.

Neste trabalho observamos que as propriedades usadas nestes resultados para árvores são locais na vizinhança dos conjuntos escolhidos, de forma que, com algumas modificações, continuam valendo se exigirmos apenas que o grafo seja localmente acíclico. Assim, provamos que:

Teorema 1. *Seja G um grafo com $g(G) \geq 8$ e V' seu conjunto de vértices densos, então G não tem conjunto bom se, e somente se, $|V'| = m(G)$ e V' circula algum vértice.*

Teorema 2. *Seja G um grafo tal que $g(G) \geq 8$. Se G não tem conjunto bom, então $\chi_b = m(G) - 1$.*

Em [Irving e Manlove (1999)] mostra-se que se T é uma árvore, a existência de um conjunto bom W de T possibilita criar uma $m(T)$-b-coloração de T transformando os vértices de W em dominantes, para todas as cores. A estratégia que é adotada consiste em extender uma pré-coloração em etapas, iniciando por $N(W)$. Novamente, exigindo apenas que o grafo seja localmente acíclico. Por meio da restrição de cintura obtivemos, com algumas modificações, um processo análogo para $m(G)$-b-colorir G se este tem cintura maior que 10, obtendo então:

Teorema 3. *Seja G um grafo tal que $g(G) \geq 11$. Se G possui um conjunto bom, então $\chi_b(G) = m(G)$.*

Teorema 4. *Se G é um grafo tal que $g(G) \geq 11$, então $m(G) - 1 \leq \chi_b(G) \leq m(G)$ e $\chi_b(G) = m(G) - 1$ se, e somente se, G é pivoteado.*

Dessa forma generalizamos o resultado conhecido de árvores para grafos com cintura maior que 10. As demonstrações dos teoremas aqui apresentados são todas construtivas de forma que dão origem a algoritmos polinomiais não só para determinar o número b-cromático do grafo como também para obter uma b-coloração com este valor.

3 b-continuidade

Lembramos que um grafo G é b-contínuo se possui uma k-b-coloração para cada k, $\chi(G) \leq k \leq \chi_b(G)$. Até o momento, poucas classes de grafos foram provadas serem b-contínuas e existem poucos resultados gerais sobre o tema. Com isso em mente, fizemos uma análise da propriedade de b-continuidade sob o enfoque de operações em grafos. Dado que grafos bipartidos não são b-contínuos [Kratochvíl et al (2002)], também estudamos restrições que podem ser impostas nesta classe de forma a obter grafos b-contínuos.

Para entender a motivação dos resultados obtidos nesse trabalho precisamos conhecer as duas principais classes de grafos que se sabem ser b-contínuas: cografos [Bonomo et al (2009)] e cordais [Kára et al (2004)].

Dados dois grafos disjuntos G e H, o *join* de G e H é o grafo $W = G \wedge H$ tal que $V(W) = V(G) \cup V(H)$ e $E(W) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv \mid u \in V(G), v \in V(H)\}$ e a *união* de G e H é o grafo $W = G \cup H$ tal que $V(W) = V(G) \cup V(H)$ e $E(W) = E(G) \cup E(H)$. Dizemos que G é um *cografo* se $|V(G)| = 1$ ou se G pode ser obtido através do *join* ou união de dois cografos.

Um grafo G é dito *cordal* se todo ciclo de tamanho maior ou igual a 4 tem uma corda. Grafos cordais também podem ser definidos em termos de vértices simpliciais. Um vértice $v \in V(G)$ é *simplicial* quando sua vizinhança é uma clique, ou seja, $uw \in E(G)$ para todos os vértices u e w na vizinhança de v. É sabido que grafos cordais possuem uma ordenação $v_1, v_2, \cdots, v_n$ de seus vértices tal que, para todo i, o vértice v_i é simplicial no subgrafo obtido de G desconsiderando-se todos os vértices v_j com $j > i$.

A estratégia adotada em [Bonomo et al (2009)] para mostrar que cografos são b-contínuos consiste na demonstração de que as operações de *join* e união preservam a b-continuidade, no sentido que, se G e H são b-contínuos $G \wedge H$ e $G \cup H$ também o são. Já em [Kára et al (2004)] observamos uma outra abordagem, onde é mostrado que grafos cordais são b-contínuos utilizando-se a ordenação de simpliciais. Entendemos que resultados em termos de operações que preservam b-continuidade são ferramentas poderosas tanto para gerar grafos b-contínuos quanto para provar resultados em classes específicas de grafos. Com isso em mente, mostramos nesse trabalho o resultado mais forte de que a operação de adicionar vértice simplicial preserva b-continuidade.

Teorema 5. *Seja G um grafo e $v \in V(G)$ um vértice simplicial. Se $G - v$ é b-contínuo, então G é b-contínuo.*

Outra operação que estudamos foi a de identificação de vértices. Mais precisamente, dados dois grafos disjuntos G e H o grafo obtido através da identificação de $v \in V(G)$ com $u \in V(H)$ é o grafo W obtido fazendo-se valer $v = u$ em seus conjuntos de arestas e vértices. Provamos que essa operação preserva b-continuidade, o que pode ser expresso no seguinte teorema:

Teorema 6. *Sejam G_1 e G_2 grafos disjuntos e b-contínuos. Seja G obtido através da identificação de um vértice qualquer de G_1 com um vértice qualquer de G_2. Então G é b-contínuo.*

Este resultado se torna interessante uma vez que a operação de identificação de vértices pode ser interpretada como uma reconstrução do grafo através da "colagem" por articulações. Portanto, podemos expressa-lo de forma equivalente da seguinte forma:

Teorema 7. *Se as componentes biconexas de um grafo G são b-contínuas, então G é b-contínuo.*

Esse teorema pode auxiliar no estudo de b-continuidade para classes de grafos cujas componentes biconexas tenham uma estrutura controlada. De fato, com esse resultado, fomos capazes de provar a b-continuidade de grafos periplanares. Um grafo G é *periplanar* se é planar, isto é, pode ser desenhando no plano sem cruzamento de arestas, e de forma que todos os seus vértices estejam na face externa. Desta forma, em um grafo periplanar, cada componente biconexa ou é uma aresta ou um ciclo (possivelmente com cordas). Vale então o seguinte:

Teorema 8. *Se G é um grafo periplanar, então G é b-contínuo.*

Para provar estes e outros resultados de b-continuidade, nossa estratégia é supor que o grafo G está b-colorido com $k > \chi(G)$ cores e então mostrar que existe uma $(k-1)$-b-coloração de G. Para isso usamos como hipótese a b-continuidade de subestruturas de G. No Teorema 5, por exemplo, se G tem v como simplicial e está k-b-colorido e $k > \chi(G)$, então $|N(v)| < k-1$ o que implica que v não é dominante e, portanto, podemos retirar v sem afetar a existência de dominantes com a cor de v. Além disso, como v é simplicial, se algum dominante foi afetado em $N(v)$, após retirar v, este é o único de sua cor. Com essas observações, é possível mostrar que existe uma $(k-1)$-b-coloração em $G - v$ e, como $N(v) < k-1$, podemos expandi-la para G. As provas dos Teoremas 6 e 8 seguem esta mesma estratégia.

Outra classe de grafos considerada neste trabalho foi a dos grafos bipartidos. Esta classe é interessante uma vez que determinar seu número b-cromático é NP-difícil e tampouco são b-contínuos [Kára et al (2004)]. Procuramos então analisar restrições que podem ser feitas de forma a obter subclasses de grafos bipartidos que sejam b-contínuas. Obtivemos respostas positivas para a propriedade de distância hereditariedade, também presente em cografos.

Um grafo G é *distância hereditário* se, para qualquer subgrafo induzido conexo de G, as distâncias entre os vértices são preservadas isto é, $d(u, v)$ no subgrafo é igual a $d(u, v)$ em G. Grafos bipartidos distância hereditários são equivalentemente definidos recursivamente por operações de adição de vértice de grau 1 e de criação de vértice gêmeo falso (duplicar um vértice). Consideramos essa construção por operações, mostramos que grafos bipartidos distância hereditários são b-contínuos, obtendo o seguinte teorema, cuja prova é longa e contém várias análises de casos.

Teorema 9. *Se G é um grafo bipartido distância hereditário, então G é b-contínuo.*

As demonstrações de b-continuidade obtidas para as classes de cordais, periplanares e bipartidos distância hereditários são construtivas, de forma que dão origem a algoritmos polinomiais que são capazes de, dada uma b-coloração com k cores, determinar b-colorações para todos os valores menores que k, até atingir o número cromático.

4 Considerações finais

A maioria das provas dos resultados apresentados nesse trabalho são construtivas e dão origem a algoritmos polinomiais. No entanto, a análise detalhada da complexidade de tempo ainda está em elaboração e, talvez, seja possível otimizá-los.

No que diz respeito ao problema do número b-cromático para grafos com cintura maior que 10, não se sabe se o resultado obtido também se aplica para grafos com cintura maior que 9 pois, até o momento, não se conhecem contra-exemplos.

Já no estudo de b-continuidade esperamos utilizar os resultados obtidos com a abordagem de operações em grafos para resolver o problema em novas classes de grafos, pois a existência de algoritmos aproximativos para o problema do número b-cromático só poderá acontecer se a classe tiver esta propriedade. O problema de determinar se a classe de grafos distância hereditários são b-contínuos, aqui parcialmente resolvido, está proposto em [Bonomo et al (2009)].

Referências

[Barth e tal (2007)] **Barth, D., Cohen, J. e Faik, T.** (2007), On the b-continuity property of graphs, *Discrete Applied Mathematics*, 155: 1761 - 1768.

[Bonomo et al (2009)] **Bonomo, F., Duran, G., Maffray, F., Marenco, J. e Valencia-Pabon, M.** (2009), On the b-coloring of cographs and P_4-sparse graphs, *Graphs and Combinatorics*, 25: 153 – 167.

[Campos et al (2009)] **Campos, V., Sales, C. L., Maffray, F. e Silva, A.** (2009), b-chromatic number of cacti, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 35: 281 - 286.

[Dekar e Kheddouci (2008)] **Dekar, L. e Kheddouci, H.** (2008), A graph b-coloring based method for composition-oriented web services classification, *Lecture Notes in Computer Science*, 4994: 599 - 604.

[Effantin e Kheddouci (2006)] **Effantin, B. e Kheddouci, H.** (2006), A Distributed algorithm for a b-coloring of a graph, *Lecture Notes in Computer Science*, 4330: 430 - 438.

[Irving e Manlove (1999)] **Irving, R. W. e Manlove, D. F.** (1999), The b-chromatic number of a graph, *Discrete Applied Mathematics*, 91: 127 - 141.

[Jakovac e Jakovac (2010)] **Jakovac, M. e Jakovac, S.** (2010), The b-chromatic number of cubic graphs, *Graphs and Combinatorics*, 26: 107 - 118.

[Kára et al (2004)] **Kára, J., Kratochvíl, J. e Voigt, M.** b-continuity, Technical Report M 14/04, Technical University Ilmenau, Alemanha, 2004.

[Karp (1972)] **Karp, R. M.** Reducibility among combinatorial problems, em R.E. Miller e J.W. Thatcher (Eds.), *Complexity of Computer Computations*, Plenum, 85-103, 1972.

[Kratochvíl et al (2002)] **Kratochvíl, J., Tuza, Z. e Voigt, M.** (2002), On the b-chromatic number of graphs, *Lecture Notes in Computer Science*, 2573: 310 - 320.

[Kubale (2004)] **Kubale, M.** *Graph Colorings*, American Mathematical Society, 2004.