Alocação de canais em redes celulares sem fio: algoritmos e modelos teóricos em grafos e escalonamento

Bruno Raphael Cardoso Dias
Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Computação – IComp
Programa de Pós-Graduação em Informática – PPGI
bruno.dias@icomp.ufam.edu.br

Rosiane de Freitas Rodrigues
Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Computação – IComp
Programa de Pós-Graduação em Informática – PPGI
rosiane@icomp.ufam.edu.br

Nelson Maculan Filho
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Programa de Engenharia de Sistemas e Computação – PESC/COPPE
maculan@cos.ufrj.br

RESUMO

Problemas de alocação de canais (*Channel Assignment Problems* - CAP) são encontrados no planejamento de redes de telecomunicações, consistindo em atribuir um canal para cada chamada efetuada levando-se em conta restrições de separação entre as estações transmissoras de cada chamada, de forma a otimizar algum critério. Neste trabalho, é apresentado um estudo sobre tal classe de problemas, modelos matemáticos e algoritmos, onde a contribuição principal consistiu na adoção de novos modelos teóricos em grafos e escalonamento. Especificamente, novos modelos de coloração especiais em grafos usando-se multicoloração baseada em listas de cores limitadas, bem como com problemas de escalonamento de tarefas com restrições de recursos. Instâncias de *benchmark* foram utilizadas e, através de formulações adaptadas da literatura, foram resolvidas com técnicas de Programação Linear Inteira e estratégias heurísticas baseadas em busca local.

Palavras-chave: algoritmos, coloração em grafos, escalonamento de recursos, telecomunicações, teoria de escalonamento, teoria de grafos.
Área principal: Otimização Combinatória.

ABSTRACT

Channel Assignment Problems (CAP) arise in telecommunications network planning, consisting of attributing a channel to each call by taking into account separation constraints between the transmitters of each call in order to optimize some criterion. In this work, we present a study of this class of problems, mathematical models and algorithms, where the main contribution consisted in the adoption of new theoretical models in graphs and scheduling. Specifically, new special coloring models in graphs using bounded list-based multicoloring and also with scheduling problems with resource constraints. Benchmark instances were used and, by adapting some formulations from the literature, solved with Integer Linear Programming techniques and local search heuristics.

Keywords: algorithms, graph colorings, resource constrained scheduling, telecommunications, scheduling theory, graph theory.
Main area: Combinatorial Optimization.

1 Introdução

Nos últimos anos, o número de usuários de sistemas móveis tem aumentado de maneira bastante expressiva, tornando necessária a expansão das redes de serviços de conexão sem fio. O aumento do poder computacional dos dispositivos móveis, como celulares e *tablets*, além da maior concorrência no mercado dos mesmos, o que leva a preços mais baixos, tem levado cada vez mais pessoas a adquirirem estes equipamentos e, com isso, a contratarem planos de dados para conexão com a Internet. Estima-se que até novembro de 2011 havia quase 6 bilhões de assinantes de telefonia móvel celular no mundo, o que corresponde a 87% da população mundial atual (International Telecommunication Union (2012)). Este aumento no uso da rede requer um uso mais eficaz do espectro eletromagnético, de forma que todos os usuários consigam acessar o serviço de telefonia móvel celular com qualidade, atendendo às demandas dos diversos tipos de aplicações em uso atualmente, como voz e SMS, e evitando potenciais interferências (Audhya (2011)). Assim, torna-se importante determinar a melhor ocupação possível do espectro, que é o objetivo do Problema de Alocação de Canais .

O restante deste artigo está organizado como segue. Na seção 2, o Problema de Alocação de Canais (CAP - *Channel Assignment Problem*) é definido formalmente. Na seção 3, mostra-se a relação entre o CAP e os Problemas de Coloração de Vértices em Grafos, que são modelos bastante utilizados na literatura para o mesmo, com a proposta de um novo modelo. Na seção 4, faz-se a associação do CAP com o Problema de Escalonamento de Tarefas, que até o presente momento não foi encontrada na literatura atual e que pode ser utilizada para aproveitamento do ferramental teórico de escalonamento em outros problemas. Na seção 5, mostra-se um sumário das contribuições feitas neste trabalho. Por fim, na seção 6, tem-se as considerações finais sobre o trabalho e os próximos passos para futuras pesquisas sobre o tema.

2 O Problema de Alocação de Canais

De acordo com Koster (1999) e Audhya (2011), pode-se definir formalmente o CAP como segue. Existe um conjunto de n antenas (ERBs), onde cada ERB i tem uma demanda de q_i canais, que corresponde à quantidade de chamadas daquela estação. Cada chamada necessita de um canal para sua realização. O k-ésimo canal (ou seja, o canal da k-ésima chamada) alocado para a i-ésima ERB é denotado por f_{ki}. Com isto, tem-se que para todo par (i, j) de ERBs que possam interferir entre si, existe um valor d_{ij} (a distância de separação) para o qual a condição $|f_{ki} - f_{mj}| \geq d_{ij}$ deve ser respeitada. As estações não podem assumir qualquer canal dentre os disponíveis: para cada ERB i, existe um conjunto denominado de **domínio de frequência** (F_i) que contém os possíveis canais que as chamadas de i podem receber. Estes conjuntos representam as restrições de estações que, por estarem em localizações com alto uso de certa parte do espectro eletromagnético, devem evitar o uso desta parte para não haver interferência. O conjunto de todos os canais disponíveis para a rede, denotado por F, é a união de todos os domínios de frequência ($F = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$).

Com essas características, deseja-se então **minimizar o maior canal usado** dentre todos os canais usados pelas chamadas. Este é um problema de **min-max**, portanto, o problema de alocação de canais tratado neste trabalho será denominado de **Min-Max-CAP**. A figura 1 ilustra um exemplo do Min-Max-CAP. Conforme enuncia Koster (1999), este problema de alocação de canais pode ser modelado matematicamente da seguinte forma:

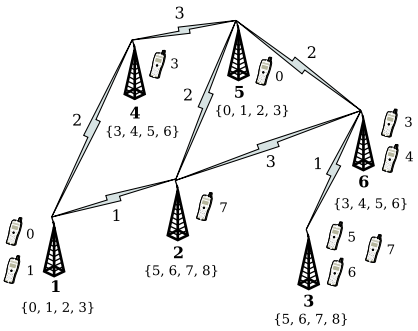

Figura 1. Exemplo do Min-Max-CAP em uma rede com 6 ERBs. O número abaixo de cada estação é o seu identificador e o conjunto de números abaixo deste é o domínio de frequência da estação. Os raios entre estações indicam possíveis interferências e o valor próximo às mesmas indica a distância mínima de separação entre as ERBs. Os pequenos aparelhos celulares indicam a quantidade de chamadas e o número ao lado de cada aparelho é o canal alocado para a chamada.

considerando uma variável z_{max} cujo valor será o do maior canal usado e um conjunto de variáveis x_{if}, onde $x_{if} = 1$ se o canal $f \in F_i$ for atribuído à estação i e 0 caso contrário, além de variáveis y_f, onde $y_f = 1$ se o canal $f \in F$ for alocado a alguma estação e 0 caso contrário, tem-se o seguinte modelo de Programação Linear Inteira:

Minimizar z_{max}

Sujeito a:

$$\sum_{f \in F_i} x_{if} = q_i \quad (\forall i = 1,2,...,n) \tag{1}$$

$$x_{if} + x_{jg} \leq 1 \quad (\forall i,j = 1,2,...,n;\ f \in F_i;\ g \in F_j : |f-g| < d_{ij}) \tag{2}$$

$$x_{if} \leq y_f \quad (\forall i = 1,2,...,n;\ f \in F_i) \tag{3}$$

$$z_{max} \geq f y_f \quad (\forall f \in F) \tag{4}$$

$$x_{if} \in \{0,1\} \quad (\forall i = 1,2,...,n;\ f \in F_i) \tag{5}$$

$$y_f \in \{0,1\} \quad (\forall f \in F) \tag{6}$$

3 Problemas de Coloração de Vértices em Grafos

Neste problema clássico, tem-se a seguinte situação: dado um grafo não direcionado $G = (V,E)$, onde V é o conjunto de vértices e E é o conjunto de arestas, deseja-se colorir cada vértice de forma que vértices adjacentes tenham cores diferentes (Szwarcfiter (1986)). Uma ***k*-coloração** do grafo é uma coloração no qual são usadas, no máximo, k cores. O objetivo é minimizar a quantidade de cores usadas, que equivale a determinar o **número cromático** (ou seja, o menor valor possível de k) do grafo, um problema NP-difícil (Garey (1979)). Existem inúmeras variações do problema. Alguns vértices podem necessitar de mais de uma cor, sendo que os mesmos possuem um peso w_i que equivale à quantidade de cores necessárias do vértice i. Esta variação é conhecida como **multicoloração** (Mehrotra (2007)). É interessante notar que um problema de multicoloração pode ser transformado em um problema de k-coloração replicando-se o vértice i no grafo w_i vezes. Os vértices também podem ter restrições de *quais* cores os mesmos podem assumir. Na **coloração com listas**, cada vértice possui uma lista de cores possíveis que podem ser usadas. Uma simplificação desta ideia é considerar cada vértice i tendo apenas um limite *superior* μ_i para a sua cor, ou seja, k vértice pode usar qualquer cor em $[0,\mu_i]$. Esta variação é conhecida

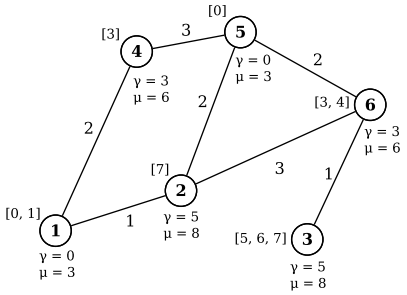

Figura 2. Min-Max-CAP da figura 1 modelado como (γ,μ)-*channel-muticoloring*. Os números entre colchetes à esquerda de cada vértice indicam as cores atribuídas ao mesmo. Abaixo de cada vértice, tem-se os limites inferior (γ) e superior (μ).

por **μ-coloração** (Bonomo (2005)). Os vértices também podem possuir limites *inferiores*, de forma que cada vértice i possa usar apenas cores no intervalo $[\gamma_i,\mu_i]$, onde γ_i é o limite inferior. Esta variação é conhecida como **(γ,μ)-coloração** (Bonomo (2006)).

Na literatura, existem variações de problemas de coloração denominadas **colorações ponderadas** (*weighted colorings*) nas quais restrições envolvendo os pesos das *arestas* devem ser respeitadas. Devido à relação com os problemas de alocação de canais, esta classe de colorações também é conhecida como ***channel assignment coloring*** (McDiarmid (2000)).

3.1 Modelando o Min-Max-CAP como Coloração em Grafos

Neste trabalho, propõe-se um modelo de coloração para o problema de alocação de canais mostrado na seção 2. Para isso, são feitas as seguintes correlações: cada estação da rede de telefonia celular corresponde a um vértice do grafo; cada canal do espectro eletromagnético equivale a uma cor; os domínios de frequência serão listas de cores dos vértices. Considerando-se domínios contíguos, ou seja, conjuntos com todos os naturais entre o menor e maior canal, tem-se limites inferior e superior; a quantidade de chamadas será o número de cores a serem atribuídas para o vértice; as distâncias de separação entre canais das estações serão os pesos das arestas.

Com base nas mesmas, pode-se enunciar o modelo de multicoloração de canais baseada em listas limitadas, ou seja, ***(γ,μ)-channel-multicoloring***. Retomando o exemplo da figura 1, tem-se que o mesmo pode ser modelado como esta coloração, pois os domínios de frequência são contíguos. O critério de otimização, que no Min-Max-CAP é a minimização do maior canal usado, passa a ser a minimização do **número cromático ponderado** do grafo, isto é, deseja-se colorir todos os vértices de acordo com suas demandas respeitando todas as restrições. A figura 2 mostra a modelagem do exemplo anterior como coloração em grafos, com número cromático ponderado igual a 7.

4 Problemas de Escalonamento de Tarefas

De uma maneira geral, problemas de escalonamento envolvem a alocação, em função do tempo, de um conjunto de tarefas em determinado conjunto de máquinas. Formalmente, dado um conjunto de J de n tarefas ($J = \{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$), deseja-se executar as mesmas em um conjunto de m máquinas, de forma a otimizar algum critério, como o tempo de término de todas as tarefas (conhecido como *makespan*). Cada tarefa j possui um tempo de processamento p_j e pode possuir algumas outras características, como instantes de lançamento

(antes do qual a tarefa não pode ser executada, denotados por r_j), precedências (representadas por um grafo direcionado acíclico), dentre outros (Rodrigues (2009), Brucker (2006), Pinedo (2002), Leung (2004)). Em Teoria de Escalonamento , adota-se a *notação de três campos* para referir-se a cada tipo de problema, sendo do tipo $\alpha \mid \beta \mid \gamma$, onde: α indica o ambiente de processamento (por exemplo, em ambiente de máquinas paralelas ou em ambiente de projetos com restrições de recursos); β indica as características e restrições das tarefas; e, γ indica a função objetivo a ser minimizada.

Um tipo de problema de escalonamento mais geral é o ***Resource Constrained Project Scheduling Problem*** (RCPSP). Neste problema, tem-se um conjunto de tarefas a serem executadas e um conjunto de b recursos finitos ($\Re = \{\Re_1, \Re_2, \ldots, \Re_b\}$) que são usados em quantidades distintas, sendo que, a cada instante, só podem ser usadas no máximo r_x unidades do recurso $\Re_x$. Existem precedências nas tarefas, e entre duas tarefas i e j, existe uma quantidade de tempo mínima que deve ser respeitada entre as mesmas, denominada de ***time lag*** e representada por ℓ_{ij}. No RCPSP, conforme Azevedo (2012), é possível a existência de ciclos no grafo de precedências, de forma que os *lags*, dependendo da ordem das tarefas, não sejam simétricos.

4.1 Modelando o MinMax-CAP como Escalonamento de Tarefas

Apesar de ser comum na literatura correlacionar as variações do CAP com colorações em grafos, até o presente momento, não encontrou-se uma correlação direta do CAP com escalonamento. No entanto, este tipo de associação não é algo totalmente novo, uma vez que é comum associar problemas de escalonamento com colorações em grafos.

Conforme enunciado anteriormente, cada **chamada** das estações necessita de um canal a ser alocado para a mesma. Para efetuar a correlação com escalonamento de tarefas, deve-se considerar, como tarefas, cada chamada do problema original de alocação de canais, ao invés de somente as estações. Os canais podem (e devem) ser reutilizados, de forma a fazer um uso mais eficiente do espectro eletromagnético, logo, algumas tarefas serão executadas ao mesmo tempo, ou seja, **em paralelo**, o que nos dá, como ambiente de execução, P (máquinas paralelas idênticas).

Pode-se relacionar o tempo em problemas de escalonamento com canal no problema de alocação de canais. Pode-se considerar os canais como os instantes de tempo do escalonamento e, por consequência, cada chamada deverá ter um instante de tempo alocado para a mesma em alguma máquina. Considera-se cada canal como uma unidade de tempo, assim, o tempo de processamento da tarefa associada a qualquer chamada será $p_k = 1$. No caso dos domínios de frequência, considerando-se o caso de intervalos contíguos, tem-se uma **janela de tempo** para a execução da tarefa associada, ou seja, existe um intervalo de tempo limitado dentro do qual a tarefa deve ser executada. Tem-se então que, para uma chamada k, a mesma terá um *release date* equivalente ao limite inferior do domínio de frequência de sua estação e um *deadline* equivalente ao limite superior do domínio (usando o exemplo de coloração, tem-se que $r_k = \gamma_i$, onde i é a estação da chamada k, e $\overline{d_j} = \mu_i$). Como deve existir uma distância entre canais de estações adjacentes, deve-se adicionar uma restrição de separação entre tarefas associadas à chamadas que possam interferir entre si. Isso é feito com o uso de ***setup* dependente da sequência**, no qual, para cada par de tarefas (i, j), existe um tempo mínimo s_{km} entre o tempo de completude de k e o de início de m. Como as distâncias de canais são entre os valores alocados para os canais (ou seja, os tempos de início das tarefas associadas às chamadas) e o tempo de processamento das

tarefas é 1, tem-se que $s_{km} = d_{ij} - 1$. Por fim, a minimização da faixa utilizada do espectro será a minimização da faixa de tempo usada (C_{max}) menos 1 (devido ao fato de que C_{max} conta o tempo de completude da última tarefa - como todos os tempos de processamento são 1, o maior canal usado será $C_{max} - 1$). Dadas estas características, pode-se propor o modelo de escalonamento $P \mid p_k = 1, r_k, \overline{d_k}, s_{km} \mid C_{max}$.

Este problema também pode ser modelado como um RCPSP, considerando as mesmas características, no entanto, no lugar de *setup*, tem-se *time lags*. Como existem precedências, e o grafo pode ser cíclico, para modelar as distâncias de reuso, cada aresta será duplicada, sendo uma em cada direção, e o peso de cada uma (que serão os *time lags* ℓ_{km} e ℓ_{mk}) será igual à distância de reuso do Min-Max-CAP. Pode-se visualizar graficamente a solução para o modelo de escalonamento por meio de um **Gráfico de Gantt**, que consiste em um gráfico bidimensional com um eixo representando as máquinas e o outro representando o tempo. Os valores dentro das células (os *slots* de tempo) indicam a tarefa (ou seja, uma chamada) que estará ocupando tal máquina naquele instante. Para o exemplo da figura 1, o gráfico de Gantt associado ao modelo de escalonamento pode ser visto na figura 3.

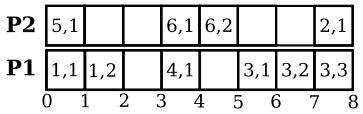

Figura 3. Gráfico de Gantt para a solução via modelo em escalonamento de tarefas, do exemplo da figura 1. Os números x, y dentro dos slots de tempo indicam, respectivamente, a estação e qual chamada recebeu o instante de tempo associado ao canal.

5 Contribuições do Trabalho

Este trabalho iniciou-se como forma de colaboração na tese do aluno Aldemir Malveira de Olivera, da COPPE/UFRJ, cujo tema envolve problemas de otimização combinatória em redes celulares e cuja ênfase é no problema de localização de antenas. Durante a contribuição, o problema de alocação de canais pôde ser detectado e, assim, uma pesquisa paralela se desenvolveu, sendo realizada pelo autor deste artigo e seus orientadores. Os Problemas de Alocação de Canais desempenham grande papel no planejamento de redes celulares, uma vez que as demandas de uso do espectro são crescentes. No entanto, grande parte destes problemas práticos são NP-difíceis, o que torna necessário o uso de boas técnicas computacionais para resolvê-los. Sendo assim, foram estudados também os modelos matemáticos de programação inteira propostos na literatura, sendo aplicados métodos exatos (*branch-and-cut* via ferramenta CPLEX (da IBM/ILOG), versão 12.4, em ambiente Linux) e heurísticos (baseados em busca local). As instâncias utilizadas são originadas do projeto CALMA (*Combinatorial Algorithms for Military Applications*), que procurou desenvolver algoritmos eficientes para vários problemas de otimização combinatória. Foram gerados dois conjuntos: CELAR (*Centre d'Électronique de l'Armement France*) e GRAPH (*Generating Radio Link Frequency Assignment Problems Heuristically*) sendo que a CELAR procura retratar redes reais e as GRAPH são pseudoaleatórias. Em trabalhos futuros, serão feitos experimentos também com as instâncias *Philadelphia*, baseadas em uma rede de 21 células da cidade de mesmo nome. Todas as instâncias estão disponíveis no site *FAP Web* (Eisenblätter (2007)). Tais resultados foram omitidos do texto para que se pudesse enfatizar a modelagem teórica em grafos e em escalonamento propostas, dada a limitação de espaço.

Durante o desenvolvimento do trabalho, identificou-se a correlação de problemas de alocação de canais com problemas de coloração restrita em grafos e, a partir de então, esta questão foi explorada resultados em modelos específicos para as necessidades dos problemas abordados. Os estudos também levaram a identificação da correlação com problemas de escalonamento de tarefas, que neste caso não se encontrou nenhum tipo de modelo na literatura que aplicasse o ferramental de teoria de escalonamento e, sendo assim, um leque de possibilidades passou a ser explorado, resultando na proposta de modelagem usando duas classes de escalonamento: escalonamento em máquinas paralelas; e, escalonamento com restrições de recursos.

Sendo assim, as principais contribuições deste trabalho foram:

- proposta de uma nova variação para coloração em grafos, baseada em colorações restritas existentes - multicoloração, lista-coloração e (γ,μ)-coloração, que é a **multicoloração de canais baseada em listas limitadas**, ou seja, (γ,μ)***-channel-multicoloring***, onde vértices adjacentes devem receber cores distintas, considerando todas as cores usadas na multicoloração do mesmo, com as restrições de que existe um limite superior e inferior para a lista de cores possíveis de serem usadas em cada vértice e de que a diferença em módulo do conjunto de cores dos vértices adjacentes deve ser maior ou igual ao peso da aresta em questão.
- modelagem de uma variação do problema de alocação de canais em grafos, usando a multicoloração baseada em listas limitadas proposta.
- aplicação de teoria de escalonamento na modelagem e resolução de problemas de alocação de canais, usando duas grandes classes de problemas: escalonamento em máquinas paralelas e escalonamento de projeto com restrição de recursos (RCPSP). Tais modelos proporcionaram um melhor entendimento da estrutura e complexidade dos problemas de CAP, resultando em soluções melhores, nos casos aplicados.
- adaptação de modelos matemáticos de programação inteira existentes na literatura para o problema Min-Max-CAP, resolução atrávés do método de *branch-and-cut* via ferramenta CPLEX 12.4, bem como elaboração de algoritmos heurísticos baseados em busca local.

6 Considerações Finais

Neste trabalho foram propostos modelos de coloração em grafos e de escalonamento de tarefas para uma variante do CAP, de forma que todo o ferramental já existente para estas outras classes de problemas pode ser usado para obter boas soluções em aplicações reais de planejamento de redes, sendo uma importante contribuição para futuras pesquisas. A correlação de problemas de alocação de canais com colorações em grafos já existe na literarura, mas, ainda assim, foram apresentados novos modelos que incorporam características importantes ainda não modeladas, con ênfase para o problema de multicoloração baseada em listas limitadas, proposto em função das características do problema de alocação estudado e que é uma generalização de outras colorações especiais em grafos (multicoloração, lista-coloração, (γ,μ)-coloração e *channel*-coloração). Em relação a escalonamento de tarefas, não foi encontrado na literatura algum trabalho aplicando tal teoria diretamente em alocação de canais, sendo assim, tal contribuição parece ser totalmente inovadora. Para esta classe, foram propostos modelos clássicos de escalonamento em máquinas paralelas idênticas, como também em escalonamento de projetos com restrições de recursos (RCPSP).

Esta pesquisa está em andamento, agora em nível de Mestrado, envolvendo alocação dinâmica de canais e redes baseadas em rádio cognitivo (as ditas redes inteligentes, onde equipamentos de telecomunicações embarcam programas computacionais para realizar um melhor aproveitamento do espectro de frequências, bem como melhor atender as necessidades dos usuários do sistema de comunicações). Tal pesquisa está recebendo o apoio do Inmetro-RJ.

Agradecimentos: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Fundações de Amparo a Pesquisa do Rio de Janeiro e Amazonas (FAPERJ e FAPEAM).

Referências

Audhya, G. K., Sinha, K., Ghosh, S. C., e Sinha, B. P. (2011). A survey on the channel assignment problem in wireless networks. *Wireless Communications and Mobile Computing*.

Azevedo, G. H. I. (2012). Escalonamento de projetos com restrição de recursos e com *timelags* máximos e mínimos: um limite inferior por propagação de restrições. Master's thesis, Mestrado em Engenharia de Produção – Universidade Federal Fluminense.

Bonomo, F. e Cecowski, M. (2005). Between coloring and list-coloring: μ-coloring. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 19:117–123.

Bonomo, F., Durán, G., e Marenco, J. (2006). Exploring the complexity boundary between coloring and list-coloring. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 25:41–47.

Brucker, P. (2006). *Scheduling Algorithms*. Springer, 5th edition.

Eisenblätter, A. e Koster, A. (2007). FAP web - a website about frequency assignment problems. `http://fap.zib.de`.

Garey, M. R. e Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman.

International Telecommunication Union (2012). Key Global Telecom Indicators for the World Telecommunication Service Sector. `http://www.itu.int/ITU-D/ict/statistics/at_glance/KeyTelecom.html`. Acessado em 17 de março de 2012.

Koster, A. M. C. A. (1999). *Frequency assignment: models and algorithms*. Universiteit Maastricht.

Leung, J. Y.-T. (2004). *Handbook of Scheduling: Algorithms, Models, and Performance Analysis*. Chapman and Hall/CRC.

McDiarmid, C. e Reed, B. (2000). Channel assignment and weighted coloring. *Networks*, 36:114–117.

Mehrotra, A. e Trick, M. A. (2007). A branch-and-price approach for graph multi-coloring. In Baker, E. K., Joseph, A., Mehrotra, A., e Trick, M. A., editors, *Extending the Horizons: Advances in Computing, Optimization, and Decision Technologies*, volume 37 of *Operations Research/Computer Science Interfaces Series*, pages 15–29. Springer US.

Pinedo, M. (2002). *Scheduling: Theory, Algorithms and Systems*. Prentice Hall, 2nd edition.

Rodrigues, R. F. (2009). *Caracterizações e Algoritmos para Problemas Clássicos de Escalonamento*. PhD thesis, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação – COPPE – Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Szwarcfiter, J. L. (1986). *Grafos e Algoritmos Computacionais*. Elsevier.