

PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTIOBJETIVO - MÉTODOS INTERATIVOS E SOFTWARE

Carlos Henggeler Antunes

Deptº de Engenharia Electrotécnica e de Computadores, Universidade de Coimbra, Pólo II,
Pinhal de Marrocos, 3030-290 Coimbra, Portugal
INESC Coimbra, Rua Antero de Quental 199, 3000 Coimbra, Portugal
ch@deec.uc.pt

Maria João Alves

Faculdade de Economia, Universidade de Coimbra, Avenida Dias da Silva 165, 3004-512
Coimbra, Portugal
INESC Coimbra, Rua Antero de Quental 199, 3000 Coimbra, Portugal
mjalves@fe.uc.pt

RESUMO

Este artigo apresenta os conceitos fundamentais de modelos de programação linear com múltiplas funções objetivo, processos de cálculo de soluções não dominadas recorrendo à otimização de funções escalares substitutas e uma breve descrição de algumas abordagens interativas. Os exemplos ilustrativos são apresentados de forma didática tirando partido de uma aplicação computacional, a qual possui o duplo propósito de constituir um auxiliar no ensino destas matérias a alunos de graduação e pós-graduação bem como constituir um sistema de apoio à decisão capaz de ser utilizado em problemas reais.

PALAVRAS CHAVE. Otimização multiobjetivo, métodos interativos, apoio à decisão.

ABSTRACT

This paper presents the main concepts in linear programming models with multiple objective functions, the computation processes to obtain non-dominated solutions by optimizing surrogate scalar functions, and a brief description of some interactive approaches. The illustrative examples are presented in a didactic manner, by making the most of a computational application that has the double aim of aiding in teaching those topics to undergraduate and graduate students as well as providing decision support in real-world problems.

KEYWORDS. Multiobjective optimization, interactive methods, decision support.

1. Introdução

A utilização de modelos de otimização considerando múltiplas funções objetivo é, em geral, baseada no reconhecimento de que nos problemas reais existem múltiplas óticas para avaliar o mérito das soluções admissíveis. Ou seja, queremos a solução que minimiza o custo, mas também que minimiza o impacto ambiental, que maximiza a fiabilidade do sistema, que minimiza as perdas, etc. Assim, os modelos de otimização devem responder às características fundamentais do problema que pretendem representar incluindo explicitamente estes múltiplos aspetos de avaliação como funções objetivo distintas, conflituosas (não existe, em geral, uma solução que otimize simultaneamente todas as funções) e incomensuráveis (expressas em diferentes unidades de medida). O conceito chave em otimização multiobjetivo é o de solução não dominada (ótima de Pareto, eficiente, não inferior), que é uma solução para a qual não existe outra solução admissível que melhore simultaneamente todas as funções objetivo, i.e. a melhoria numa função objetivo só pode ser alcançada à custa da degradação do valor de pelo menos uma das outras funções objetivo.

Existem muitas abordagens que, embora reconhecendo a natureza multiobjetivo do problema, fazem depois uma agregação a priori das funções objetivo, em geral construindo uma função única através da monetarização de efeitos (por exemplo, impactes ambientais) de natureza diversa. Estas abordagens falham ao não captar devidamente a conflitualidade entre as funções que operacionalizam aspetos de avaliação de natureza distinta e impedir a exploração dos compromissos (*tradeoffs*) entre elas. Assim, os modelos de otimização multiobjetivo permitem não apenas captar mais adequadamente as características essenciais do problema real mas também melhorar a percepção dos problemas por parte dos decisores. Adicionalmente, as abordagens multiobjetivo possibilitam que o processo de estruturação do problema e de construção dos modelos seja mais rico, pela capacidade de incorporar múltiplas perspectivas, e que a fase de análise crítica dos resultados seja também mais informada ao permitir explorar um conjunto de soluções com diferentes características, revelando distintos compromissos entre as funções objetivo. Esta questão é de grande importância pois o conceito de solução não dominada comporta escassa informação (no contexto da escolha de uma solução final), dado que a simples comparação entre soluções não dominadas não providencia uma recomendação.

Se uma solução final deve ser encontrada no conjunto (geralmente muito vasto) das soluções não dominadas, é então necessário que, para além de usar técnicas de cálculo que garantam que as soluções obtidas são de fato não dominadas, a informação sobre as preferências do decisor possa ter um papel na avaliação do respectivo mérito permitindo distinguir entre elas. As preferências do decisor podem ser entendidas como modelo pessoal da realidade, não necessariamente formalizado, ao qual recorre para expressar informação passível de ser usada para estabelecer relações (de preferência forte ou fraca, de indiferença, ou mesmo de incapacidade em comparar) entre as soluções em apreciação. Neste contexto, o problema multiobjetivo é por nós colocado como a escolha, no conjunto de soluções não dominadas, de uma destas soluções que seja um compromisso aceitável pelo decisor como resultado do processo de apoio à tomada de decisão tendo em atenção as suas preferências. Consideramos que as preferências do decisor não devem ser uma dado pré-existente e estável no quadro desse processo, mas estão sujeitas a evolução à medida que vai sendo reunida mais informação sobre as características das soluções não dominadas em diferentes regiões do espaço de pesquisa determinado pelo modelo matemático. O processo de apoio à decisão baseado em modelos de otimização multiobjetivo é, assim, constituído por ciclos iterativos de cálculo de soluções, de avaliação destas soluções, de possível alteração da estrutura de preferências face à nova informação disponível, com vista à “convergência” para uma solução final que estabeleça um compromisso aceitável entre as funções objetivo (ou a seleção de uma “amostra” de soluções não dominadas, para posterior análise mais detalhada).

Na seção 2 são apresentados os conceitos essenciais em modelos de otimização multiobjetivo. Na seção 3 são descritas técnicas de cálculo de soluções não dominadas usando funções escalares substitutas. Na seção 4 são brevemente mencionados alguns métodos

iterativos para modelos de otimização linear multiobjetivo. Na seção 5 é apresentada uma aplicação computacional interativa que implementa estes métodos, bem como outros processo de cálculo, de forma integrada, i.e. permitindo usar, num dado método, informação obtida usando outro método.

2. Otimização linear multiobjetivo - conceitos fundamentais

O problema de otimização linear multiobjetivo considera p funções objetivo lineares a serem otimizadas numa região admissível definida por um conjunto de restrições lineares:

$$\max \quad z_1 = f_1(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_1 \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n c_{1j} x_j \quad (1)$$

$$\max \quad z_2 = f_2(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_2 \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n c_{2j} x_j$$

...

$$\max \quad z_p = f_p(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_p \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n c_{pj} x_j$$

$$\text{s. a} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

ou

$$\text{"Max"} \mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{C} \mathbf{x}$$

$$\text{s. a} \quad \mathbf{x} \in X = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \}$$

\mathbf{C} é a matriz dos coeficientes das funções objetivo, cujas linhas são os vetores \mathbf{c}_k (coeficientes da função objetivo $f_k(\mathbf{x})$). \mathbf{A} é a matriz dos coeficientes tecnológicos, tendo todas as restrições sido convertidas em igualdades através da introdução de variáveis desvio (slack e surplus) auxiliares. \mathbf{b} é o vetor dos termos independentes (tipicamente recursos disponíveis para restrições do tipo \leq ou requerimentos para restrições do tipo \geq).

Assume-se que a região admissível X é não vazia e compacta. Sem perda de generalidade, considera-se que as funções objetivo são todas a maximizar para facilitar a notação.

As soluções admissíveis do espaço das variáveis de decisão $\mathbf{x} \in X$ são mapeadas no espaço das funções objetivos, de dimensão p , $F = \{ \mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^p : \mathbf{x} \in X \}$. Ou seja, uma solução admissível $\mathbf{x} \in X$ tem como representação um vetor $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (z_1, z_2, \dots, z_p)$. Uma solução $\mathbf{x}' \in X$ é eficiente se e só se não existir uma outra solução $\mathbf{x} \in X$ tal que $f_k(\mathbf{x}) \geq f_k(\mathbf{x}')$ para todo o k ($k=1, \dots, p$), sendo a desigualdade estrita para pelo menos um k , $f_k(\mathbf{x}) > f_k(\mathbf{x}')$. X_E representa o conjunto das soluções eficientes. O ponto $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ no espaço das funções objetivo é não dominado (não inferior) se e só se $\mathbf{x} \in X_E$, ou seja $F_E = \{ \mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in F : \mathbf{x} \in X_E \}$.

Uma solução $\mathbf{x}' \in X$ é fracamente eficiente se e só se não existir uma outra solução $\mathbf{x} \in X$ tal que $f_k(\mathbf{x}) > f_k(\mathbf{x}')$ para todo o k ($k=1, \dots, p$). X_{FE} representa o conjunto das soluções fracamente eficientes. O ponto $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ no espaço das funções objetivo é fracamente não dominado se e só se $\mathbf{x} \in X_{FE}$, ou seja $F_{FE} = \{ \mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in F : \mathbf{x} \in X_{FE} \}$.

Por definição, o conjunto de soluções fracamente eficientes inclui as soluções (estritamente) eficientes. De uma forma geral, por razões de ordem prática, quando se mencionam as soluções fracamente eficientes não se estão a considerar as soluções estritamente eficientes.

A fig. 1 ilustra os conceitos de solução eficiente e fracamente eficiente, para o problema

$$\begin{aligned} \max f_1(\mathbf{x}) &= x_1 + x_2 \\ \max f_2(\mathbf{x}) &= -4x_1 + 3x_2 \\ \text{s. a } \mathbf{x} &\in X \end{aligned}$$

As soluções sobre os segmentos BC, CD e DE são estritamente eficientes (não dominadas), enquanto as soluções sobre o segmento EF, exceto E, são apenas fracamente eficientes (não dominadas).

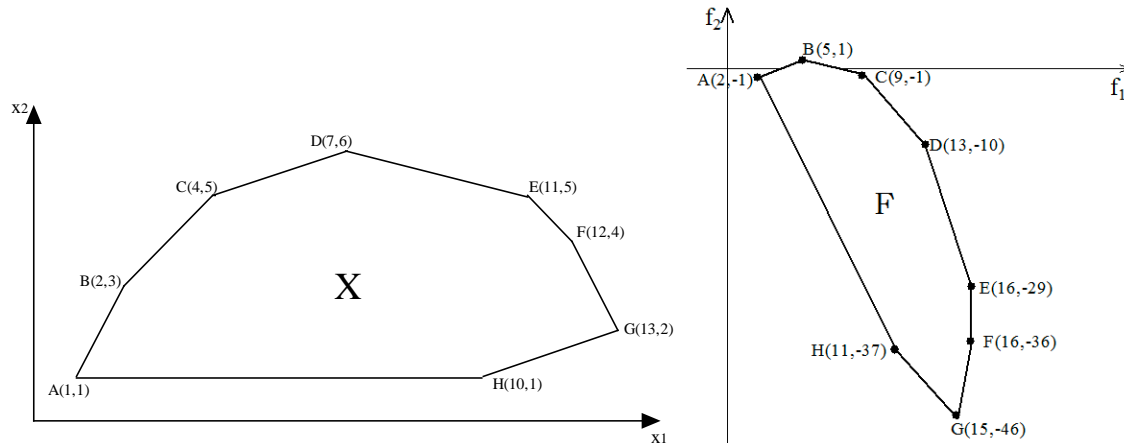


Fig. 1 - Ilustração dos conceitos de solução eficiente e fracamente eficiente, num problema com duas funções objetivo a maximizar

A solução ideal \mathbf{z}^* (ou ponto utopia) é o ponto, no espaço dos objetivos, cujas componentes são o ótimo de cada função objetivo na região admissível, quando otimizadas separadamente. Em geral, a solução ideal não pertence à região admissível (se fosse admissível, a a solução ideal otimizaria simultaneamente todas as funções objetivo, o que significaria que as funções não estariam em conflito). A solução ideal \mathbf{z}^* existe sempre no espaço dos objetivos, nem pode não existir \mathbf{x}^* , no espaço das variáveis de decisão, mesmo que não admissível, tal que $\mathbf{z}^* = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$. A solução ideal é frequentemente usada como ponto de referência (inatingível) do decisor em funções escalares substitutas que representam uma distância a minimizar para determinar uma solução de compromisso, i.e. captando a atitude de procurar uma solução que esteja tão próxima quanto possível do melhor valor que é possível obter em cada função objetivo.

3. Técnicas de cálculo de soluções eficientes em otimização linear multiobjetivo

As funções usadas em técnicas de cálculo de soluções eficientes designam-se por funções escalares substitutas. A solução ótima destas funções deve ser uma solução eficiente do modelo multiobjetivo original. Estas funções agregam transitoriamente numa única dimensão as p funções objetivo originais e incluem parâmetros associados à expressão das preferências do decisor.

As funções escalares substitutas devem gerar apenas soluções eficientes, devem poder obter qualquer solução eficiente e devem ser independentes de soluções não eficientes. Para além disso, o esforço computacional envolvido na otimização da função escalar substituta não deve ser muito elevado, os parâmetros de informação de preferências devem ter uma interpretação simples. No nosso trabalho, estas funções escalares substitutas não são consideradas como uma “verdadeira” representação analítica rígida das preferências do decisor, mas sim um meio de agregar as múltiplas funções objetivo e gerar soluções eficientes a propor ao decisor que estejam de acordo com a informação de preferências por este expressa.

3.1. Otimização de uma função objetivo considerando as outras como restrições

O problema escalar a resolver consiste em adotar uma das funções objetivo originais como função otimizar, tratando as outras $p-1$ funções como restrições através da especificação de

níveis inferiores que o decisor está disposto a admitir.

$$\begin{aligned} \max \quad & z_i = f_i(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_i \mathbf{x} \\ \text{s. a} \quad & f_k(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_k \mathbf{x} \geq e_k \quad k=1, \dots, p; k \neq i \\ & \mathbf{x} \in X \end{aligned} \quad (2)$$

Se $\mathbf{x}' \in X$ for solução ótima única de (2) para algum i , com e_k qualquer, então \mathbf{x}' é uma solução eficiente do problema multiobjetivo (1) (Steuer, 1986; Clímaco et al., 2003). A informação de preferências do decisor é obtida através da escolha da função objetivo a otimizar e dos limites inferiores e_k para as outras funções objetivo que são transformadas em restrições. Através da resolução do problema (2) para algum i e da variação dos valores e_k é possível obter todo o conjunto das soluções eficientes, quer sejam ou não vértices da região admissível original.

Note-se que se estes limites forem muito exigentes a região admissível de (2) pode ser vazia e será então necessário tornar os valores de e_k menos restritivos. Se existirem ótimos alternativos para o problema (2) só existe a garantia de obter soluções fracamente eficientes. Esta dificuldade é facilmente resolvida adicionando um termo de perturbação à função objetivo do

problema (2), que seria então $\mathbf{c}_i \mathbf{x} + \sum_{k=1; k \neq i}^p \rho_k \mathbf{c}_k \mathbf{x}$, com $\rho_k > 0$ suficientemente pequenos, garantindo que \mathbf{x}' seja estritamente eficiente para o problema (1).

No exemplo da figura 2, escolhendo $f_2(\mathbf{x})$ para otimizar e transformando $f_1(\mathbf{x})$ em restrição, $f_1(\mathbf{x}) \geq e'_1$, a resolução do problema (2) dá como ótimo a solução eficiente E situada sobre o segmento eficiente CB. Se considerarmos a restrição $f_1(\mathbf{x}) \geq e''_1$ (i.e., o decisor era menos exigente no valor mínimo que estaria disposto a aceitar para $f_1(\mathbf{x})$) a solução ótima seria o ponto F, sobre o segmento DC, que é apenas fracamente eficiente. Neste caso, a função objetivo com o termo de perturbação teria como solução ótima o ponto C que é eficiente.

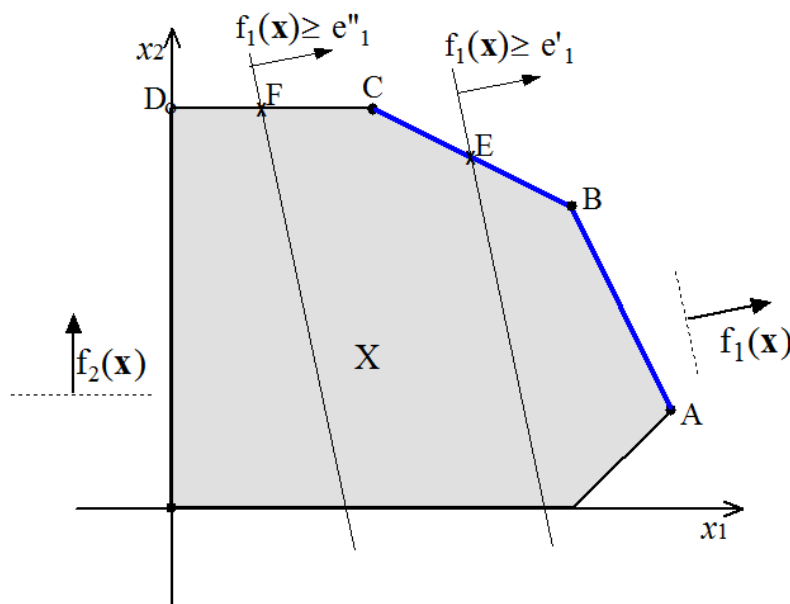


Fig. 2 - Otimização da função objetivo $f_2(\mathbf{x})$ considerando a função $f_1(\mathbf{x})$ como restrição

3.2. Otimização de uma soma pesada das funções objetivo

O problema escalar a resolver consiste na otimização de uma função objetivo que é uma soma pesada das p funções objetivo originais considerando pesos λ_k positivos.

$$\max z_{\lambda} = \lambda_1 f_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 f_2(\mathbf{x}) + \dots + \lambda_p f_p(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^p \lambda_k \mathbf{c}_k \mathbf{x} \quad (3)$$

$$\text{s. a } \mathbf{x} \in X$$

$\Lambda^0 = \{ \lambda \in \mathbb{R}^p: \lambda_k \geq 0, k=1,2,\dots,p, \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \}$ é o conjunto de pesos admissível e

$\Lambda = \{ \lambda \in \mathbb{R}^p: \lambda_k > 0, k=1,2,\dots,p, \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \}$ é o interior de Λ^0 , i.e. evitando pesos nulos.

$\mathbf{x}' \in X$ é uma solução eficiente para (1) se e só se for uma solução ótima para (3), para um qualquer conjunto de pesos $\lambda \in \Lambda$ (Steuer, 1986; Clímaco e tal., 2003). A solução ótima do problema (3) é uma solução básica, i.e. um vértice da região eficiente.

Considerando pesos nulos, i.e. $\lambda \in \Lambda^0$, com algum $\lambda_k=0$, podem existir soluções ótimas de (3) que são apenas soluções fracamente eficientes do problema multiobjetivo (1) no caso de existirem soluções ótimas alternativas. Portanto, $\mathbf{x}' \in X$ é uma solução eficiente para (1) se for uma solução ótima para (3), com $\lambda \in \Lambda^0$, verificando pelo menos uma das condições: $\lambda \in \Lambda$ ou \mathbf{x}' é solução ótima única de (3) com $\lambda \in \Lambda^0$.

A informação de preferências do decisor consiste na especificação dos pesos das funções objetivo. A interpretação dos pesos como medidas absolutas da “importância” a atribuir a cada função objetivo pode conduzir a resultados de alguma forma contraditórios ou surpreendentes, pois não há garantia de que as soluções encontradas resolvendo o problema (3) estejam de acordo com as preferências subjacentes à especificação dos pesos. Por exemplo, em determinadas condições é possível obter a solução eficiente que otimiza $f_k(\mathbf{x})$ com $\lambda_k=0$.

No contexto desta técnica de otimização de uma soma pesada das múltiplas funções objetivo, pode ser construído um quadro simplex multiobjetivo juntando ao quadro simplex normal uma linha por cada função objetivo:

A	b
- C	0

Relativamente à base B este quadro é transformado da seguinte forma:

\mathbf{x}_N	\mathbf{x}_B	
$B^{-1} N$	I	$B^{-1} \mathbf{b}$
$C_B B^{-1} N - C_N$	0	$C_B B^{-1} \mathbf{b}$

sendo B e N, C_B e C_N as sub-matrizes de A e de C correspondentes às variáveis básicas (\mathbf{x}_B) e não básicas (\mathbf{x}_N), respectivamente.

A matriz dos custos reduzidos relativa à base B é dada por $W = C_B B^{-1} N - C_N$.

B é uma base eficiente se e só se for uma base ótima do problema escalar soma pesada (3), para algum vetor de pesos $\lambda \in \Lambda$, ou seja B é uma base eficiente se e só o sistema $\{\lambda^T W \geq 0, \lambda \in \Lambda\}$ for coerente.

A representação gráfica do conjunto de pesos λ que conduz a uma solução básica eficiente pode ser obtida através da decomposição do diagrama paramétrico Λ . A região constituída pelo conjunto de pesos correspondente a uma solução básica eficiente (região onde se verifica $\{\lambda^T W \geq 0, \lambda \in \Lambda\}$) designa-se por região de indiferença. Ou seja, o decisor pode ser indiferente a todas as combinações de pesos nessa região porque otimizando uma função soma pesada com qualquer um desses conjuntos de pesos a solução ótima do problema (3) é a mesma solução eficiente. Uma fronteira comum a duas regiões de indiferença significa que as respectivas soluções básicas eficientes estão ligadas por uma aresta eficiente. Um ponto $\lambda \in \Lambda$ pertencente a várias regiões de indiferença indica que estas correspondem a soluções eficientes localizadas na mesma face eficiente, i.e. otimizando uma função soma pesada com este conjunto de pesos obtemos todas as soluções básicas (vértices) que definem a face como ótimos alternativos de (3).

Devido à condição de normalização $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p = 1$, Λ pode ser representado num diagrama de dimensão $p-1$. Na figura 3 é apresentado o diagrama paramétrico de um problema com três funções objetivo, mostrando as regiões de indiferença associadas às soluções básicas eficientes que otimizam individualmente cada função objetivo (soluções 1, 2 e 3, para as funções $f_1(\mathbf{x})$, $f_2(\mathbf{x})$ e $f_3(\mathbf{x})$, respectivamente) e a uma solução (solução 4) obtida com pesos iguais para todas as funções objetivo em (3).

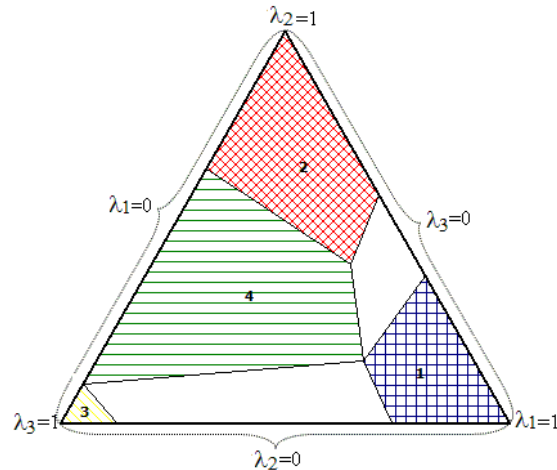


Fig. 3 - O diagrama paramétrico (para um problema com 3 funções objetivo) mostrando as regiões de indiferença correspondentes às soluções que otimizam individualmente cada função objetivo (1, 2, 3) e a outra solução obtida com pesos iguais (4)

3.3. Minimização da distância a um ponto de referência

Dado que a solução ideal representa o melhor valor alcançável para cada função objetivo isoladamente, este ponto é geralmente usado como ponto de referência que o decisor gostaria de atingir. Dada a conflitualidade entre as funções, esses valores para cada função não são alcançáveis simultaneamente. Este problema escalar consiste então em calcular uma solução eficiente que esteja tão próxima quanto possível (de acordo com uma dada métrica) dessas aspirações do decisor.

Usando a família de métricas L_β e sendo a solução ideal o ponto de referência, o problema consiste em

$$\min \quad \| \mathbf{z}^* - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \|_\beta \quad (4)$$

$$\text{s. a} \quad \mathbf{x} \in X$$

Se se admitir que as diferenças em cada dimensão “valem” de forma diferente, consideramos uma métrica L_β ponderada, com $\lambda \geq 0$.

$$\min \quad \lambda \| \mathbf{z}^* - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \|_\beta \quad (5)$$

$$\text{s. a} \quad \mathbf{x} \in X$$

A especificação da métrica, β , permite captar diferentes atitudes do decisor. Para $\beta=1$ (Manhattan) todos os desvios das funções objetivo em relação ao ponto de referência são considerados na proporção direta da sua grandeza. Para $2 < \beta < \infty$ maiores desvios vão tendo cada vez mais importância. Para $\beta=\infty$ (Chebyshev) apenas o maior (pior) desvio é tido em conta. Para além da escolha do tipo de métrica, a informação de preferências é realizada através da especificação do ponto de referência e dos pesos associados à métrica. Os contornos de isodistância e o uso em funções distância das métricas L_1 , L_2 e L_∞ são ilustrados na figura 4.

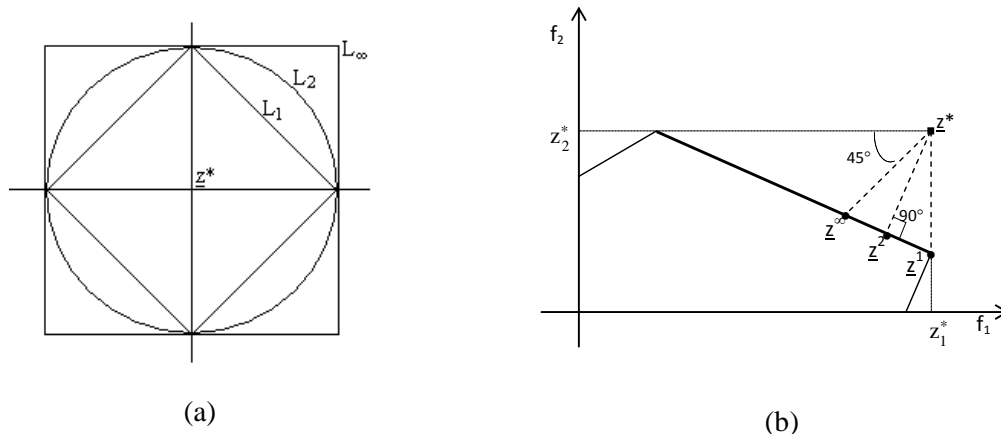


Fig. 4 - (a) Contornos de isodistância e (b) uso em funções distância, das métricas L_1 , L_2 e L_∞

Seja \mathbf{x}^0 solução do problema (4) considerando a métrica L_∞ (não ponderada), i.e. pretendemos minimizar a máxima diferença de cada função objetivo em relação ao seu valor ótimo (maior diferença entre as componentes de \mathbf{z}^* e $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$). Então o problema

$$\min_{\mathbf{x} \in X} \left\{ \max_{k=1, \dots, p} (z_k^* - f_k(\mathbf{x})) \right\} \quad (6)$$

tem como solução \mathbf{x}^0 se e só se \mathbf{x}^0 e \mathbf{v}^0 forem solução do problema (7)

$$\begin{aligned} \min \quad & v \\ \text{s. a} \quad & v \geq z_k^* - f_k(\mathbf{x}) \quad ; k=1, \dots, p \\ & \mathbf{x} \in X \\ & v \geq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Para um problema de programação linear multiobjetivo, apenas as métricas L_1 ou L_∞ conduzem a problemas escalares substitutos lineares.

4. Métodos interativos para modelos multiobjetivo

Os métodos interativos compreendem duas fases essenciais: de cálculo, em que são calculadas soluções eficientes, e de diálogo, em que face a estas soluções o decisor é chamado a expressar as suas preferências de modo a conduzir o processo interativo, e assim reduzir o âmbito da pesquisa e o respectivo esforço computacional. Alguns métodos podem pressupor a existência de uma função valor implícita do decisor, cuja forma funcional não é conhecida, mas onde se assume que o decisor tem a capacidade de providenciar informação coerente com essa função quando questionado no âmbito do protocolo de diálogo desses métodos, por exemplo respondendo a questões que envolvem a comparação de pares de soluções. Os métodos interativos permitem a adaptação na expressão de preferências ao longo do processo de decisão, à medida que o decisor vai aprendendo quer sobre o problema, e os compromissos associados a diferentes regiões do espaço de pesquisa, quer consolidando as suas próprias preferências. A disponibilidade e uma cada vez maior capacidade de cálculo, incluindo gráficos, permite a construção de sistemas de apoio à decisão baseados em métodos interativas para modelos multiobjetivo.

Classificações possíveis para os métodos interativos são baseadas na estratégia de redução do âmbito da pesquisa, no problema escalar substituto utilizado para agregar as funções objetivo, e na flexibilidade permitida à intervenção do decisor. Assim, Clímaco et al. (2003) (ver também Steuer, 1986), quanto à redução progressiva da região eficiente que pode ser pesquisada em fases seguintes, distinguem métodos de redução progressiva da região admissível, de redução progressiva do diagrama paramétrico, de contração progressiva do cone dos gradientes das

funções objetivo, e de pesquisa direcional. Em relação à função escalar substituta, estes autores consideram a otimização de uma função objetivo restringindo as outras, a soma ponderada das funções objetivo, e a minimização de uma distância a um ponto de referência. A classificação dos métodos como não estruturados ou estruturados resulta, para estes autores, da possibilidade de o decisor intervir para solicitar a realização de uma dada operação em qualquer momento do processo ou ser obrigado a uma seqüência pré-determinada de fases de cálculo e de diálogo, respectivamente.

O "Step Method" (STEM) (Benayoun et al., 1971) é um método iterativo de redução da região admissível. Em cada fase de cálculo é calculada a solução que minimiza uma distância pesada de Chebyshev à solução ideal, que é colocada à apreciação do decisor na fase de diálogo seguinte. Se os valores das funções objetivo são todos considerados satisfatórios, o processo termina. Caso contrário, o decisor estabelece que funções objetivo aceita relaxar (i.e., piorar) e qual o valor desta relaxação, para tentar melhorar os outros objetivos que ainda não têm valores satisfatórios. A região admissível é reduzida através de limitações adicionais nas funções objetivo: as que tinham valores ainda não satisfatórios não podem piorar e aceita-se piorar no máximo a quantidade de relaxação nas que já tinham valores satisfatórios.

No método "Interval Criterion Weights" (ICW) (Steuer, 1977, 1986) reduz-se progressivamente o cone convexo gerado pelos gradientes das funções objetivo. Esta contração é feita de acordo com as preferências do decisor ao escolher uma solução numa amostra de soluções não dominadas que lhe é apresentada em cada fase de diálogo. Em cada fase de cálculo são otimizadas várias somas ponderadas das funções objetivo, com combinações de pesos regularmente dispersas no diagrama paramétrico, o que evita requerer ao decisor a indicação explícita de pesos. O cone dos gradientes das funções objetivo é gradualmente contraído e deslocado até se centrar numa região de pesquisa mais limitada.

O método TRIMAP (Clímaco e Antunes, 1987, 1989) permite efetuar uma pesquisa livre no sentido de uma aprendizagem progressiva e seletiva do conjunto de soluções não dominadas, combinando a redução da região admissível com a redução do diagrama paramétrico. Em cada fase de cálculo é otimizada uma soma ponderada das funções objetivo. O decisor pode especificar limitações inferiores para os valores das funções objetivo, que são traduzidas para o diagrama paramétrico, e impor restrições diretamente nos pesos. A análise comparativa dos gráficos do diagrama paramétrico e do espaço dos objetivos permite ao decisor avaliar o interesse de pesquisar soluções em regiões ainda não exploradas.

O método "Pareto Race" (Korhonen e Wallenius, 1988) permite ao decisor uma pesquisa direcional livre sobre a região não dominada. A informação de preferências consiste na indicação das funções objetivo a melhorar, o que provoca a alteração a direção da pesquisa. As soluções são calculadas definindo uma direção que oferece uma variação nos valores das funções objetivo que está de acordo com as preferências do decisor, a qual é depois projetada sobre a região não dominada.

5. Uma aplicação computacional interativa para modelos de otimização linear multiobjetivo

Neste contexto, foi desenvolvida uma aplicação computacional integrando diferentes abordagens acima descritas para problemas de otimização multiobjetivo. A principal intenção desta aplicação é o seu uso no ensino de estudantes de graduação e pós-graduação em cursos de engenharia e de economia e gestão, oferecendo-lhes um ambiente interativo através do qual os principais conceitos e métodos podem ser aprendidos através de experimentação, com o seu próprio ritmo de aprendizagem. Adicionalmente, esta aplicação permite aos estudantes assumir o papel de decisores e explorar diferentes estratégias de pesquisa e diferentes compromissos entre as funções objetivo em competição, conduzindo à obtenção de diferentes soluções não dominadas. Para além do uso na sala de aula, esta aplicação é dada aos estudantes para desenvolverem, individualmente ou em grupo, os seus próprios projetos. A integração num ambiente operacional coerente de diferentes abordagens interativas tem revelado ser um

excelente utensílio para suscitar o interesse dos estudantes nos tópicos de otimização multiobjetivo, melhorar as suas aptidões técnicas e mesmo providenciar treino como decisores.

A decomposição do espaço paramétrico, complementada com o gráfico 2D/3D do espaço das funções objetivo em problemas com 2 ou 3 funções objetivo, permite perceber a geometria da região não dominada e os *tradeoffs* entre as funções em diferentes zonas. No exemplo da figura 5 são conhecidas todas as 11 soluções básicas (vértices) não dominadas que definem 3 faces não dominadas. A função 2 tem dois vértices ótimos alternativos: soluções 2 e 4, pois podem ambas ser obtidas otimizando uma soma pesada com $\lambda_2=1$. Note-se, como aspecto particular, que as soluções 3, 10, 8 e 6 estão localizadas sobre a mesma face, mas as soluções do interior da face são dominadas pelas soluções sobre as arestas 3-10, 10-8, e 8-6.

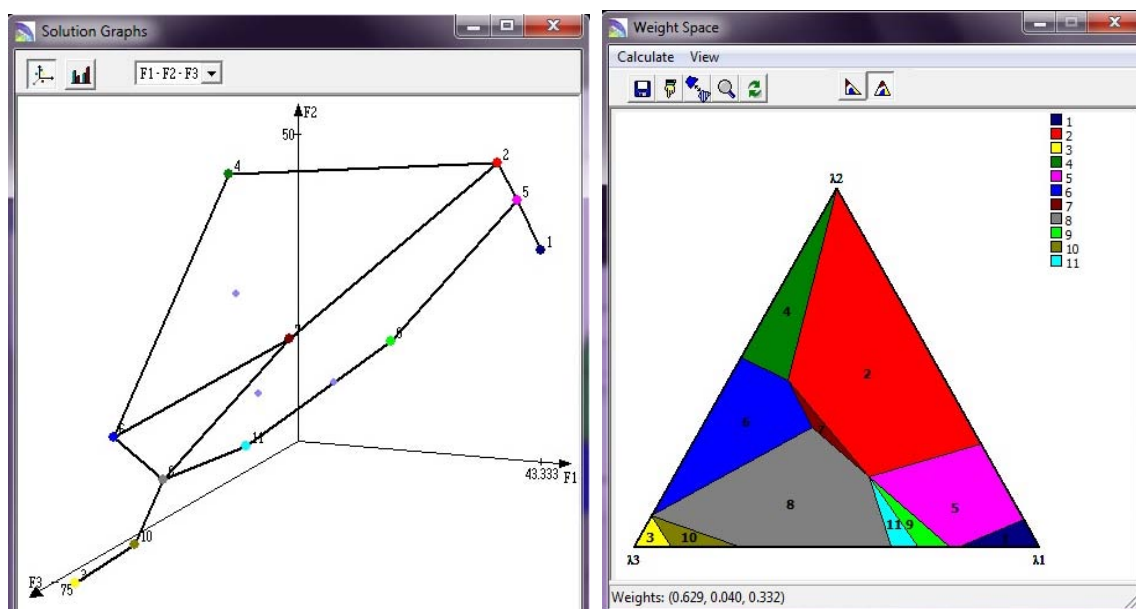


Fig. 5 - Decomposição do espaço paramétrico e região não dominada no espaço das funções objetivo

A figura 6 mostra os resultados após duas iterações do método STEM. Face à solução inicial (que minimiza uma distância de Chebychev ponderada à solução ideal) foi decidido relaxar (aceitar piorar) 15 unidades na função objetivo 2. Em relação à solução agora obtida foi permitido relaxar simultaneamente a funções 2 e 3 para melhorar a função 1.

A figura 7 mostra os resultados obtidos pelo método ICW após a solução 2 ter sido escolhida em duas iterações sucessivas como a preferida entre as soluções geradas pelo método, com base na otimização de somas pesadas com pesos bem distribuídos. Nestas circunstâncias apenas a solução 2 e a solução 7 são ainda alcançáveis, após a contração do cone gerado pelos gradientes das funções objetivo.

O método Pareto Race permite “viajar” sobre a região não dominada como se o decisor estivesse a dirigir um automóvel, controlando a direção do movimento (preferindo melhorar diferentes funções objetivo) e a velocidade (obtendo soluções mais ou menos próximas umas das outras). Na figura 8, a “viagem” é realizada sobre a aresta 2-4 cujas soluções são ótimas alternativas da função 2.

6. Conclusões

Os modelos e métodos de otimização linear com múltiplas funções objetivo são a mais adequada “porta de entrada” para apresentar a alunos de graduação e pós-graduação os conceitos fundamentais, os processos de cálculo de soluções não dominadas e a necessidade de exploração de compromissos (*tradeoffs*) subjacentes a processos de decisão multiobjetivo. O utensílio

computacional aqui apresentado permite não apenas que os alunos possam aprender conceitos e técnicas ao seu próprio ritmo através de experimentação como lhes permite assumir o papel de decisores e explorar diferentes estratégias de pesquisa e compromissos entre os objetivos que possam conduzir à escolha de uma solução não dominada. Este ambiente interativo pode ser descarregado a partir do site do Instituto de Engenharia de Sistemas e Computadores de Coimbra (www.inescc.pt).

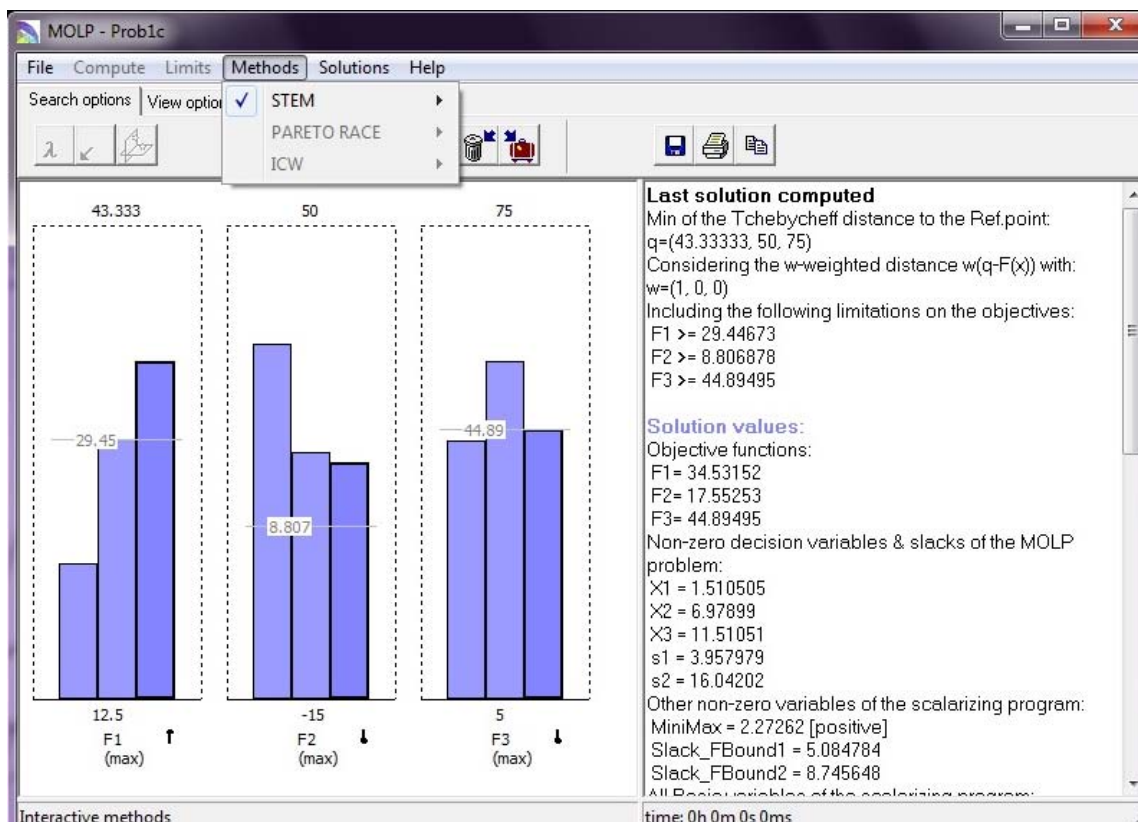


Fig. 6 - Resultados do método STEM após duas iterações

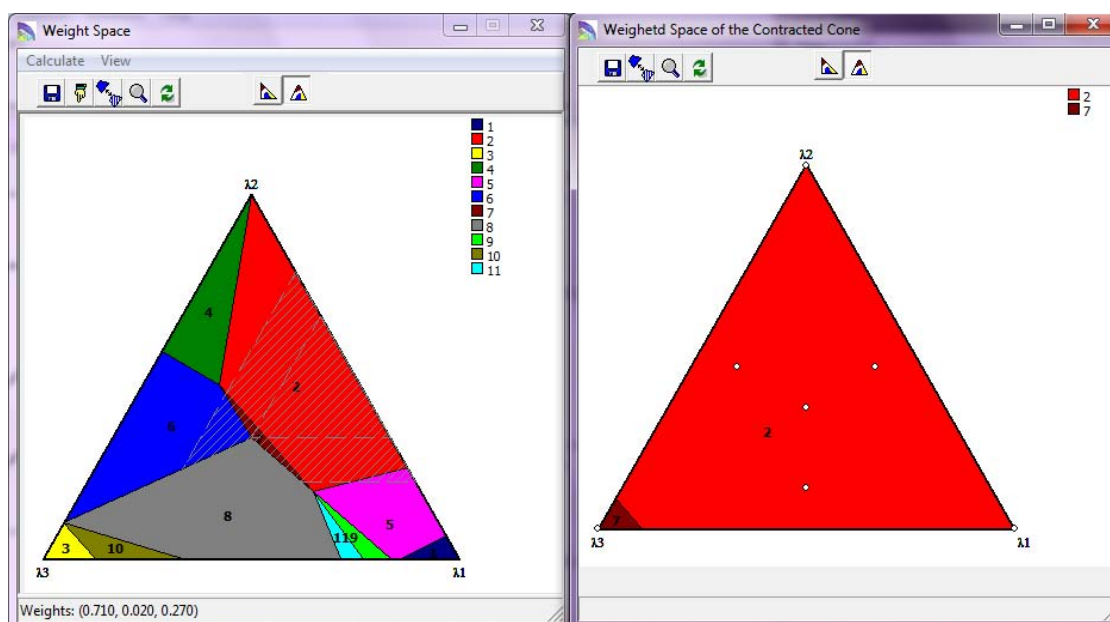


Fig. 7 - Contração do cone dos gradientes das funções objetivo usando o método ICW

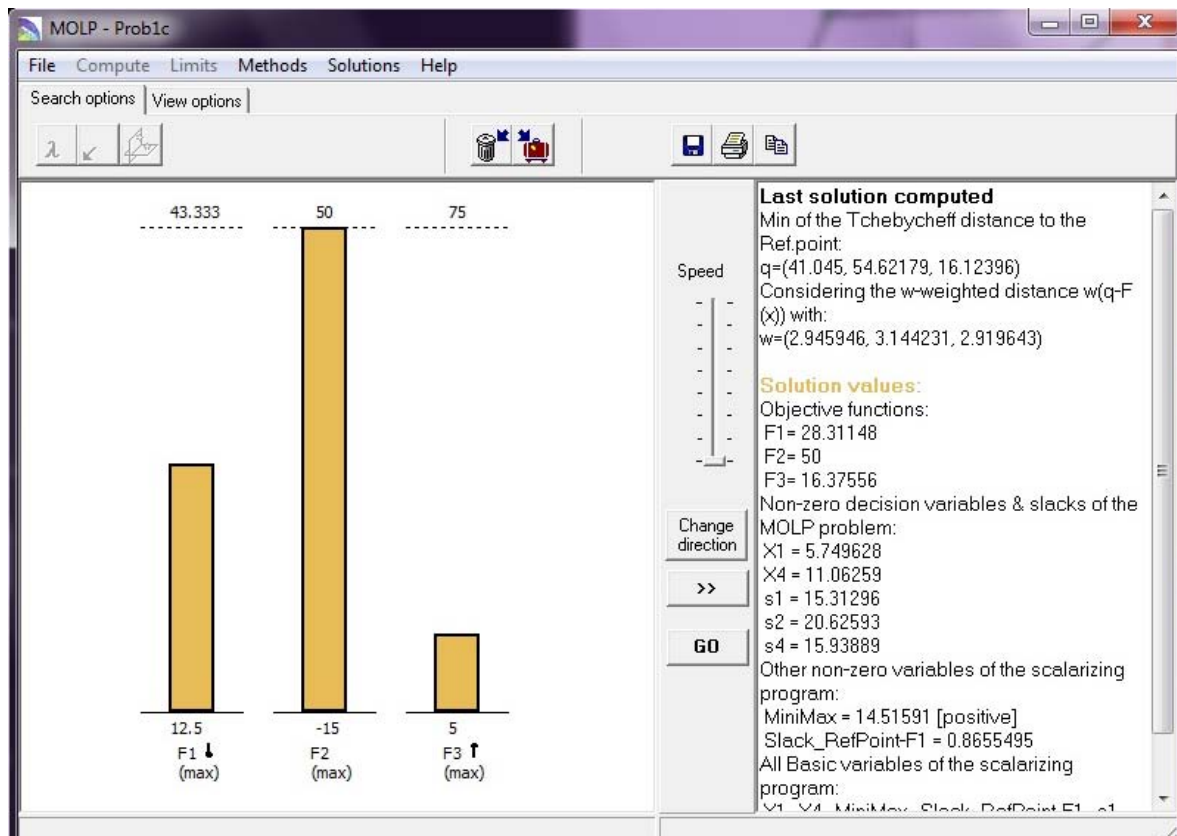


Fig. 8 - Painel de controlo do método Pareto Race

Agradecimentos

Este trabalho de pesquisa e desenvolvimento beneficiou do apoio dos projectos MIT/MCA/0066/2009, MIT/SET/0018/2009 e PEst-C/EEI/UI0308/2011.

Referências

- Benayoun, R., J. de Montgolfier, J. Tergny, O. Larichev (1971). Linear programming with multiple objective functions: step method (STEM). *Mathematical Programming*, vol. 1, 366-375.
- Clímaco, J., C. H. Antunes (1987). TRIMAP - an interactive tricriteria linear programming package. *Foundations of Control Engineering*, vol. 12, 101-119.
- Clímaco, J., C. H. Antunes (1989). Implementation of an user friendly software package - a guided tour of TRIMAP. *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 12, 1299-1309.
- Clímaco, J., C. H. Antunes, M. J. Alves (2003). *Programação Linear Multiobjectivo - do modelo de programação linear clássico à consideração explícita de várias funções objectivo*. Imprensa da Universidade de Coimbra, 2003.
- Korhonen, P., J. Wallenius (1988). A Pareto race. *Naval Research Logistics*, vol. 35, 615-623.
- Steuer, R. (1977). An interactive multiple objective linear programming procedure. *TIMS Studies in the Management Sciences*, vol. 6, 225-239.
- Steuer, R. (1986). *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application*. Wiley.