

FORMULACIÓN Y METAHEURÍSTICA PARA EL PROBLEMA DE LA DETERMINACIÓN DE FRECUENCIAS EN EL TRANSPORTE COLECTIVO PÚBLICO

Héctor M. Martínez, Antonio Mauttone, María E. Urquhart
Departamento de Investigación Operativa, Instituto de Computación,
Facultad de Ingeniería, Universidad de la República
J. Herrera y Reissig 565, Montevideo, Uruguay
{hectorm,mauttone,urquhart}@fing.edu.uy

RESUMEN

La optimización de frecuencias en sistemas de transporte público plantea desafíos importantes desde el punto de vista metodológico y de su aplicación real. Resolver el problema implica determinar los intervalos de tiempo entre pasadas consecutivas de ómnibus correspondientes a un conjunto de líneas; cada línea está dada por una sucesión de paradas y tramos de calles. La solución obtenida debe minimizar el tiempo de viaje de los usuarios respetando restricciones de demanda de viajes origen-destino y de tamaño de la flota. Proponemos una nueva formulación de programación lineal entera mixta para un modelo no lineal existente y resolvemos de forma exacta un problema pequeño. Para problemas más grandes proponemos una metaheurística cuyos resultados son contrastados con los obtenidos por el método exacto utilizando diferentes casos, incluyendo uno real cuyo sistema consta de 13 líneas. Las mejoras obtenidas son comparables a las de otras propuestas existentes en la literatura.

PALABRAS CLAVE. Optimización de frecuencias en transporte público. Programación lineal entera mixta. Tabu search.

Área principal L & T, MH y PM

ABSTRACT

Frequency optimization in public transportation systems poses relevant challenges from the methodological point of view as well as from the real application. In order to solve the problem, we should determine the time interval between subsequent buses for a given set of public transportation lines; each line is given by a sequence of stops and street segments. The solution should minimize the travel time of the users and should respect constraints related to origin-destination demand and fleet size. We propose a new mixed integer linear programming formulation for an already existing non linear model and we solve exactly a small-sized problem instance. For larger instances, we propose a metaheuristic which results are compared against exact results using different cases, including a real one which system comprises 13 lines. The improvements obtained are comparable to other proposals existing in the literature.

KEYWORDS. Frequency optimization in public transportation. Mixed integer linear programming. Tabu search.

Main area : L & T, MH y PM

1. Introducción y motivación

La planificación de sistemas de transporte público presenta diversos problemas relevantes desde el punto de vista de la Investigación Operativa, existiendo la oportunidad de aplicar metodologías que pueden redundar en mejoras significativas, en términos de calidad y costo de servicio.

En el diseño de un sistema de transporte público, los planificadores toman decisiones que impactan en el costo del sistema, el cual se determina a partir del costo monetario de operación, las tarifas y el tiempo de viaje de los usuarios. En sistemas basados en buses, la literatura identifica cinco etapas para diseñar un sistema de transporte público (Ceder y Wilson, 1986): diseño de la red de recorridos, determinación de frecuencias, diseño de las tablas de horarios, asignación de flota y personal. En sistemas reales, generalmente estas etapas son ejecutadas secuencialmente; las decisiones tomadas en una etapa condicionan las decisiones de las siguientes. Por otro lado, las decisiones son tomadas según diferentes horizontes de planificación: estratégico (largo plazo), táctico (mediano plazo) u operacional (corto plazo).

El problema de la determinación de frecuencias implica definir el intervalo de tiempo entre pasadas de subsecuentes buses en cada línea, teniendo en cuenta su itinerario (secuencias de segmentos de calles y paradas) y la demanda de viajes dada por una matriz Origen-Destino. Durante la planificación estratégica de un sistema de transporte público (en particular, cuando se diseñan los recorridos), es necesaria una determinación preliminar de las frecuencias. Pero durante la planificación táctica, es necesario ajustar las frecuencias a las variaciones de demanda entre diferentes estaciones del año y hora del día, o como respuesta a cambios en el diseño de los recorridos (Desaulniers y Hickman, 2007). Las frecuencias impactan tanto en los usuarios (tiempo de espera, capacidad de las líneas) como en los operadores (costo operacional determinado principalmente por el tamaño de la flota requerido).

La determinación de frecuencias ha sido abordada en la literatura como un problema de optimización, donde generalmente la función objetivo establece la minimización del tiempo total de viaje de los usuarios (caminata, espera y a bordo), sujeto a una restricción de tamaño de flota, así como restricciones de infraestructura (Schéele, 1981; Han and Wilson, 1982; Constantin and Florian, 1995). Dado que los modelos de optimización de frecuencias deben incluir medidas relativas a la performance del sistema desde el punto de vista de los usuarios (típicamente, el tiempo de espera), entonces incluyen un sub-modelo del comportamiento de los usuarios con respecto a un conjunto de líneas, conocido como *sub-modelo de asignación* (Desaulniers y Hickman, 2007). Este sub-modelo generalmente tiene una formulación y un método de solución que determinan una mayor complejidad al modelo de optimización de frecuencias. Adicionalmente, el modelado conjunto de tanto las decisiones del planificador (frecuencias) como la de los usuarios (líneas que utilizan) usualmente impone una estructura de varios niveles (Bard, 1998), lo que hace al problema de optimización de frecuencias aún más complejo.

La literatura existente acerca de la optimización de frecuencias, usualmente propone modelos definidos sobre una estructura subyacente de red y son de naturaleza no lineal. La estructura de red surge de: a) la representación de los itinerarios de las líneas y las trayectorias de caminata de los usuarios, y b) las paradas del sistema y los puntos donde se genera demanda. La no linealidad de los modelos surge del hecho de que el tiempo de espera es inversamente proporcional a las frecuencias; adicionalmente, el modelado de la interacción de los usuarios con varias líneas en una parada resulta en expresiones no lineales. Los métodos de resolución existentes son todos de naturaleza aproximada, consistentes en heurísticas guiadas por la formulación matemática (Gao et al, 2004; Han and Wilson, 1982; Schéele, 1981) y metaheurísticas (Yu et al 2010). Los casos de prueba utilizados incluyen instancias ficticias y reales; estas últimas consisten en sistemas que tienen hasta 100 líneas de transporte público (Constantin and Florian, 1995).

En este trabajo contribuimos al tratamiento del problema de optimización de frecuencias en transporte público, en dos sentidos:

1. Proponemos una formulación de programación lineal entera mixta (MILP, de sus siglas en inglés, Mixed Integer Linear Programming) para un modelo no lineal existente (Constantin and Florian, 1995). Dada la naturaleza de la formulación propuesta, puede ser resuelta de forma exacta utilizando un paquete comercial para la resolución de problemas MILP.
2. Con el propósito de resolver instancias de gran tamaño, proponemos una metaheurística Tabu Search (Glover, 1989) cuya efectividad (en el sentido de la distancia al óptimo) es estimada comparando contra resultados producidos por el modelo exacto.

Utilizamos diferentes casos de prueba para validar las metodologías propuestas: (a) el caso de Mandl (1980), que es ampliamente utilizado en la literatura sobre optimización de recorridos y (b) el caso de la ciudad de Rivera, una ciudad pequeña de Uruguay, que ha sido utilizado por los autores en estudios previos (Mauttone y Urquhart, 2009a,b).

La estructura del artículo es la siguiente. La sección 2 presenta el modelo matemático, incluyendo la formulación de programación matemática para el problema de optimización. La sección 3 describe la metaheurística Tabu Search propuesta para resolver el problema de forma aproximada, mientras que la sección 4 presenta resultados numéricos de ambos métodos (exacto y aproximado) aplicados a diferentes casos de prueba. Finalmente la sección 5 presenta conclusiones y trabajos futuros.

2. Modelo matemático

El modelo es mayormente basado en el propuesto por Constantin y Florian (1995). Nuestra contribución es la linealización que permite evitar la estructura en dos niveles (Bard, 1998) bajo ciertas condiciones y así aplicar técnicas MILP para resolver el problema de forma exacta. Es importante notar que la estructura no lineal en dos niveles de la formulación propuesta en (Constantin y Florian, 1995) resulta en un problema muy difícil de resolver; no existen métodos estándar de resolución para ese tipo de formulaciones.

La presentación del modelo se divide en dos partes: (a) representación de las líneas, la demanda y el comportamiento de los usuarios y (b) la linealización propuesta y el correspondiente modelo para optimización de frecuencias.

2.1. Líneas, demanda y comportamiento de usuarios

Consideramos un sistema de transporte público con sus correspondientes componentes de oferta y demanda. La oferta está representada por las líneas, cuyos itinerarios son definidos en términos de paradas existentes y segmentos de calles; sus frecuencias serán determinadas por el modelo de optimización. La demanda es representada por los usuarios que necesitan realizar viajes entre diferentes puntos de la ciudad; adicionalmente, dado un conjunto de líneas, los usuarios deben decidir como realizar sus viajes usando esas líneas.

Representamos la oferta como un grafo dirigido $G = (N, A)$ donde el conjunto N se compone de nodos que representan paradas o extremos de segmentos de calle para cada línea (N^P y N^S respectivamente, tales que $N = N^P \cup N^S$). Los arcos entre nodos de N^S se denominan arcos de viaje y conforma el conjunto A^T ; representan el desplazamiento de un bus (y los pasajeros a bordo) sobre una calle, el cual insume un tiempo de viaje no negativo c_a siendo $a \in A^T$. Los arcos que van desde N^P hacia N^S son denominados arcos de abordaje (A^B); inversamente, los arcos que van de N^S hacia N^P se denominan arcos de descenso (A^L). Estos conjuntos son tales que $A = A^T \cup A^B \cup A^L$. La figura 1 ilustra la estructura del grafo G . En base a este modelo, consideramos un conjunto de líneas L , donde cada línea tiene un itinerario de ida y otro de regreso, o tiene un único itinerario circular. Un itinerario es una secuencia de arcos de viaje adyacentes. Para cualquier línea $l \in L$, consideramos que la concatenación de sus itinerarios (o su único itinerario si la línea es circular) forma un ciclo cerrado, por lo tanto podemos expresar su *tiempo de ciclo* como $\sum_{a \in l} c_a$.

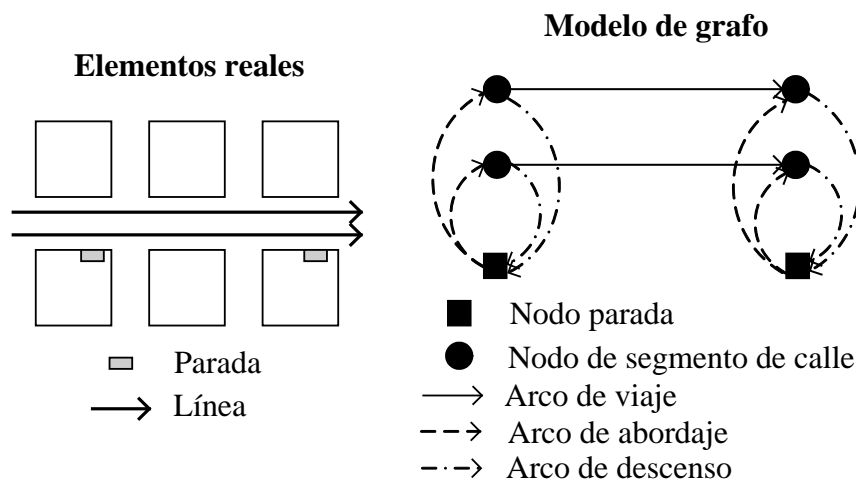


Figura 1: modelo subyacente de grafo

Asumimos que la demanda es generada en las paradas y la representamos como un conjunto K de pares OD, tal que O_k y $D_k \in N^P$ son las paradas origen y destino respectivamente del par OD $k \in K$; el valor no negativo δ_k representa la correspondiente cantidad de viajes demandados (personas por unidad de tiempo) en un horizonte de tiempo dado.

Para representar el comportamiento de los usuarios debemos considerar un sub-modelo de asignación, que representa la forma en que los usuarios se transportan desde sus orígenes hasta sus destinos, usando un conjunto de líneas de transporte público. Este modelo es necesario para calcular la performance del sistema, en este caso el tiempo de espera de los usuarios. Notar que las decisiones de éstos dependen de las frecuencias de las líneas; dado que dichas frecuencias son variables de decisión de nuestro modelo de optimización, el sub-modelo de asignación es un componente relevante del mismo.

Consideramos el modelo de asignación propuesto por Spiess y Florian (1989), denominado *estrategias óptimas*. Una estrategia es definida como un conjunto de reglas que al ser aplicadas, llevan al usuario hasta su destino. En términos del grafo G y para un par OD dado k , una estrategia puede ser vista como un conjunto de arcos en A que representa todas las líneas que el usuario identifica a priori viables para viajar desde O_k a D_k . El modelo asume que los usuarios seleccionan la estrategia que minimiza el tiempo total de viaje. Para esto, el usuario selecciona a priori (antes de abandonar el lugar donde se origina el viaje) un conjunto de líneas *atractivas* entre todas las posibles líneas que conectan su origen con su destino (incluso considerando transbordos entre líneas). En este proceso, el usuario considera información existente acerca de los tiempos de viaje a bordo en todas las líneas del sistema (costos de los arcos de G) y las frecuencias de las líneas, necesarias para calcular los tiempos de espera. Estando en una parada, el usuario tomará el primer bus que arribe, perteneciente a una de las líneas identificadas a priori como atractivas. Una estrategia es óptima si minimiza el tiempo total de viaje esperado (se asume un modelo probabilístico subyacente).

El modelo de asignación de estrategias óptimas puede ser formulado mediante las ecuaciones (1) a la (4), para un único par OD (implícito en la notación), y donde v_a es la cantidad de demanda en el arco $a \in A$; w_n es el tiempo de espera multiplicado por la demanda en el nodo $n \in N$; A_n^+ y A_n^- son arcos salientes y entrantes del nodo n respectivamente; b_n es un valor igual a δ_k si $n = O_k$, $-\delta_k$ si $n = D_k$ y 0 en otro caso, y f_a es la frecuencia (buses por unidad de tiempo) en la línea correspondiente al arco de abordaje a . Por más detalles sobre el razonamiento para derivar la formulación (1)-(4), referimos a su publicación original (Spiess y Florian, 1989).

$$\min_{v,w} \sum_{a \in A} c_a v_a + \sum_{n \in N^P} w_n \quad (1)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{a \in A_n^+} v_a - \sum_{a \in A_n^-} v_a = b_n \quad \forall n \in N, \quad (2)$$

$$v_a \leq f_a w_n \quad \forall n \in N^P, a \in A_n^+, \quad (3)$$

$$v_a \geq 0 \quad \forall a \in A, \quad (4)$$

2.2. Modelo de optimización de frecuencias

Nuestro modelo para la optimización de frecuencias, es basado en el propuesto por Constantin y Florian (1995), que tiene una formulación no lineal en dos niveles. La diferencia clave de nuestra propuesta es la introducción de una estructura auxiliar para el grafo G , que permite obtener una formulación lineal que bajo ciertas condiciones tiene una estructura de un solo nivel.

Definimos una discretización del dominio de frecuencias mediante un conjunto dado $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$, donde cada elemento θ_i es no negativo y representa un posible valor para la frecuencia de cualquier línea. Una configuración factible de frecuencias debe asignar un elemento de Θ a cada línea $l \in L$. Adicionalmente, definimos una nueva estructura para G donde cada línea que pasa por una parada tiene un arco de abordaje por cada elemento de Θ . Luego introducimos la variable y_{lf} , que toma el valor 1 si la línea l tiene asignada la frecuencia θ_f . En base a estas definiciones y al sub-modelo de asignación (1)-(4), formulamos el modelo de optimización de frecuencias (5)-(12) donde B es un límite superior para el tamaño de la flota; $f(a)$ denota el índice en Θ de la frecuencia que representa el arco a y $l(a)$ denota la línea correspondiente a ese mismo arco. Notar que hemos agregado el índice k para denotar el correspondiente par OD.

$$\min_{y,v,w} \sum_{k \in K} \left(\sum_{a \in A} c_a v_{ak} + \sum_{n \in N^P} w_{nk} \right) \quad (5)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{l \in L} \sum_{f \in 1..m} \theta_f y_{lf} \sum_{a \in l} c_a \leq B, \quad (6)$$

$$\sum_{f \in 1..m} y_{lf} = 1 \quad \forall l \in L, \quad (7)$$

$$\sum_{a \in A_n^+} v_{ak} - \sum_{a \in A_n^-} v_{ak} = b_{nk} \quad \forall n \in N, k \in K, \quad (8)$$

$$v_{ak} \leq \theta_{f(a)} w_{nk} \quad \forall n \in N^P, a \in A_n^+, k \in K, \quad (9)$$

$$v_{ak} \leq \delta_k y_{l(a)f(a)} \quad \forall a \in A^B, k \in K, \quad (10)$$

$$v_{ak} \geq 0 \quad \forall a \in A, k \in K, \quad (11)$$

$$y_{lf} \in \{0,1\} \quad \forall l \in L, f \in 1..m. \quad (12)$$

La formulación (5)-(12) es lineal entera mixta, por lo tanto puede ser resuelta de forma exacta usando métodos de resolución MILP. Observar que para una configuración dada de frecuencias (valor fijo de y) que respeta las restricciones (6) y (7), el problema lineal resultante

representa $|K|$ problemas de asignación independientes, como el denotado por (1)-(4). La restricción (9) involucra una frecuencia fija mientras que la restricción (10) es redundante para $y_{l(a)f(a)} = 1$. Por lo tanto, en ausencia de otras restricciones que involucren a las variables v y w , la formulación propuesta representa simultáneamente la optimización de frecuencias y el problema correspondiente de asignación. Finalmente, esta formulación lineal entera mixta de un solo nivel, es equivalente a la formulación no lineal en dos niveles propuesta en (Constantin y Florian, 1995).

3. Solución heurística

Aunque la formulación MILP propuesta permite obtener soluciones óptimas para el problema de optimización de frecuencias, es esperable que las instancias de gran tamaño sean difíciles de resolver. Notar que al introducir la discretización del dominio de frecuencias, transformamos el problema en uno de optimización combinatoria cuyo espacio de búsqueda tiene un tamaño exponencial $|\Theta|^L$ en el peor caso.

Para abordar esta complejidad, proponemos una metaheurística basada en Tabu Search (Glover, 1989). El método es basado en una búsqueda local en el espacio de las frecuencias (decisiones del planificador), mientras que las variables que representan decisiones de los usuarios son calculadas mediante una invocación al sub-modelo de asignación (1)-(4). Aplicamos conceptos “tabu” sobre el mecanismo base de búsqueda local, de modo de evitar caer en óptimos locales. En las siguientes secciones presentamos los principales conceptos involucrados en la metaheurística propuesta.

3.1. Procedimiento local

El procedimiento local es una búsqueda que usa la operación *move* para definir la vecindad de cualquier solución (Glover y Laguna, 1998). Nuestra solución es representada por un “array” de índices al conjunto de frecuencias Θ . Cada elemento del “array” representa una línea del sistema de transporte público; su valor representa la frecuencia de esa línea. Asumimos que el conjunto de todas las frecuencias posibles está ordenado de forma creciente. De este modo, una línea aumenta (disminuye) su frecuencia cuando cambia al siguiente valor más alto (más bajo) en Θ . Notar que una disminución en la frecuencia de una línea, causa que la solución sea menos atractiva desde el punto de vista de los usuarios (o en el mejor caso, igual). Por el contrario, un aumento en la frecuencia de una línea, hace la solución más atractiva (o igual). La operación *move* que define la estructura de vecindad, es entonces un movimiento compuesto sobre un par de líneas, un aumento y una disminución. De acuerdo a lo anterior, cada solución tiene $|L| \times (|L|-1)$ soluciones vecinas.

3.2. Tabu Search

Tabu Search es una metaheurística que guía un procedimiento local para explorar el espacio de soluciones más allá de óptimos locales (Glover y Laguna, 1998). Para lograr este objetivo, la búsqueda puede aceptar movimientos que empeoran la solución actual y puede evitar movidas que fueron realizadas recientemente. Uno de los principales componentes de Tabu Search es el uso de memoria. Este trabajo se centra en el uso de memoria de corto plazo.

Memoria, período y clasificación tabu

Utilizamos el tipo más común de memoria de corto plazo, denominado memoria basada en lo reciente. Una lista tabú denominada *TabuStart* registra la última iteración donde cada línea cambió su frecuencia. Supongamos que *TestDec* y *TestInc* corresponden a los índices de las líneas donde se aumentará y disminuirá la frecuencia, respectivamente. Decimos que la movida (*TestDec, TestInc*) es *tabú activa* si $Iter \leq TabuStart(TestDec) + TenureDec$ o $Iter \leq TabuStart(TestInc) + TenureInc$. Los valores *TenureInc* y *TenureDec* corresponden a los valores del *período tabú* para los movimientos de aumento y disminución en la solución, mientras que *Iter* indica el número de iteración actual. Un valor de *período tabú* indica la cantidad de

iteraciones donde una movida se mantiene tabú activa. En términos generales, el mecanismo de búsqueda usualmente evita movimientos que son tabú activos. Sin embargo, cuando el número de movimientos no tabú activos es pequeño, se adoptan mecanismos adicionales, por ejemplo, los llamados *criterios de aspiración*.

Criterios de aspiración

Los criterios de aspiración son introducidos para determinar en qué casos las reglas de activación tabú pueden ser violadas (Glover y Laguna, 1998). Dado que la obtención del valor objetivo de una solución es computacionalmente costoso (implica una invocación al sub-modelo de asignación), solamente se evalúan soluciones vecinas no tabú activas en cualquiera de sus frecuencias. Cuando el número de posibles soluciones vecinas (estimado como el producto de la cantidad de líneas que pueden aumentar sus frecuencias por aquellas que pueden disminuir) es inferior a un límite dado N_{min} (parámetro del algoritmo), el criterio de aspiración adoptado elimina el estado tabú activo de las frecuencias que tengan el valor más bajo en $TabuStart(TestX) + TenureX$ (donde X corresponde a *Dec* o *Inc*) hasta alcanzar el mínimo número de vecinos establecido por N_{min} . Este criterio es conocido como aspiración por defecto.

Exploración de la vecindad

Como una forma sistemática de explorar las soluciones vecinas, implementamos una estrategia de *aspiración plus* (Glover y Laguna, 1998). Dicha estrategia explora una cantidad *plus* de soluciones luego de encontrar una solución cuyo valor objetivo mejora un *valor de aspiración*. Para mantener controlado el número de soluciones vecinas a visitar, esta estrategia utiliza dos valores que indican el mínimo y máximo número de soluciones a explorar. Las soluciones vecinas candidatas resultantes de aplicar la estrategia explicada, son evaluadas en orden aleatorio.

3.3. Función objetivo y restricciones

Para evaluar cada solución vecina, implementamos el algoritmo de etiquetado propuesto en (Spiess y Florian, 1989), el cual resuelve el modelo de asignación formulado por (1)-(4).

Respecto al tratamiento de las restricciones del modelo de optimización, en lugar de descartar soluciones que violan el límite superior del tamaño de flota (restricción (6)), permitimos soluciones no factibles y guiamos la búsqueda penalizando los vehículos (buses) extra. Una estimación de la influencia de los buses con respecto al tiempo total de viaje de los usuarios (calculada como el valor objetivo dividido por el número de buses de la solución) es usada para penalizar la cantidad de buses que excede el tamaño de la flota disponible.

4. Experimentos y análisis

En esta sección reportamos resultados numéricos obtenidos de la aplicación del modelo exacto explicado en la sección 2 y el método aproximado de solución presentado en la sección 3. Utilizamos dos casos de prueba:

- El caso de Mandl (1980), que representa una pequeña ciudad. Su grafo tiene 15 nodos y 21 aristas no dirigidas. Dado que no existe una red de recorridos asociada a este caso, generamos una red consistente con el propósito de este estudio. La matriz origen-destino tiene 172 pares OD.
- El caso de la ciudad de Rivera, Uruguay, que ha sido usado por los autores en estudios previos (Mauttone y Urquhart, 2009a,b). El grafo tiene 84 nodos y 143 aristas no dirigidas; la matriz origen-destino tiene 378 pares OD. Consideramos las líneas que formaban parte del sistema de transporte público de la ciudad al momento de construirse el caso (año 2003); son 11 líneas con recorridos de ida y regreso y 2 líneas circulares.

Los parámetros utilizados en cada caso, se muestran en la tabla 1. El modelo MILP fue implementado en CPLEX 12.2 y ejecutado en un computador Core-i7 con 16 GB de RAM. La metaheurística fue implementada en C++ y ejecutada en un computador Quad Core con 8 GB de

RAM. Dadas las diferencias entre las plataformas experimentales utilizadas, los tiempos de ejecución no son directamente comparables. Observar que una comparación directa de diferentes métodos no es la intención de este estudio. Los tiempos de ejecución son reportados principalmente para mostrar la factibilidad (o no) de aplicación de cada metodología propuesta. Dado que el algoritmo Tabu Search incluye un componente aleatorio (ver sección 3.2), sus correspondientes resultados son promediados en base a 20 ejecuciones independientes.

	<i>Mandl</i>	<i>Rivera</i>
Θ	{1/60, 1/50, 1/40, 1/30, 1/20, 1/10, 1/5, 1/2}	{1,60, 1/40, 1/30, 1/20}
<i>B</i>	80	27

Tabla 1: parámetros utilizados para los distintos casos de prueba

4.1. Comparación de valores objetivo

La tabla 2 muestra los valores objetivo alcanzados por los métodos exacto y aproximado (O_e y O_a respectivamente), así como el porcentaje de mejora (I_e e I_a respectivamente) con respecto al valor objetivo del sistema actual (solamente para Rivera). También se muestra el tiempo de ejecución (en segundos) como T_e y T_a respectivamente, y el gap MIP relativo del método exacto, como G_e . Para el modelo exacto, la ejecución se detuvo cuando se encontró el óptimo global o cuando se llegó a un tiempo límite impuesto. Para la metaheurística, el criterio de parada fue un número máximo de iteraciones o un número máximo de iteraciones sin mejorar la solución actual.

En la tabla 2 podemos observar que los valores objetivo obtenidos por los métodos exacto y aproximado son muy similares, en los dos casos de prueba. Para poder obtener resultados del modelo exacto con el caso de Rivera, impusimos un límite de 48 horas de ejecución (*), luego del cual se obtuvo una solución factible con un gap MIP relativo de 18%. Notamos que el modelo MILP resultante contiene 1.097.080 variables y 2.321.750 restricciones, por lo tanto es esperable que sea difícil de resolver de forma óptima en un tiempo relativamente acotado. De todos modos, observamos que la solución óptima para Mandl tiene un gap de 19% con respecto a la solución óptima de la relajación lineal del modelo; por lo tanto, podríamos inferir que el valor objetivo obtenido para Rivera no está muy lejos del óptimo global.

	O_e	O_a	I_e	I_a	T_e	T_a	G_e
<i>Mandl</i>	139,54	141,01	-	-	2460	13	19
<i>Rivera</i>	514,23	517,56	3,48	2,85	*	202	18

Tabla 2: valores objetivo

Este experimento muestra que (a) usando la formulación propuesta es posible obtener el óptimo global para un caso pequeño y (b) es capaz de mejorar (en términos de valor objetivo) un sistema existente en una ciudad pequeña. Como referencia, notamos que la mejora de los resultados producidos por el método de solución propuesto en (Constantin y Florian, 1995), con respecto al sistema real, varía entre 1,2% y 5,0%, dependiendo del caso de prueba concreto. Finalmente, notamos que la metaheurística propuesta también produce buenas soluciones en un tiempo de ejecución muy bajo.

4.2. Modelo sin transbordos

En la ciudad de Rivera, es muy infrecuente que los usuarios del sistema de transporte público realicen transbordos entre diferentes líneas. Esto es debido a que deben pagar por cada línea que utilizan. Además, tanto los itinerarios de los recorridos como la demanda tienen un patrón radial; por lo tanto, la demanda está en cierto sentido bien atendida sin necesidad de realizar transbordos. De acuerdo a esta observación, implementamos una codificación modificada para el grafo G , la cual excluye la posibilidad de transbordos. Esta codificación alternativa causa que el problema sea más fácil de resolver, en comparación con el modelo descrito en la sección 2.1.

La tabla 3 muestra la misma información que la tabla 2, para el modelo sin transbordos con el caso de Rivera. Podemos observar que en este experimento, el modelo pudo ser resuelto de forma óptima en un tiempo acotado. Además, la metaheurística encontró una solución con un valor objetivo muy cercano al óptimo global.

Estos resultados muestran que bajo ciertas condiciones (que son válidas en un contexto dado), el modelo puede ser resuelto de forma óptima, en este caso cuando es aplicado a un caso real pequeño.

O_e	O_a	I_e	I_a	T_e	T_a
536,14	537,69	3,51	3,23	90	30

Tabla 3: modelo sin transbordos

4.3. Sensibilidad al conjunto de posibles frecuencias

Dado que la formulación MILP está basada en una discretización del dominio de frecuencias, es esperable que los resultados sean sensibles a la instancia particular del conjunto Θ dado como entrada al modelo. Adicionalmente, la cardinalidad de Θ impacta fuertemente en el tamaño del modelo de grafo y por lo tanto en el tamaño del modelo MILP resultante; esto impacta en el tiempo de ejecución.

En este experimento, comparamos resultados obtenidos con diferentes conjuntos de posibles frecuencias para el caso de Rivera, usando el modelo sin transbordos explicado en la sección 4.2, de modo de poder tomar como referencia, el óptimo global de la tabla 3. La tabla 4 muestra valores objetivo O y sus correspondientes tiempos de ejecución T para los métodos exacto y aproximado. La primera línea corresponde a los mismos resultados reportados en la sección 4.2, usando las frecuencias del sistema existente. La segunda línea agrega dos frecuencias más altas al conjunto anterior; podemos observar que los valores objetivo se mantienen incambiables (ninguna de las nuevas frecuencias agregadas son utilizadas). En la tercera línea, configuramos el conjunto Θ con una cantidad relativamente alta de valores cubriendo el rango $[1/60, 1/5]$ con valores espaciados cada 5 minutos. En este caso el modelo creció considerablemente y el valor objetivo obtenido luego de 48 horas de ejecución (con un gap MIP relativo de 2,3%) es algo menor (menos del 1%) que el valor de las dos primeras líneas.

Este experimento muestra que al cambiar el conjunto Θ de posibles frecuencias (a un conjunto de valores similares), los valores objetivo se mantuvieron similares, mientras que los tiempos de ejecución aumentaron proporcionalmente al tamaño de Θ , la magnitud del aumento es mucho más baja para el método aproximado. En vistas de la aplicación práctica del modelo, podemos asumir que el tamaño de Θ no será configurado con un valor arbitrariamente alto, por lo tanto podríamos esperar que los tiempos de ejecución se mantendrán acotados.

Θ	O_e	O_a	T_e	T_a
{1,60, 1/40, 1/30, 1/20}	536,14	537,69	90	30
{1,60, 1/40, 1/30, 1/20, 1/10, 1/5}	536,14	537,77	210	38
{1,60, 1/55, ... 1/5}	531,88	534,96	*	48

Tabla 4: sensibilidad al conjunto de posibles frecuencias

5. Conclusiones y trabajos futuros

Hemos presentado una nueva formulación y un nuevo método de resolución para el problema de optimización de frecuencias en transporte público. En base al modelo de Constantin y Florian (1995), derivamos una formulación de programación lineal entera mixta (MILP), equivalente a la formulación no lineal en dos niveles propuesta por los autores del modelo original. Dada la naturaleza de esta nueva formulación, es posible resolver el problema de forma óptima, utilizando metodologías para problemas MILP.

Utilizando el modelo MILP exacto, es posible obtener soluciones óptimas o cercanas a las óptimas (con estimación de la cercanía al óptimo) para un caso de prueba relativo a una

ciudad real de 65.000 habitantes cuyo sistema de transporte público tiene 13 líneas. Obtuvimos mejoras de aproximadamente el 3% aplicando el modelo. Esto muestra que incluso en casos pequeños, hay oportunidad de mejorar la eficiencia del sistema aplicando estas metodologías. Además, comprobamos que nuestros porcentajes de mejora son similares a los reportados en la literatura (Constantin and Florian, 1995).

Dado que para nuestro caso de prueba real no fue posible alcanzar el óptimo global luego de un tiempo de ejecución considerable (48 horas), notamos la necesidad de un método alternativo de solución para casos más grandes. En este sentido, propusimos una metaheurística Tabu Search cuyos resultados son competitivos al ser comparados contra el modelo exacto. La metaheurística se ejecuta en un tiempo razonablemente acotado, por lo tanto es adecuada para ser aplicada en la resolución de casos grandes.

Como trabajo futuro, es posible mejorar la eficiencia del modelo exacto incorporando cortes y desigualdades válidas. Por otro lado, la metaheurística admite mejoras, como ser la incorporación de memoria de largo plazo. También podrían considerarse métodos híbridos, con otras metaheurísticas o métodos exactos.

Los aspectos de capacidad de los buses y congestión son elementos claves en el modelado del problema de optimización de frecuencias en transporte público (Gendreau, 1984). En este trabajo no se han tenido en cuenta pero en próximos trabajos deben ser ítems indispensables a ser incorporados.

Finalmente, sería deseable probar las metodologías con casos más grandes. El estado del arte en optimización de frecuencias comprende trabajos donde se utilizan casos con 100 líneas de transporte público. Estamos trabajando en este sentido.

Referencias

- Bard, J.**, *Practical Bilevel Optimization*, Kluwer, 1998.
- Ceder, A. y Wilson N.H.M.** (1986) Bus network design, *Transportation Research B*, 20(4), 331-344.
- Constantin, I. y Florian, M.** (1995) Optimizing frequencies in a transit network: a nonlinear bilevel programming approach. *International Transactions in Operational Research*, 2(2), 149-164.
- Desaulniers, G. y Hickman, M.D.**, Public transit en Laporte, G. y Barnhart, C. (Eds.), *Transportation, Handbooks in Operations Research and Management Science, vol. 14*, Elsevier, Amsterdam, 69-127, 2007.
- Gao, Z., Sun, H. y Shan, L.L.** (2004) A continuous equilibrium network design model and algorithm for transit systems. *Transportation Research B*, 38(3), 235-250.
- Gendreau, M.**, Etude approfondie d'un modèle d'équilibre pour l'affectation de passagers dans les réseaux de transports en commun. Ph.D. thesis, Université de Montréal, publication CRT-384, 1984.
- Glover, F.** (1989) Tabu search - part I. *ORSA Journal on Computing*, 1(3), 190-206.
- Glover, F. y Laguna, M.**, *Tabu Search*, Springer, 1998.
- Han, A.F. y Wilson, N.M.** (1982) The allocation of buses in heavily utilized networks with overlapping routes. *Transportation Research B*, 13(3), 221-232.
- Mandl, C.**, *Applied Network Optimization*. Academic Press, 1980.
- Mauttone, A. y Urquhart, M.** (2009a) A multi-objective metaheuristic approach for the transit network design problem. *Public Transport*, 1(4), 253-273.
- Mauttone, A. y Urquhart, M.** (2009b) A route set construction algorithm for the transit network design problem. *Computers and Operations Research*, 36(8), 2440-2449.
- Schéele, S.** (1981) A supply model for public transit services. *Transportation Research B*, 14, 133-146.

Spiess, H. y Florian, M. (1989) Optimal strategies: a new assignment model for transit networks. *Transportation Research B*, 23(2), 83-102.

Yu, B., Yang, Z. y Yao, J. (2010) Genetic algorithm for bus frequency optimization. *Journal of Transportation Engineering*, 136(6), 576-583.

Agradecimientos: Los autores desean agradecer a la Comisión Sectorial de Investigación Científica de la Universidad de la República (CSIC-UDELAR) por el apoyo financiero concedido.