Um Algoritmo Construtivo baseado no Teorema das Inversões para o Problema Quadrático de Alocação

Carlos Jones Rebello Junior[1], **Maria Cristina Rangel**
Universidade Federal do Espírito Santo - CT - Departamento de Informática
Av. Fernando Ferrari, 514 - Campus Goiabeiras - Vitória - ES - 29075-910
jones@ifes.edu.br, crangel@inf.ufes.br

Resumo

Sejam duas matrizes de ordem $n \times n$, F e D, de coordenadas reais não-negativas, definimos o Problema Quadrático de Alocação *PQA(F,D)* como $Z_{\varphi^*} = \min_{\varphi \in \Pi_n} \sum_{i<j} f_{ij} d_{\varphi(i)\varphi(j)}$, onde Π_n é o conjunto das permutações dos elementos de $\Omega^n = \{1,\ldots,n\}$. Trata-se de um problema de *Lay-Out* sendo representado por uma sobreposição de vértices, $\varphi \in \Pi_n$, de duas cliques K_F e K_D de ordem n, com arestas valoradas por fluxos e distâncias, respectivamente. Os elementos das matrizes F e D são armazenados nos vetores $\mathbf{F}$ e $\mathbf{D}$ ambos de ordem $N = C_{n,2}$. Seja $Q = \mathbf{F^t D}$, definimos o Problema de Alocação Linear, *PAL(Q)*, como $Z_{\xi^*} = \min_{\xi \in \Pi_N} \sum_i f_i d_{\xi(i)}$, onde Π_N é o conjunto das permutações dos elementos de $\Omega^N = \{1,\ldots,N\}$. Neste trabalho consideramos o *PAL(Q)* uma relaxação do *PQA(F,D)* no sentido de o conjunto de soluções viáveis do primeiro conter as do segundo. Os vetores F^- e D^+ resultantes das ordenações não-crescente e não-decrescente de $\mathbf{F}$ e $\mathbf{D}$ definem o problema isomorfo $PAL(Q^*)$ com $Q^* = (F^-)^t(D^+)$. Rangel(2000) propôs o Teorema das Inversões possibilitando o estudo de soluções do *PQA(F,D)* não apenas pela qualidade dos custos, mas também por uma relação entre número de inversões de permutações. Uma inversão em $\rho \in \Pi_N$ é caracterizada pelo par ($\rho(i)$,$\rho(j)$) tal que $\rho(j) < \rho(i)$ com $i < j$; $i, j \in \Omega^N$. Para calcular o número de inversões de uma permutação ρ, considere $\Im(\rho)$ como sendo o conjunto de pares de inversões e sua cardinalidade, o número de inversões de ρ. O Teorema das Inversões afirma que a ordenação dos custos correspondentes às permutações livremente comparáveis é diretamente proporcional à ordenação do número de inversões dessas permutações. Cada uma das soluções do *PQA(F,D)* possui uma representante no conjunto de soluções do *PAL(Q)*, contudo, encontrar estas soluções é um trabalho difícil, visto que o número de soluções do *PQA(F,D)* (sobreposições de nós das cliques) é $n!$ e o número de soluções do *PAL(Q)* (sobreposições de arestas das cliques) é $N!$ o que torna inviável a busca para N grande. Para otimizar esta busca Resendo(2004) propôs o rastreamento de soluções viáveis de boa qualidade através da construção de matrizes de dimensões $n \times (n-1)$, denotadas por *HeadQ* e *HeadQ**. Em *HeadQ* as linhas representam as permutações ξ que geram $\varphi(1) = i$ $\forall i = 1,\ldots,n$. Sabemos que toda permutação no *PAL(Q)* possui uma correspondente $\rho \in \Pi_N$ no *PAL(Q*)*, sendo assim, Resendo(2004) através da matriz *HeadQ** monta as permutações $\rho \in \Pi_N$, soluções do *PAL(Q*)* que representam $\varphi \in \Pi_n$, solução do *PQA(F,D)*. Este trabalho propõe um algoritmo construtivo que utiliza o Teorema das Inversões e a matriz *HeadQ** para gerar soluções $\rho \in \Pi_N$ com baixo número de inversões e consequentemente, soluções $\varphi \in \Pi_n$ de boa qualidade. Esta estratégia realiza uma busca direcionada no espaço de soluções do *PQA(F,D)*. Estudos preliminares mostraram resultados computacionais promissores. Uma versão paralela deste algoritmo será implementada para instâncias de dimensões maiores que 30.

PALAVRAS-CHAVE. Alocação; Relaxação; Heurística

[1] aluno de mestrado do Programa de Pós-graduação em Informática/CT/UFES