APLICAÇÕES DO PROCESSO DE QUASE-NASCIMENTO-E-MORTE EM SISTEMAS DE PRODUÇÃO

Marcus Vinicius da Silva Sales
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro – UENF
Av. Alberto Lamego, 2000, LEPROD/P5, Pq. Califórnia – Campos dos Goytacazes-RJ
mf.sales@hotmail.com

Gudelia Morales
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro – UENF
Av. Alberto Lamego, 2000, LEPROD/P5, Pq. Califórnia – Campos dos Goytacazes-RJ
gudelia@uenf.br

RESUMO

Neste trabalho é apresentada uma revisão da literatura voltada para os estoques de peças de reposição reparáveis e seus métodos para a tomada de decisão que estabelecem a quantidade necessária de estoque em armazém. Nesta revisão foram encontradas diferentes ferramentas que auxiliam a tomada de decisão do número estimado de tais peças, que garantam a continuidade de um processo produtivo. Levando em consideração as características de peças de reposição, se faz necessário o uso de modelos que incorporem a aleatoriedade na definição confiável do tamanho dos estoques. O processo estudado é uma extensão do processo de nascimento e morte conhecido como processo de quase nascimento e morte, (QBD – *Quasi-Brith-and-Death process*). Utilizando a potencialidade deste processo se apresenta modelagens em sistemas produtivos, chegando a um algoritmo capaz de estimar a quantidade de peças de reposição com uma confiabilidade especificada. Apresentam-se um código, em ambiente *Scilab 5.2.2*, construído e rodado para testar numericamente o algoritmo, utilizando dados acadêmicos presentes na literatura com resultados satisfatórios para a pesquisa.

PALAVARAS CHAVE. Peças sobressalentes reparáveis, Estimativa de Estoque, Processos Estocásticos aplicados.

ABSTRACT

This paper presents a literature review focused on stocks of spare parts to repair and methods for making decisions establishing the required amount of stock in the warehouse. This review found several tools that assist decision making in the estimated number of such pieces, which ensure the continuity of a production process. Taking into account the characteristics of spare parts, it is necessary to use models that incorporate the randomness in the reliable definition of the size of stocks. The process studied is an extension of the process of birth and death process known as quasi birth and death (QBD - Quasi-Birth-and-Death process). Using the potential of this modeling process is presented in productive systems, reaching an algorithm capable of estimating the amount of spare parts with a specified reliability. We present a code in Scilab 5.2.2 environment, built and run to test the numerical algorithm, using academic data in the literature with satisfactory results for the search.

KEYWORDS. Repairable spares, Inventory Estimation, Stochastic Processes applied.

1. Introdução

A primeira década do século XXI caracterizou-se pela turbulência econômica e os efeitos de crise financeira globais; pelo desenvolvimento da tecnologia de informação e comunicação e pelo aumento da participação desta tecnologia na gestão de negócios, aumentando a concorrência e competitividade entre empresas nos mercados em diferentes locais do mundo. A acirrada competitividade tem levado o mercado a buscar excelência na qualidade e na redução de custos, garantia de prazos na distribuição e melhoria do nível de serviço (NEVES, 2000).

Atualmente, uma das formas que as empresas encontram para obter vantagens competitivas no mercado é por meio de uma gestão eficiente da cadeia de suprimentos. Segundo Ballou (2006), a qualidade no atendimento ao cliente está cada vez mais evidente, principalmente na redução de custos do processo logístico, garantindo assim grandes oportunidades de negócios.

Um aspecto fundamental da logística é a gestão de estoque, em especial, os de peças de reposição (ou peças sobressalentes). Normalmente a gestão destes itens é complexa, porque têm como características demandas baixas e irregulares, o retorno a pedidos de fornecimento, para reposição, pode tomar longos períodos de tempo (vários meses), e o custo de aquisição, por unidade de item, é geralmente alto. O que se percebe é que uma tomada de decisão sobre peças sobressalentes é feita de forma intuitiva, isto é, guiada pela experiência adquirida na prática e/ou apenas aplicando princípios gerais da administração de estoque.

Segundo Huiskonen (2001), o principal objetivo do gerenciamento de estoques de sobressalentes é conseguir um patamar satisfatório de nível de serviço (confiabilidade e disponibilidade) com o mínimo custo.

O presente trabalho aborda algumas metodologias de processos estocásticos buscando obter uma estimativa à quantidade em estoque de peças de reposição reparáveis. Considerando a opção de utilizar operações de reparação, em certo tipo peças sobressalentes, que resulta ser mais viável do que se fazer a substituição por uma peça nova, tanto por questões econômicas quanto por questões de tempo. Com esta alternativa operacional podem-se resgatar princípios responsabilidade ambiental diminuindo o consumo de recursos naturais. A abordagem para estimar o estoque deste tipo de peças de reposição é feita sobre a seguinte hipótese: uma peça ao ser reparada volta ao funcionamento tão bom quanto uma nova; o que evita, em uma primeira modelagem, que o sistema operacional tenha necessidade de representar níveis desse comprometimento.

Como objetivos do trabalho, pretende-se identificar modelos que utilizam ferramentas estocásticas para a definição do tamanho do estoque de peças de reposição e; estimar o tamanho ótimo do estoque de peças de reposição reparáveis. Para estes propósitos são direcionados os estudos em processos estocásticos, distribuição tipo fase e do processo de quase nascimento e morte.

O artigo esta estruturado em cinco seções. Na seguinte seção é apresentada uma revisão da literatura sobre estoques de peças de reposição expondo as metodologias utilizadas para a obtenção de resultados economicamente significativos nesses trabalhos. Na seção três encontram-se os conceitos preliminares que são fundamentais para a formulação dos modelos que serão apresentados na seção seguinte. Na seção quatro apresentam-se aplicações em sistemas de produção da metodologia processos de Quase Nascimento e Morte, uma extensão do processo de Nascimento e Morte muito usada para modelar problemas de filas. Na última seção são apresentadas as considerações finais da pesquisa.

2. Revisão de Literatura Sobre Estoque de Peças de Reposição

A seguir apresenta-se uma revisão bibliográfica das abordagens feitas no tratamento de estoques de peças de reposição recuperáveis e não recuperáveis, de onde se afirma que ainda está em desenvolvimento um método geral para a determinação do tamanho dos mesmos.

Algumas peças de reposição podem ser reparáveis na própria empresa o que pode ser uma alternativa técnica economicamente interessante. Considera-se o caso de falha de um maquinário, a peça que causou a falha é substituída por uma de reserva e é enviada para um centro de reparo interno, sendo posteriormente, uma vez recuperada, disponibilizada em estoque. Já os itens não reparáveis (descartáveis) correspondem às peças que não são nem técnica nem economicamente recuperáveis. Assim, para estes itens, em caso de falha, a peça é simplesmente descartada, (GOMES E WANKE, 2008). Com estes dois tipos de peças de reposição em foco é que se desenvolve esta revisão bibliográfica.

Koçağa (2004) estudou um sistema de serviço de peças de reposição de um grande fabricante de equipamentos para semicondutores. De acordo com o autor, a empresa tinha por objetivo fornecer peças de reposição e serviços aos clientes que a procuravam tanto por falhas de seus equipamentos, quanto para manutenções já programadas. Após levantamento histórico das demandas percebeu que as mesmas não regulares poderiam ser re-classificadas para melhorar a análise do atendimento ao cliente. Propôs então, incorporar na empresa uma política de racionamento, com duas classes de demandas diferenciadas, utilizando somente dentro do tempo de reabastecimento, seu lide-time. Construiu um modelo que assume as demandas seguindo uma distribuição de Poisson e o inventário preenchido de acordo com a política de estoques (S–1, S), onde S indica o nível máximo de estoque, isto é, tão logo o nível de estoque baixe em uma unidade solicita-se seu ressuprimento.

Wanke (2005) foram apresentadas considerações metodológicas sobre como segmentar a gestão de peças de reposição do tipo consumíveis em termos de suas características principais, consumo médio e coeficiente de variação do consumo, assumindo como base para a determinação do nível de estoque uma distribuição Gama. Assumiu que os estoques na empresa seriam repostos com base em previsões de consumo para os próximos meses, sendo todas as peças de reposição fabricadas internamente e os ciclos de produção observariam o horizonte de um mês. Formulou um modelo de segmentação para tais peças, implementado em planilhas MS-Excel utilizando o aplicativo estatístico SPSS©.

Kayano (2005) desenvolveu um trabalho que consistiu na elaboração de uma nova gestão de estoques nos centros de manutenção da Diretoria do Material da Société Nationale des Chemins de Fer Français (SNCF). O foco do trabalho foi à determinação da quantidade de peças de reposição que devem ser estocadas para garantir um nível de serviço desejado nos centros de manutenção da SNCF. Para isso o autor desenvolveu um aplicativo utilizando MS Access© capaz de calcular novos parâmetros, a saber: pontos de pedido, quantidades de abastecimento, estoques de segurança, para o dimensionamento do estoque. Para esta estimativa foi utilizada a distribuição de Poisson e a distribuição normal. No entanto, com a utilização desse aplicativo, percebeu-se que a fórmula básica que calcula o lote econômico de compras (LEC), era inadequada para o caso específico da manutenção na SNCF, pois os fluxos, além de não serem constantes durante o ano, eram bastante fracos, implicando lotes muito grande e pouco freqüente de abastecimento.

Oliveira *et al.* (2007) apresentaram um modelo de simulação para analisar o comportamento de diversos cenários ou estratégias de políticas de estoque de itens sobressalentes de baixo consumo. Assim, contribuíram para o aprimoramento do processo de tomada de decisão e na construção de políticas de estoques que visem aperfeiçoar a disponibilidade de sistemas baseados na tecnologia COTS *(Commercial Off-The-Shelf*). A disponibilidade de um sistema é entendida como a fração do tempo em que o sistema permanece em bom funcionamento. Os cenários utilizados foram definidos por diferentes políticas de decisão, como a política (s, S) onde a demanda é estocástica e está associada com os itens de movimentação lenta, com a finalidade de facilitar a análise de sensibilidade dos parâmetros e/ou fatores de entrada do problema. Uma vez que obtidos os resultados da disponibilidade das peças de reposição, realizada utilizando um planejamento de experimento de simulação com enfoque na metodologia Fatorial, os autores utilizaram o programa MINITAB para calcular o efeito de cada fator e a interação dos fatores sobre as respostas encontradas.

Kochi (2008) teve como objetivo de trabalho melhorar a política de estoque do setor de serviços pós venda de relógios de uma empresa que comercializa artigos de luxo de joalheria e relojoaria. O autor comparou o método de cálculo de estoque, usando a média ponderada, que era utilizado na empresa durante o estudo e, propôs dois outros métodos: o de suavização exponencial e a tecnica de repetições amostrais Bootstrap. O resultado indicou que os métodos propostos, através do cálculo de necessidades, foram melhores do que o utilizado pela empresa e com melhores níveis de serviço e menores custos de estocagem.

Gomes e Wanke (2008) apresentaram uma pesquisa que aborda a gestão de estoques de peças de reposição descartáveis. Neste trabalho foi feito uma comparação entre um modelo de simulação computacional convencional e um modelo por cadeias de Markov, cujo objetivo foi de determinar qual política representará o melhor momento de fazer um pedido para completar o estoque. Propôs uma heurística para determinação de dois parâmetros (nível de estoque máximo e o ponto de pedido) para a melhor política de gestão de estoques. Usou uma política tipo (S, s), em função dos itens: demanda, com distribuição Poisson, e custos pela falta, pelo excesso e pelo ressuprimento;

assumindo um *lead-time* constante equivalente a um período. A heurística desenvolvida a partir desses resultados mostrou que a aproximação da política (S, s) pela (S, S – 1), mesma política utilizada por Koçağa (2004), é satisfatória em termos dos custos totais, sobretudo quando as peças de reposição apresentam elevado custo por falta, chamado pelos autores de extrema criticidade.

Freitas (2008) objetivou por fazer um levantamento de um modelo da gestão de estoque, já legitimado pela literatura, para aplicá-lo, a realidade da refinaria estudada, nas peças sobressalentes de manutenção. O modelo proposto pelo autor foi um modelo de controle de estoque baseado no sistema (r, q), onde r é o ponto de ressuprimento, equivale ao s na política tipo (S, s), e q é a quantidade de itens para o ressuprimento. Este modelo foi utilizado, pelo autor, para tratar de problemas de otimização de estoques de sobressalentes com as premissas: possuir demandas com distribuição de Poisson e tempo de ressuprimento constante.

Silva (2009) desenvolveu um estudo sobre peças de reposição de uma grande empresa multinacional do setor de siderurgia. Nela desenvolveu uma metodologia de classificação e controle destas peças considerando demanda e *lead-time* estocásticos. Foram utilizados como premissas, nos modelos de estoques, as distribuições estatísticas de Poisson, Laplace, Gama e Normal em combinação com a otimização do custo total para a modelagem da demanda durante o lide-time e determinação do ponto de ressuprimento, quantidade de pedido e estoque de segurança. Para a geração dos valores de previsão foi implantado o método Bootstrap indicado para itens de baixa rotatividade com demanda intermitente, WILLEMAIN *et. al* (2004).

Drohomeretski et al. (2009) propuseram um modelo de gestão de estoque de peças de reposição não reparáveis, para uma empresa que produz equipamentos de refrigeração para todo o país. O modelo está baseado no método de revisão periódica e classificação ABC, abordando a dependência entre a demanda das peças sobressalentes e a dos produtos acabados com garantia de assistência pós venda. Para criar o modelo apropriado, no estudo de caso em questão, os autores utilizaram históricos de consumo das peças de reposição dos equipamentos, que ainda estão em garantia. Usou como premissa a revisão destes itens feita mensalmente e a partir de dados históricos foi possível estimar a distribuição normal da demanda. O modelo apresentou boa capacidade para adaptar-se a mudanças de demanda de produtos acabados e do consumo de peças de reposição.

Nos trabalhos acima se ressalta a importância da utilização de métodos adequados que se mostraram eficientes para a resolução do problema em estudo, estoques de peças de reposição. Os métodos utilizados foram uma combinação de classificação, simulação com funções de distribuição diferentes, à exponencial, decididas por cada autor como consequência da especificidade do problema abordado, garantindo bom desempenho dentro da pesquisa desenvolvida.

As funções de distribuição utilizadas foram a de Poisson, Gama, Normal, Erlang e Laplace como relatado pelos autores Koçağa (2004), Wanke (2005), Kochi (2008) e Silva (2009). No entanto, pesquisadores como Gomes e Wanke (2008) apresentam uma metodologia baseada em processos markovianos, utilizando as cadeias de Markov, mostrando que há necessidades de novos direcionamentos e uso de ferramentas diferentes das clássicas para ajustar melhor os resultados.

A seguir são referidos os artigos sobre a metodologia chamada processos de Quase Nascimento e Morte (*Quasi-Birth-and-Death process*, QBD), que consegue representar estágios intermediários. Esta metodologia também é utilizada para a modelagem do gerenciamento de estoques, e é entendida como uma extensão dos processos de Nascimento e Morte usada no estudo de peças de reposição que sejam reparáveis. Esta abordagem será apresentada com mais detalhe na seção 3.

Fadiloglu e Yeralan (2002) utilizam a metodologia processo QBD para a modelagem de processos de linha de produção considerando que estes são processos representados por sistemas de fila. Os sistemas de fila, no texto, evoluem (ficam mais reais) a cada modelo apresentado pelos autores. O mais simples dos modelos é representado pelo modelo de fila *M/M/*1, estendendo para casos onde se inclui dois servidores com chegadas exponenciais, *buffer* intermediários, avaria e reparação, entre outros. Cada modelo foi primeiramente apresentado, usando um diagrama de rede e após a visualização da rede são incluídos equações de balanço que definem o processo. A partir das equações de balanço é possível identificar cada sub-matriz dos estados de transição do sistema. A definição das equações de balanço encontra-se no tópico Processos de Nascimento e Morte.

No trabalho de Pérez-Ocóna e Monoto-Cazorla (2004), considera-se que um sistema opera com *n* unidades e que destas apenas uma é suficiente para manter o sistema em funcionamento, casos as outras estejam no reparo ou na fila para a reparação. Sendo assim, uma vez que esta unidade sofre

uma avaria e não se tem mais nenhuma outra para a substituição, pelos motivos anteriores, o sistema inteiro entra no estado de falha. Para que este estado seja minimizado, os autores realizam cálculos para a determinação dos vetores de probabilidade estacionária e as medidas de desempenho considerando termos de confiabilidade. Os cálculos envolvidos tomam em consideração que o tempo operacional e o tempo de reparo das unidades seguem uma distribuição tipo Fase (PH) contínua e que o sistema é governado por um processo QBD. As medidas de desempenho que os autores determinam são a disponibilidade e a taxa de ocorrência de falhas.

Huang *et al*. (2006) desenvolvem um modelo geral para demanda de peças de reposição reparáveis baseados em um processo QBD. No modelo é assumido que tanto o tempo operacional quanto o tempo de reparação também seguem uma distribuição PH de tempo continuo assim como em Pérez-Ocóna e Monoto-Cazorla, (2004). De acordo com os autores, operações matriciais podem ser implementadas eficientemente fornecendo melhores resultados na aplicação. Os autores constroem um algoritmo que determina a quantidade mínima necessária de peças de reposição a serem adquirida para que o sistema não fique inoperante.

Ao analisar os trabalhos apresentados, percebe-se que a metodologia que mais ajusta os resultados para determinação do tamanho do estoque de peças de reposição é a utilizada nestes três últimos trabalhos, o processo QBD. Diante desta verificação desenvolve-se o presente artigo.

3. Conceitos Preliminares

3.1. Distribuição Tipo Fase (PH)

Definição 1: Uma distribuição de tipo Fase (distribuição PH) será representada por $H(\cdot)$ no intervalo $[0,\infty[$ com parâmetros $(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{T})$, dada por

$$H(x) = 1 - \boldsymbol{\alpha}\exp(\mathbf{T}x)\mathbf{e},\ \ x \geq 0.$$

Onde $\boldsymbol{\alpha}$ é um vetor linha de dimensão m; $\mathbf{T}$ é uma matriz de ordem m não singular e $\mathbf{e}$ um vetor coluna onde todas as componentes são iguais a *1,* (PÉREZ-OCÓN & MONTORO-GAZORLA, 2004 e HUANG *et al.* 2006).

A exponencial de uma matriz resulta ser uma nova matriz da mesma ordem, obtida como o limite de uma série de potências, da própria matriz, convergente. Ver detalhes no Anexo II.

A distribuição PH é entendida como a distribuição do tempo até a absorção em um processo de Markov em tempo contínuo com um número finito de estados. Os parâmetros $(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{T})$ se decompõem em um vetor de probabilidade inicial $\boldsymbol{\alpha}$ e a matriz $\mathbf{T}$ construirá o gerador do processo markoviano

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{T}^0 \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix},$$

sendo o vetor $\mathbf{T}^0 = -\mathbf{Te}$ cujas componente são não negativas e $\mathbf{e}$ denota um vetor coluna com todas entradas de 1's.

3.2. Operações de Kronecker

3.2.1. Produto Kronecker

Definição 2: Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes retangulares de dimensões $k_1 \times k_2$ e $k_1^{'} \times k_2^{'}$, respectivamente, o produto de Kronecker $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ é definido como

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = [A_{ij}\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} A_{11}\mathbf{B} & \Lambda & A_{1k_2}\mathbf{B} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} \\ A_{k_1 1}\mathbf{B} & \Lambda & A_{\mathbf{k_1 k_2}}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ é uma matriz de dimensões $k_1 k_1^{'} \times k_2 k_2^{'}$, e escrita na forma compacta $(A_{ij}\mathbf{B})$.

3.2.2. Soma de Kronecker

Definição 3: Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes quadradas de dimensões $m \times m$ e $n \times n$, respectivamente, a soma de Kronecker de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$, é a matriz de dimensão $mn \times mn$, escrita como

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n + \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{B}$$

onde $\mathbf{I}_n$ e $\mathbf{I}_m$ são matrizes identidades de ordem n e m, respectivamente.

Uma propriedade funcional desta soma é a seguinte igualdade das matrizes

$$\exp(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) = \exp(\mathbf{A}) \otimes \exp(\mathbf{B})$$

3.3. Processo de Quase Nascimento e Morte (QBD)

Definição 4: Considere um processo de Markov com espaço de estado de duas dimensões: $E = \{(i, j) : i \geq 0;\ j = 1, 2, ..., m\}$, referindo-se, por exemplo, ao nível *n* o conjunto de estados escrito por extenso $\{(n,1),(n,2),...,(n,m)\}$. Tal processo de Markov é chamado de processo quase nascimento e morte (QBD) quando as transições de um passo são limitadas aos estados de mesmo nível ou nos dois níveis adjacentes, (HUANG *et al.* 2006).

Para o processo QBD, os estados são ordenados lexicograficamente, isto é,

$$\{(0,1),...,(0,m),(1,1),...,(1,m),...,(n,1),...,(n,m)\}$$

e o gerador infinitesimal *Q,* de forma genérica, tem a seguinte estrutura de blocos:

$$Q = \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & & & & \\ B_{10} & A_1 & A_0 & & & \\ & A_2 & A_1 & A_0 & & \\ & & A_2 & A_1 & A_0 & \Lambda \\ & & & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ & & & & & \end{bmatrix}.$$

Onde as sub-matrizes B_{00} e A_1 denotam as transições entre os estados de mesmo nível *i*; as sub-matrizes B_{01} e A_0 denotam as transições entre os níveis *i* e *i* + 1; e finalmente as sub-matrizes B_{10} e A_2 denotam as transições entre os níveis *i* + 1 e *i*.

Desta disposição podemos visualizar as chamadas equações de balanço

$$B_{00}\mathbf{e} + B_{01}\mathbf{e} = B_{10}\mathbf{e} + A_1\mathbf{e} + A_0\mathbf{e} = A_2\mathbf{e} + A_1\mathbf{e} + A_0\mathbf{e} = 0,$$

onde $B_{00}, B_{01}, B_{10}, A_2, A_1$ e A_0 são submatrizes descrevendo cada estado do sistema e **e** o vetor de componentes 1's.. Este gerador é assumido ser irredutível, (adaptado de PÉREZ-OCÓN E MONTORO-GAZORLA, 2004).

4. Aplicações do Processo QBD

4.1. Modelo de um Processo de Produção com um Servidor

Nesta subseção é apresentado o modelo de Fadiloglu e Yeralan (2002) onde se aplica o processo QBD, um processo de Markov em tempo continuo, que possui estados finitos $E = \{(i, j),\ 0 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$, com as taxas de transição formando a matriz de blocos tri-diagonal Q, das equações de balanço, chamada em geral de gerador infinitesimal, dada por:

$$Q = \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & & & & \\ B_{10} & A_1 & A_0 & & & \\ & A_2 & A_1 & A_0 & & \\ & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & & \\ & & A_2 & A_1 & A_0 & \\ & & & A_2 & A_1 & B_{n-1,n} \\ & & & & B_{n,n-1} & B_{n,n} \end{bmatrix}$$

onde as submatrizes satisfazem

$$B_{00}\mathbf{e} + B_{01}\mathbf{e} = B_{10}\mathbf{e} + A_1\mathbf{e} + A_0\mathbf{e} = A_2\mathbf{e} + A_1\mathbf{e} + +A_0\mathbf{e} = A_2\mathbf{e} + A_1\mathbf{e} + B_{n-1,n}\mathbf{e} = B_{n,n-1}\mathbf{e} + B_{n,n}\mathbf{e} = 0.$$

Ao todo são *n* estados do sistema e m indicadores de sub-estados possíveis em cada estado. Os modelos de filas a seguir, diagramados, mostram a versatilidade do processo QBD para representar uma linha de produção.

A representação gráfica do modelo de um servidor definido por distribuição exponencial com buffer limitado é dada na Figura 1, que mostra um modelo de fila típico *M/M*/1. A única diferença do modelo básico é a presença do *buffer* com tamanho limitado, *M*. Neste modelo, as peças chegam ao servidor como um processo de Poisson com uma taxa média λ, e eles são atendidos com o tempo de serviço exponencial de parâmetro μ.

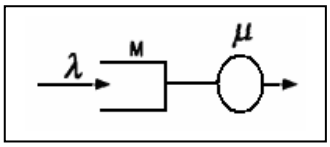

Figura 1 – Servidor com buffer limitado e parâmetros relevantes: Fadiloglu e Yeralan (2002).

Na Figura 2, apresenta-se o diagrama da cadeia de Markov utilizando a descrição do Modelo 1. Desta maneira facilita-se a obtenção das equações de estado estacionário, ou de balanço, do modelo.

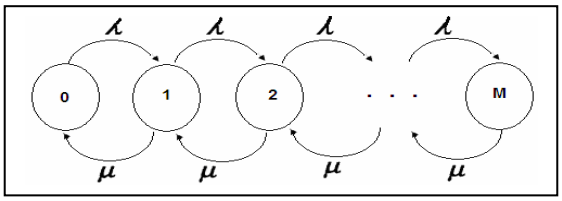

Figura 2 – Diagrama de transição de Markov para o Modelo 1: Fadiloglu e Yeralan (2002).

As equações de balanço pertinentes ao modelo são dadas a seguir.

$$-\lambda P(0) + \mu P(1) = 0,$$

$$-(\lambda+\mu)P(i) + \mu P(i+1) + \lambda P(i-1) = 0, \text{ para todo } 1 \le i \le M-1,$$

$$-\mu P(M) + \lambda P(M-1) = 0$$

e os valores específicos das submatrizes de transição, em um estado, dadas pelo sistema de equações são visualizadas na matriz de blocos Q a seguir:

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & & & & & \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & & & \\ & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & & \\ & & & \text{O} & & & \\ & & & & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ & & & & & \mu & -\mu \end{bmatrix},$$

e definidas da seguinte forma de acordo com as matrizes apresentadas anteriormente:

$$B_{00} = -\lambda,\ B_{01} = A_0 = B_{n-1,n} = \lambda,\ B_{10} = A_2 = B_{n,n-1} = \mu,\ A_1 = -(\lambda+\mu),\ B_{n,n} = -\mu$$

4.2. Exemplo do Cálculo de um Gerador Infinitesimal Q

Outro trabalho bastante relevante para o desenvolvimento desse artigo é o de Pérez-Ocón e Montoro-Gazorla (2004). Prévias deste trabalho já foram mencionadas na seção de revisão de literatura. No exemplo acadêmico, a seguir, os autores trabalham com os seguintes parâmetros de entrada:

- $\alpha = (1,0,0)$ → vetor linha de probabilidade inicial de tamanho m indicando as m fases operacionais;
- $\beta = (1,0,0)$ → vetor linha de probabilidade inicial de tamanho k indicando as k fases de reparação;
- $T = \begin{bmatrix} -0.0027 & 0.0027 & 0 \\ 0 & -0.008 & 0.008 \\ 0 & 0 & -0.02878 \end{bmatrix}$ → matriz de ordem m, não singular com elementos da

diagonal negativos e fora da diagonal todos positivos que governa o tempo operacional.

- $S = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.02 & 0 \\ 0.01 & -0.08 & 0.07 \\ 0.005 & 0 & -0.1 \end{bmatrix}$ → matriz de ordem k, que governa o tempo de reparação.

Neste exemplo considera-se que $m = k = 3$ e que os parâmetros apresentados são suficientes para a construção da matriz chamada de gerador infinitesimal Q, também apresentada na subseção 4.1, e que pela sua estrutura é muito conveniente para a resolução do problema.

Os blocos da matriz Q são vistos a seguir:

$$B_{00} = T,\ B_{01} = T^0\alpha \otimes \beta,\ B_{10} = I \otimes S^0,\ A_1 = T \oplus S,$$

$$A_0 = T^0\alpha \otimes I,\ A_2 = I \otimes S^0\beta,\ B_{n-1,n} = T^0 \otimes I,\ B_{n,n-1} = S^0\alpha \otimes \beta,\ B_{n,n} = S,$$

onde I é a matriz identidade de ordem 3×3, e T^0 e S^0 são calculados da seguinte maneira: $-T\mathbf{e} = T^0 \geq 0$ e $-S\mathbf{e} = S^0 \geq 0$, em que **e** denota um vetor coluna com todas entradas de 1's.

Pelas propriedades das operações de Kronecker tem-se que todas a matrizes A_i são de ordem 9 x 9, a matriz B_{01} é de ordem 3 x 9 e a matriz B_{10} é de ordem 9 x 3.

Ao efetuar os cálculos os autores chegaram aos seguintes resultados para o caso de finitas peças de reposição:

➢ Considerando 3 unidades sobressalentes:

1. Os vetores de probabilidade estacionária são:

$\pi_0 = (0.558, 0.218, 0.062)$

$\pi_1 = (0.096, 0.023, 0{,}016, 0{,}011, 0.003, 0.003, 0.002, 0.001, 0.001)$

$\pi_2 = (0.003, 0.001, 0.001, 0.0004, *, *, *, *, *)$

$\pi_3 = (0.0001, *, *)$

2. A medida de confiabilidade neste processo é A = 0.9998, ou seja, o sistema encontra-se operacional por um longo tempo.
3. A taxa de ocorrência de falha por unidade: $v = 0.19\%$.

➢ Considerando 5 unidades sobressalentes:

1. Os vetores de probabilidade estacionária são:

$\pi_0 = (0.558, 0.218, 0.062)$

$\pi_1 = (0.096, 0.023, 0{,}016, 0{,}011, 0.003, 0.003, 0.002, 0.001, 0.001)$

$\pi_2 = (0.003, 0.001, 0.001, 0.0004, *, *, *, *, *)$

Todos os outros vetores π_3, π_4 e π_5 apresentam valores $\leq 10^{-4}$.

2. A medida de confiabilidade neste processo é $A \cong 1$;
3. A taxa de ocorrência de falha por unidade: $v = 0{,}19\%$.

Percebe-se nestes resultados que os vetores de probabilidade estacionária são praticamente os mesmos, levando a acreditar que o sistema está próximo de se tornar estável desde que foi considerado 3 peças sobressalentes. Como resultados finais, Pérez-Ocón e Montoro-Gazorla (2004) mostram que o sistema analisado encontra-se operando por um período longo de 2.6348 x 10^8 unidades de tempo, considerando que sempre terá pelo menos uma unidade (máquina) em espera fria. Em contra partida, o sistema trabalha por 64.0832 unidades de tempo quando o sistema está em baixa, ou seja, quando não existem mais peças em espera fria.

4.3. Algoritmo Para o Tamanho de Estoque

Os autores, Huang *et al.* (2006), usam os mesmos parâmetros que Pérez-Ocón e Montoro-Gazorla (2004) utilizaram em seu trabalho. Seu o objetivo desses autores é descobrir a quantidade mínima de peças de reposição necessárias para se trabalhar com um grau de confiabilidade não menor do que 95% durante um tempo de excussão t = 1500 horas. Para tal feito, os autores desenvolveram um algoritmo que realizasse o cálculo para esse objetivo.

Antes de apresentar o pseudocódigo do algoritmo é válido ressaltar um teorema que está fortemente ligado ao mesmo.

Teorema. Suponha que, para garantir uma provisão de peças de reposição com uma probabilidade não inferior a P durante um período t, h reposições devem ser preparadas pelo menos. L, t e P satisfazem a desigualdade $\gamma \exp(Lt)\mathbf{e} > P$, onde L é uma matriz de macro-estado de dimensão h + 1, e $\gamma = (\alpha,0,0,...,0)_{(1\times(h+1))}$, e $\mathbf{e}$ vetor coluna de 1's.

A prova do teorema anterior está disposta em Huang *et al.* (2006). A seguir é apresentado o pseudocódigo de um algoritmo, construído por estes, que calcula a demanda do menor número de peças de reposição sujeita a restrição de confiabilidade, assegurado por uma probabilidade não inferior a P e executado durante um periodo t .

Algoritmo de HUANG-LIANG-GUO:

Passo 1: Seja $h = 0, L = B_{00}, \gamma = \alpha$, calcular $\gamma \exp(Lt)\mathbf{e}$. Se $\gamma \exp(Lt)\mathbf{e} > P$ então não necessita de nenhuma reposição e o algoritmo termina, caso contrário vai para o passo 2.

Passo 2: Seja $h = 1.L = \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & A_1 \end{bmatrix}, \gamma = (\alpha,0)$, calcular $\gamma \exp(Lt)\mathbf{e}$. Se $\gamma \exp(Lt)\mathbf{e} > P$ então se necessita de uma reposição e o algoritmo termina, caso contrário vai para o passo 3.

Passo 3: Seja $h = h+1, L = L + \begin{bmatrix} 0 & ... & 0 & 0 \\ \mathrm{M} & \mathrm{O} & \mathrm{M} & \mathrm{M} \\ 0 & \Lambda & 0 & A_0 \\ 0 & \Lambda & A_2 & A_1 \end{bmatrix}_{(h+1)\times(h+1)}, \gamma = (\alpha,0,...,0)_{1\times(h+1)}$. Calcular $\gamma \exp(Lt)\mathbf{e}$. Se $> P$ então se necessita de h reposições e o algoritmo termina, caso contrário execute o passo 3 novamente.

A análise do número mínimo de peças de reposição que satisfaz a demanda é verificada a cada iteração e determinada pelo parâmetro h. A matriz L é uma matriz que se renova a cada iteração. Inicialmente essa tem os mesmos componentes da matriz de tempo operacional T, no entanto, a cada rodada a matriz L vai se conformando a necessidade dos cálculos, aumentando o número de blocos de linhas e colunas em um, se configurando em uma matriz de blocos tri-diagonal. E para garantir que o número de peças de reposição seja suficiente é calculada a confiabilidade do processo através da fórmula $\gamma \exp(Lt)\mathbf{e}$.

Os valores numéricos gerados pelo código do algoritmo HUANG-LIANG-GUO são vistos na Figura 3.

```
Scilab Console
   E  =
    0.0290162
 E  =
    0.8979637
 E  =
    0.9966249
 Número necessário de peças de reposição

    2.

 Execução feita.
```

Figura 3– Resultados obtidos com o código do algoritmo HUANG-LIANG-GUO, rodado no Scilab.

No trabalho realizado por Huang *et al.* (2006) verifica-se que são necessária duas peças de reposição no mínimo, apresentando uma confiabilidade de 99,84% de certeza, para que o sistema funcione por um longo período sem correr o risco de falha. De acordo com os autores, este resultado foi obtido através do ambiente MATLAB. Para a implementação do código desse artigo foi utilizado o ambiente Scilab 5.2.2, em um notebook *STI* processador Pentium T4400, confirmando que o número

mínimo de peças necessárias para este sistema é realmente de duas, com uma confiabilidade alta.

Os valores de E na Figura 3 são os valores probabilidade do sistema permanecer em funcionamento, sem correr risco de entrar no estado de falha, a cada iteração. O 1º valor de E é para quando não se verifica a necessidade de peças de reposição em estoque, o 2º para quando necessita-se de pelo menos uma peça guardada no estoque e, o 3º e último E, apresenta a probabilidade superior a estabelecida de P=95% do código do algoritmo, desta forma as iterações são finalizadas e é impresso a quantidade de peças de reposição necessária para o sistema funcionar sem se preocupar com a falta de peças sobressalentes no estoque de reposição.

Os valores encontrados na Tabela 1 representam as probabilidades para que um sistema permaneça em funcionamento durante determinados períodos de tempo *t,* gerados pelo código do algoritmo de HUANG-LIANG-GUO. O tempo foi analisado considerando produção contínua de 24 horas diárias durante 30 dias. Desta forma, o primeiro período de tempo, analisado por Huang *et al.* (2006), representa o tempo de funcionamento de um maquinário é de 62 dias, aproximadamente 2 meses. Os outros tempos de processamento, considerados para este trabalho, equivalem a 6 e 8 meses de 24 horas de funcionamento diário.

Quantidade Estimada de peças no estoque	Valor de E com *t*=1500h	Valor de E com *t*=4320h	Valor de E com *t*=5760h
0	2.9%	0.001%	0.00003%
1	89.79%	70.59%	62.43%
2	99.66%	98.82%	98.40%
3	99.98%	99.95%	99.94%

Tabela 1 – Valores de confiabilidade (E) para que um sistema permaneça em funcionamento analisado por diferentes valores de *t.*

Na Tabela 1, no processo de 1500 horas de duração, percebe-se que, se for decidido não estocar nenhuma peça de reposição ou simplesmente optar por armazenar uma, a probabilidade de não precisar de peças é de 2.9%, muito baixa, enquanto, a de não precisar de mais de uma é de 89.79%. Também é observado que, para estes dois casos, há uma diminuição considerável à medida que o tempo de funcionamento, em avaliação, aumenta. No entanto, a diminuição entre as probabilidades, para o armazenamento de 2 ou 3 destas peças é menor, menos de 1% para cada período de tempo determinado, mostrando a estabilidade do processo. Assim, a decisão será tomada a partir da confiabilidade implementada no algoritmo estudado.

Os valores observados na tabela, nos três tempos de funcionamento, garantem que o modelo, usando um processo QBD, fornece uma boa aproximação para representar ocorrências de falhas, isto é, a necessidade de peças sobressalentes ou de reposição, validando a proposta de representação.

5. Considerações Finais

Esta pesquisa estudou estimativas do estoques de peças de reposição ou peças sobressalentes. As características das peças de reposição, tais como: baixo giro, comportamento irregular e intermitente, demanda baixa, as vezes de alto custo de aquisição e longo tempo de elaboração fazem complexa a tomada de decisão do quando e quantos destes itens são necessários a mínimo custo. Adicionando as informações incompletas e a falta de uma coleta regular delas nas empresas constatam que os métodos para estimativa deste tipo de estoque estão ainda em desenvolvimento.

Na revisão bibliográfica realizada percebeu-se que há adaptações das técnicas existentes para esta quantificação de peças de reposição, como método preliminar, para completar dados que descrevam as características destes itens, por exemplo, a segmentação, classificação ABC, a criticidade e o Bootstrap. Outro método também utilizado é a simulação, pois nem sempre as empresas dispõem de todos os dados necessários para calcular e validar um resultado, ou não tem possibilidades de obtê-los, para o caso tratado mostrou-se de conclusões eficientes para uma previsão dos estoques de peças de reposição.

Um segundo objetivo foi o estudo de modelos de processos estocásticos para representar o problema do cálculo do tamanho do estoque de peças sobressalentes reparáveis segundo o tratamento dado na teoria de confiabilidade. Assim foi iniciado o estudo do processo QBD e sua aplicação no algoritmo que estima o número de peças necessárias para garantir, com alto grau de confiabilidade, a manutenção do funcionamento de um processo produtivo. Esta se constitui numa ferramenta que modela de forma mais ajustada a previsão do tamanho do estoque de sobressalentes reparáveis. Esta estimativa depende de dois parâmetros um ligado ao tempo em que acontecerá a necessidade de uma peça de reposição (uma falha no processo produtivo) e o segundo ligado ao tempo necessário para a reparação desta peça.

O enfoque dado ao modelo, que mede o tamanho de estoque de peças de reposição, foi a de previsão da seguinte parada no processo produtivo ou previsão da seguinte falha. Na ocorrência de falha se tem a opção de substituição por uma peça nova ou uma peça reparada, sob a hipótese que a reparação deixa a peça como nova, sempre que esta esteja disponível. Considerar a possibilidade de reparação de uma peça sobressalente é uma prática de responsabilidade ambiental incorporada nos processos produtivos. Portanto, foram verificados os resultados computacionais, sobre dados acadêmicos, para a matriz infinitesimal trabalhada nos artigos Pérez-Ocon e Montoro-Gazorla (2004) e Huang *et al.* (2006), utilizando o ambiente Scilab 5.2.2.

Referências

BALLOU, Ronald H. *Gerenciamento da Cadeia de Suprimentos/Logística Empresarial.* 5ta. Edição. Porto Alegre: Bookman, 2006.

DROHOMERETSKI, E.; FALCI, F. S. M. G. e FAVARETTO, F. *Modelo de controle de estoque para peças de reposição: o caso de uma indústria de equipamentos para refrigeração da grande Curitiba.* Revista Inovação Gestão e Produção - INGEPRO, p. 104-115, 2009.

FADILOGLU, M. M. e YERALAN, S. *Models of Production Lines as Quasi-Birth-Death Processes.* Mathematical and Computer Modelling 35, p. 913-930, 2002. http://www.ie.bilkent.edu.tr/~mmurat/ProductionLinesMCM.pdf, acessado em 16 de junho de 2010.

FOGLIATTI, M. C. e MATTOS, N. M. C. *Teoria das Filas.* Rio de Janeiro: Interciência, 2007.

FREITAS, R. P.: *Controle de estoque de peças de reposição: revisão da literatura e um estudo de caso*. Dissertação (Mestre em Engenharia de Produção) – Pontifica Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-RIO, Rio de Janeiro, 2008.

GOMES, A. V. P. e WANKE, P. F. *Modelagem da gestão de estoques de peças de reposição através de cadeia de Markov.* Revista Gestão. Produção, São Carlos, v. 15, n. 1, p. 57-72, jan. - abr. 2008.

HUANG, Z.; LIANG, L. and GUO, B. *A general repairable spare part demand model based on quasi birth and death process.* March, 2006, Vol.32, Nº2.

HUISKONEN, J. *Maintenance Spare Parts Logistcs: Special Characteristics and Strategic Choices*. International Journal of Production Economics, 2001.

KAYANO, L. K. *Gestão de estoques das peças de reposição de uma empresa ferroviária.* Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia de Produção) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.

KOCHI, G. T. *Aplicação dos modelos de previsão de demanda intermitente na gestão de estoque de peças de reposição de relógios.* Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia de Produção) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

KOÇAĞA, Y. L. *Spare parts inventory management with delivery lead times and rationing.* Tese (Doutorado) – Institute of Engineering and Sciennce of Bilkent University, 2004.

NEVES, J. C. S. *Aplicação de Análise de Envoltória de Dados (DEA) para Avaliação de Fornecedores***.** Dissertação de mestrado, Instituto Militar de Engenharia, p.1, 2000.

OLIVEIRA, C. A. de; RIBEIRO, J. R.; SILVA, A. C. S. da; BELDERRAIN, M. C. N. *Gestão de estoques de peças de reposição de sistemas construidos com tecnologia COTS utilizando simulação.* Rio de Janeiro, SPOLM 2007.

PÉREZ-OCÓNA, R. and MONOTO-CAZORLA, D. *A multiple system governed by a quasi-birth-and-death process.* Reliability Engineering and System Safety, 84: 184 – 196, 2004.

RISKA, A. *Phase-Type distributions,* http://www.cs.wm.edu/~riska/PhD-thesis-html/node19.html, 2003, acessado em 26/02/2009.

SILVA, G. L. C. *Modelo de estoque para peças de reposição sujeita à demanda intermitente e lead time estocástico.* Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, Belo Horizonte, 2009.

WANKE P.F. *Metodologia para gestão de estoques de peças de reposição: um estudo de caso em empresa brasileira.* Revista Tecnologística, p. 60-65, 2005.

WILLEMAIN, T.R.; SMART, C.N.; SCHWARTZ, H.F. *A new approach to intermittent forecasting demand for service parts inventories.* International Journal of Forecasting, v. 20, p. 375-387, 2004.