

## HACIA LA OPTIMIZACION INTEGRAL DEL PROBLEMA DE CARGA DE CONTENEDORES

**Carlos Alberto Vega-Mejía**

Pontificia Universidad Javeriana  
Carrera 7 No. 40 – 62, Bogotá, Colombia  
[vega.carlos@javeriana.edu.co](mailto:vega.carlos@javeriana.edu.co)

**Rafael Guillermo García-Cáceres**

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito  
AK.45 No.205-59 (Autopista Norte), Bogotá, Colombia  
[rafael.garcia@escuelaing.edu.co](mailto:rafael.garcia@escuelaing.edu.co)

**Juan Pablo Caballero-Villalobos**

Pontificia Universidad Javeriana  
[juan.caballero@javeriana.edu.co](mailto:juan.caballero@javeriana.edu.co)

### RESUMEN

Se hace uso del Integral Analysis Method – IAM – [García et al. 2009] para optimizar de manera integral el Problema de Carga de Contenedores (CLP) con carga homogénea. La versión del CLP que se presenta busca la minimización del espacio desperdiciado dentro del contenedor, incluyendo restricciones básicas mencionadas en [Wäscher et al., 2007]: cada una de las cajas almacenadas (i) debe quedar completamente dentro del contenedor y (ii) no puede traslaparse con otras cajas; y las restricciones de peso límite y distribución de peso dentro del contenedor definidas en [Bischoff y Ratcliff, 1995]. La deformidad que puede sufrir una caja cuando soporta a otras que están colocadas directamente encima de ella, es el parámetro estocástico de problema. La fase cuantitativa de IAM es desarrollada mediante un modelo MIP que es resuelto con la meta-heurística GRASP. Finalmente, el criterio cualitativo usado fue la fragilidad de la mercancía almacenada dentro de una caja.

**PALABRAS CLAVE.** Integral Analysis Method (IAM), Carga de Contenedores, Meta-heurística GRASP

**Área principal (Soporte de Decisiones Multicriterio (ADM), Meta-heurísticas (MH), Programación Matemática (PM))**

### ABSTRACT

The Integral Analysis Method – IAM – [García et al., 2009] is used for the integral optimization of the Container Loading Problem (CLP) of homogeneous cargo (all boxes have the same size). The CLP version studied here consists in minimizing the wasted space inside the container, including the basic constraints mentioned in [Wäscher et al., 2007]: each of the packed boxes (i) must lie entirely inside the container and (ii) cannot overlap; and the constraints of container weight limit and weight distribution within the container defined in [Bischoff and Ratcliff, 1995]. The deformity that a given box may endure when other boxes are placed directly on top of it is the stochastic parameter of the problem. The quantitative stage of IAM is developed through of a MIP model that is solved with the GRASP meta-heuristic. Finally, the qualitative criteria used was the fragility of the merchandise stored inside a given box.

**KEYWORDS.** Integral Analysis Method (IAM), Container Loading, GRASP Metaheuristic  
**Main area (Multicriteria Decision Support (ADM), Metaheuristics (MH), Mathematical Programming (PM))**

## 1. Introducción

El Problema de Carga de Contenedores (Container Loading Problem, CLP) es un problema NP-Hard y consiste básicamente en ubicar un grupo de cajas rectangulares dentro de un contenedor rectangular con dimensiones conocidas, buscando maximizar la utilización de su volumen [Pisinger, 2002], teniendo en cuenta las restricciones básicas enunciadas por Wäscher et al. (2007): (i) todas las cajas deben quedar ubicadas totalmente dentro del contenedor, y (ii) las cajas no se pueden traslapar entre sí. Sin embargo la solución de problemas reales acarrea mayor complejidad y el problema puede incluso llegar a ser mal concebido si sólo se considera estos dos tipos de restricciones [Bischoff y Ratcliff, 1995; Bortfledt y Gehring, 2001; Eley 2002].

En este sentido, Bischoff y Ratcliff (1995) enunciaron un conjunto de restricciones prácticas aplicables a situaciones reales: orientación de la mercancía, soporte de la carga, manejo de materiales, estabilidad de la carga, agrupamiento, múltiples destinos, separación de ítems, envíos completos, prioridad de envío, complejidad de patrones de carga, límite de capacidad de carga, y distribución de peso de la mercancía dentro del contenedor. Algunos de estos criterios no son fácilmente cuantificables [ibídem] por ser de naturaleza cualitativa; al respecto, las aproximaciones tradicionales utilizadas en optimización que cardinalizan los aspectos cualitativos pueden generar pérdida de información importante del criterio por lo que es recomendable tratar estos de una manera más natural, como lo es a través de aproximaciones ordinales [García et al., 2009].

El CLP esta naturalmente embebido dentro del contexto de optimización integral que contempla la inclusión de criterios cuantitativos y cualitativos en un problema de optimización [ibídem]. La versión CLP propuesta tratada en este trabajo considera además de los criterios cuantitativos fundamentales enunciados por Wäscher et al. (2007), dos criterios considerados relevantes de ser incluidos por Bischoff y Ratcliff (1995): i) no sobrepasar el límite de peso que puede transportar el contenedor; ii) y que una vez cargado el contenedor, su centro de gravedad esté cerca del centro geométrico de su base (distribución de peso). Por su parte, el criterio cualitativo considerado es la fragilidad de la mercancía dentro de cada caja. Finalmente la consideración estocástica considerada se relaciona con la deformidad que puede experimentar la caja, por la carga que puede llegar a soportar, sus características estructurales u otras razones, que puede llegar a afectar el contenido de la caja.

Se usa el Integral Analysis Method (IAM) [García et al., 2009] para optimizar el CLP. IAM se adapta bien a problemas de optimización estocástica permitiendo el desarrollo de modelamientos más naturales y complejos, más cercanos al contexto real de un problema [ibídem]. Este documento está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se presenta el análisis de los antecedentes. En la sección 3 se desarrolla IAM: en el numeral 3.1 se explica la fase cuantitativa donde se desarrolla el modelo matemático y el método heurístico de solución y se presentan los resultados computacionales; en el numeral 3.2, el análisis cualitativo; y en el numeral 3.3, el análisis de integración. Finalmente en la sección 4 se presentan conclusiones y recomendaciones.

## 2. Antecedentes

El CLP ha sido estudiado desde los primeros años de la década de los sesenta [Pisinger, 2002]. La revisión aquí desarrollada y detallada en la Tabla 1 permitió identificar que los métodos heurísticos y meta-heurísticos son las aproximaciones más comunes para solucionar versiones del problema. También se encontraron soluciones, aunque en menor proporción, obtenidas con modelos de Programación Entera Mixta (MIP), Programación No Lineal (NLP) y Algoritmos de Aproximación (AA). Esta revisión se restringió a estudios relacionados con problemas de empaquetamiento en 3 dimensiones.

Tabla 1. Métodos de solución CLP

Autor	Container filling strategy	Método Exacto	AA	Heurísticas y meta-heurísticas
-------	----------------------------	---------------	----	--------------------------------

	Wall Building	Block Building	Column Building	Multi-Faced Building	Caving Degree	NLP	MIP	Next Fit	First Fit	Local Search	Greedy	Algoritmo Evolutivo	Algoritmos Genéticos	Tabu Search	Tree Search	Simulated Annealing	Bees Algorithm	Particle Swarm Optimization	Artificial Immune Systems	Propia del autor
Lim et al. (2012)			$\pi$								$\pi$									
Gonçalves et al. (2011)			$\pi$										$\pi$							
Thapatsuan et al. (2011)	$\pi$						$\pi$						$\pi$					$\pi$	$\pi$	
Ceschia y Schaerf (2011)		$\pi$												$\pi$						
Türkay y Gülesin (2011)	$\pi$																$\pi$			
He y Huang (2010)					$\pi$															
Huang y He (2009b)					$\pi$						$\pi$									
Huang y He (2009a)					$\pi$															$\pi$
Chien et al. (2009)	$\pi$																			$\pi$
Soak et al. (2008)										$\pi$		$\pi$								
Wang et al. (2008)		$\pi$																		$\pi$
Birgin et al. (2005)						$\pi$														
Chien y Deng (2004)	$\pi$																			$\pi$
Lewis et al. (2004)													$\pi$							
Bortfeldt et al. (2003)		$\pi$												$\pi$						
Lim et al. (2003)				$\pi$																$\pi$
Miyazawa y Wakabayashi (2003)								$\pi$	$\pi$											
Eley (2002)		$\pi$									$\pi$				$\pi$					
Pisinger (2002)	$\pi$														$\pi$					
Bortfeldt y Gehring (2001)	$\pi$										$\pi$		$\pi$							
Teng et al. (2001)																				$\pi$
Davies y Bischoff (1999)	$\pi$	$\pi$	$\pi$																	$\pi$
Xue y Lai (1997b)							$\pi$													
Xue y Lai (1997a)	$\pi$																			$\pi$
Bischoff y Ratcliff (1995)			$\pi$																	$\pi$
Chen et al. (1995)							$\pi$													

La técnica de solución y el conjunto de restricciones contempladas en cada uno de estos estudios se encuentran en las Tablas 1 y 2, respectivamente. En cuanto a las restricciones

consideradas, se observa que comúnmente se trabajan las básicas definidas por Wäscher et al. (2007): no sobrepasar el volumen del contenedor y no permitir el traslape de cajas. Se registran pocos estudios relacionados con CLP que incluyan algunas de las restricciones definidas por Bischoff y Ratcliff (1995).

**Tabla 2. Restricciones incluidas**

Autor	Restricciones								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Lim et al. (2012)	$\pi$	$\pi$		$\pi$					
Gonçalves et al. (2011)	$\pi$	$\pi$		$\pi$	$\pi$				
Thapatsuwan et al. (2011)	$\pi$	$\pi$							
Ceschia y Schaerf (2011)	$\pi$	$\pi$		$\pi$		$\pi$		$\pi$	$\pi$
Türkay y Gülesin (2011)	$\pi$	$\pi$		$\pi$					
He y Huang (2010)	$\pi$	$\pi$		$\pi$					
Huang y He (2009b)	$\pi$	$\pi$							
Huang y He (2009a)	$\pi$	$\pi$							
Chien et al. (2009)	$\pi$	$\pi$			$\pi$				
Soak et al. (2008)	$\pi$	$\pi$							
Wang et al. (2008)	$\pi$	$\pi$							
Birgin et al. (2005)	$\pi$	$\pi$							
Chien y Deng (2004)	$\pi$	$\pi$							
Lewis et al. (2004)	$\pi$	$\pi$							
Bortfeldt et al. (2003)	$\pi$	$\pi$			$\pi$				
Lim et al. (2003)	$\pi$	$\pi$							
Miyazawa y Wakabayashi (2003)	$\pi$	$\pi$							
Eley (2002)	$\pi$	$\pi$	$\pi$						
Pisinger (2002)	$\pi$	$\pi$							
Bortfeldt y Gehring (2001)	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$			$\pi$	$\pi$
Teng et al. (2001)	$\pi$	$\pi$	$\pi$		$\pi$				
Davies y Bischoff (1999)	$\pi$	$\pi$	$\pi$						
Xue y Lai (1997b)	$\pi$	$\pi$						$\pi$	
Xue y Lai (1997a)	$\pi$	$\pi$					$\pi$		
Bischoff y Ratcliff (1995)	$\pi$	$\pi$			$\pi$	$\pi$			
Chen et al. (1995)	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$					

- |                                               |                                  |
|-----------------------------------------------|----------------------------------|
| 1. Volumen del contenedor                     | 6. Múltiples destinos            |
| 2. Las cajas no se traslapan                  | 7. Frecuencia de envíos          |
| 3. Distribución de peso dentro del contenedor | 8. Límite de peso del contenedor |
| 4. Restricciones de orientación               | 9. Apilamiento de cajas          |
| 5. Estabilidad de la carga                    |                                  |

Los trabajos de Ceschia y Schaerf (2011), Eley (2002), Bortfeldt y Ghering (2001), Davies y Bischoff (1999), Xue y Lai (1997b) y Chen et al. (1995) son los que incluyen más consideraciones, aunque ninguno contempla el nivel de complejidad tratado aquí. Estos estudios resuelven el CLP buscando minimizar el espacio desperdiciado en el contenedor. Es necesario mencionar que todos los criterios modelados en las versiones del CLP fueron tratadas de manera cuantitativa, incluso aquellas que podrían o serían naturalmente tratadas de forma cualitativa como soporte de la carga debido a la fragilidad de la mercancía, separación de ítems, prioridad de envíos o el patrón de carga.

### 3. Optimización Integral del CLP

El análisis cuantitativo plantea un modelo de programación matemática para el CLP y el método heurístico para dar solución al problema. En el análisis cualitativo y de integración se utilizan los desarrollos propuestos en IAM.

#### 3.1. Análisis Cuantitativo

El modelo que se presenta en la sección 3.1.2, se plantea para carga homogénea (todas las cajas tienen las mismas dimensiones cuando no tienen carga encima) y se incluye la condición estocástica que se define en la sección 3.1.1.

### 3.1.1. Condición Estocástica

La altura de cada caja puede verse disminuida por la carga que se ubique encima de ella. Esta deformación podría depender del contenido de la caja y de sus características estructurales. Se asume que la deformidad experimentada por una caja dependerá del peso asociado al número de cajas que soporta y de forma directamente proporcional, es decir, a mayor peso soportado mayor deformidad, así ésta habrá alcanzado su máxima deformidad cuando la caja soporta su máximo peso permitido. Adicionalmente se incluye un elemento estocástico que modela la deformidad no explicada por la relación mencionada. El comportamiento determinístico de la deformidad se describe en la Figura 1.

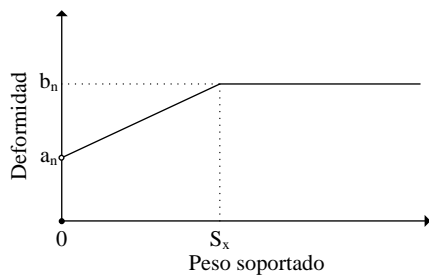


Figura 1. Peso soportado – Deformidad

La deformidad se modeló de la siguiente manera:

$$d_{xn} = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow c_x = 0 \vee n = n_{max} \\ a_n + \frac{c_x}{S_x}(b_n - a_n) + \varepsilon_{xn} & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (1)$$

Dónde

- $n$ : nivel donde se encuentra ubicada la caja  $x$ ,  $n \in \{1, 2, \dots, n_{max} = \lfloor CH/BH \rfloor\}$
- $d_{xn}$ : deformidad experimentada por la caja  $x$  en el nivel  $n$ ,  $d_{xn} \geq 0$ .
- $c_x$ : peso soportado por la caja  $x$  que es igual a  $\sum_{i=n+1}^{n_{max}} P_{yi}$ , donde  $P_{yi}$  es el peso que ejerce la caja  $y$  en el nivel  $i$ , con  $y \neq x$ .
- $S_x$ : peso máximo que puede soportar la caja  $x$ , con  $S_x > 0$ .
- $a_n$ : deformidad mínima determinística que se experimenta en el nivel  $n$ .
- $b_n$ : deformidad máxima determinística que se experimenta en el nivel  $n$ .
- $\varepsilon_{xn}$ : parámetro estocástico que explica la deformidad no atribuible a la relación funcional de la caja  $x$  cuando se encuentra en el nivel  $n$ . El parámetro tiene asociada una función de densidad de probabilidad distinta para cada  $n$ ,  $\varepsilon_{xn} \in \mathbb{R}$  y  $\theta_n^{min} \leq \varepsilon_{xn} \leq \theta_n^{max}$ .

Esta manera de establecer la deformación facilita el modelamiento de instancias en las que una caja pueda deformarse más que otra, así soporten el mismo peso y número de cajas, debido, por ejemplo, a sus características estructurales o las de la mercancía que almacene en su interior; en síntesis por razones desconocidas que no pueden ser atribuibles a la razón funcional descrita.

### 3.1.2. Modelo MIP

Debido a que las cajas tienen las mismas dimensiones, el contenedor puede dividirse en múltiples celdas con las mismas dimensiones de una caja (Figura 2). El modelo no permite la rotación de las cajas, es decir, cada una de las dimensiones de la caja es paralela a su similar del contenedor. Bajo este contexto un hipotético contenedor puede ser concebido para que contenga perfectamente a las cajas en lo ancho y largo, porque para efectos prácticos el espacio vacío (zona punteada en la Figura 2) puede ser completado con material de relleno.

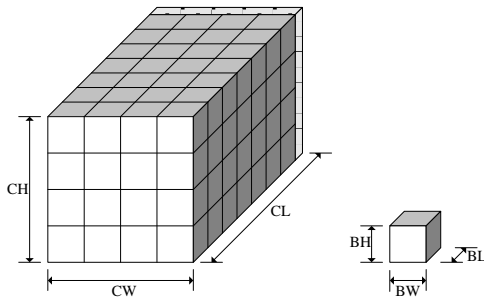


Figura 2. División del contenedor

El modelo tiene los siguientes parámetros:

- $I$ : Cantidad de cajas a almacenar.
- $(CL, CW, CH)$ : Dimensiones del contenedor (largo, ancho, alto).
- $(BL, BW, BH)$ : Dimensiones de las cajas (largo, ancho, alto). Se asume que el centro de gravedad de cada caja coincide con su centro geométrico.
- $(J, K, L)$ : Número de cajas que pueden caber en el contenedor a lo largo, ancho y alto. Donde  $J = \{1, \dots, j_{max} = \lfloor CL/BL \rfloor\}$ ,  $K = \{1, \dots, k_{max} = \lfloor CW/BW \rfloor\}$  y  $L = \{1, \dots, l_{max} = \lfloor CH/BH \rfloor\}$ .
- $P_i$ : Peso de la caja  $i$ .
- $S_i$ : Máximo peso que puede soportar la caja  $i$ , con  $S_i > 0$ .
- $P_C$ : Capacidad máxima de carga del contenedor, medido en unidad de peso.
- $G$ : Se requiere que la distancia entre el centro de gravedad de la carga y el centro de gravedad del contenedor se encuentre delimitada por un valor predeterminado ( $G$ ). Esta distancia sólo se tomará sobre el largo del contenedor (Figura 3).

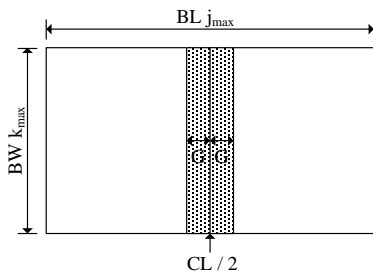


Figura 3. Vista de planta del contenedor

- $A_n$ : Mínima deformidad determinística que se experimenta en el  $n$ -ésimo nivel del contenedor.
- $B_n$ : Máxima deformidad determinística que se experimenta en el  $n$ -ésimo nivel del contenedor.
- $f_n$ : Función de densidad de probabilidad que determina la deformidad estocástica que experimenta una caja en el  $n$ -ésimo nivel del contenedor.
- $\theta_n^{min}$ : Mínimo valor que puede tomar el parámetro estocástico de deformidad de las cajas ubicadas en el  $n$ -ésimo nivel del contenedor.
- $\theta_n^{max}$ : Máximo valor que puede tomar el parámetro estocástico de deformidad de las cajas ubicadas en el  $n$ -ésimo nivel del contenedor.

Las variables utilizadas son:

- $x_{ijkl} = \begin{cases} 1 & \text{Si la caja } i \text{ se ubica en la celda } (j, k, l) \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{cases}$
- $c_{ijkl}$ : Carga total soportada por la caja  $i$  cuando se ubica en la celda  $(j, k, l)$ .
- $\varepsilon_{il}$ : Deformidad estocástica experimentada por la caja  $i$  cuando se ubica en el nivel  $l$ .
- $d_{ijkl}$ : Deformidad total experimentada por la caja  $i$  cuando se ubica en la celda  $(j, k, l)$ .

La función objetivo es la minimización del espacio no ocupado dentro del contenedor:

$$\min z = -BL \cdot BW \cdot \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{j_{max}} \sum_{k=1}^{k_{max}} \sum_{l=1}^{l_{max}} (BH - d_{ijkl}) x_{ijkl} \quad (2)$$

Las restricciones del modelo son las siguientes:

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{j_{max}} \sum_{k=1}^{k_{max}} \sum_{l=1}^{l_{max}} x_{ijkl} \leq j_{max} k_{max} l_{max} \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{j_{max}} \sum_{k=1}^{k_{max}} \sum_{l=1}^{l_{max}} x_{ijkl} \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, I\} \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^I x_{ijkl} \leq 1 \quad \forall j \in J; \forall k \in K; \forall l \in L \quad (5)$$

$$x_{ijkl} \leq \frac{1}{l-1} \sum_{n=1}^{l-1} \sum_{m=1, m \neq i}^I x_{mjkn} \quad \forall i \in \{1, \dots, I\}; \forall j \in J; \forall k \in K; l \in \{2, \dots, l_{max}\} \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^I P_i \sum_{j=1}^{j_{max}} \sum_{k=1}^{k_{max}} \sum_{l=1}^{l_{max}} x_{ijkl} \leq P_C \quad (7)$$

$$-2G \leq BL \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{j_{max}} \sum_{k=1}^{k_{max}} \sum_{l=1}^{l_{max}} (2j-1) x_{ijkl} P_i}{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{j_{max}} \sum_{k=1}^{k_{max}} \sum_{l=1}^{l_{max}} x_{ijkl} P_i} - CL \leq 2G \quad (8)$$

$$c_{ijkl} = \sum_{m=1, m \neq i}^I \sum_{n=l+1}^{l_{max}} x_{mjkn} P_m \quad \forall i \in \{1, \dots, I\}; \forall j \in J; \forall k \in K; \forall l \in L \quad (9)$$

$$c_{ijkl} \leq S_i \quad \forall i \in \{1, \dots, I\}; \forall j \in J; \forall k \in K; \forall l \in L \quad (10)$$

$$c_{ijkl} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, I\}; \forall j \in J; \forall k \in K; l = l_{max} \quad (11)$$

$$\varepsilon_{il} = f_l(\theta_l^{min}, \theta_l^{max}) \quad \forall i \in \{1, \dots, I\}; \forall l \in L \quad (12)$$

$$d_{ijkl} = A_l + \frac{(B_l - A_l)}{S_i} c_{ijkl} + \varepsilon_{il} \quad \forall i \in I; \forall j \in J; \forall k \in K; \forall l \in \{1, \dots, l_{max} - 1\} \quad (13)$$

$$d_{ijkl} = 0 \quad \forall i \in I; \forall j \in J; \forall k \in K; l = l_{max} \quad (14)$$

La restricción (3) establece que no se puede superar el volumen del contenedor; la restricción (4), que cada caja podría ubicarse sólo en una celda; la restricción (5), que una celda sólo podrá ser ocupada por una caja; la restricción (6), que todas las cajas que se almacenan y no están en contacto con el piso del contenedor deben ser soportadas por otras cajas; la restricción (7), que no puede superarse el límite de peso que puede cargarse en el contenedor; la restricción (8), que el centro de gravedad del contenedor cargado no puede alejarse más de  $G$  unidades del centro de la base; las restricciones (9) a (11), las condiciones de soporte de peso de las cajas almacenadas; y las restricciones (12) a (14), la deformidad que experimentan las cajas que soportan peso encima.

### 3.1.3. Método Heurístico

Pese a que la revisión no reportó evidencia de la utilización de la meta-heurística GRASP (Greedy Randomized Adaptive Search Procedure) para la solución de un problema de empaquetamiento en 3 dimensiones, ésta ha mostrado muy buenos resultados en problemas combinatorios como: programación de la producción [Vega y Caballero, 2010; Binato et al.,

2002]; y cadena de abastecimiento [Carreto y Baker, 2002; Delmaire et al., 1999], etc. En síntesis, la evidencia de buen desempeño de esta meta-heurística en la solución de problemas combinatorios definió su uso para la solución de nuestro problema.

GRASP consta de un proceso iterativo de dos fases: constructiva y búsqueda local. En la fase constructiva se genera una solución factible, cuya vecindad es examinada hasta que se encuentra un mínimo local. Al final la mejor solución factible encontrada se deja como solución final del problema [Glover et al., 2003].

Nuestra versión de GRASP resuelve en la etapa de construcción el problema relajado en la restricción de centro de gravedad (8). Para solventar esto, en la etapa de búsqueda local se considera la factibilidad de esta restricción. De esta manera el procedimiento asegura la factibilidad de la solución.

Para la fase de construcción es necesaria la definición de una función de utilidad para evaluar cada elemento que podría conformar la solución inicial. Esta función se utiliza para encontrar los mejores candidatos a ubicar en una posición determinada del contenedor. El llenado del contenedor se realiza de piso a techo. Para cada posición disponible la función de utilidad se define como:

$$f_c(i, j, k, l) = \begin{cases} b_1 + \varepsilon_{i1} & \text{si } l = 1 \\ b_l + \varepsilon_{il} + \sum_{n=1}^{l-1} \sum_{m=1, m \neq i}^l d_{mn} & \text{si } l > 1 \end{cases} \quad (15)$$

Dónde:

- $i$ : representa la caja que se está evaluando para la celda  $(j, k, l)$  del contenedor.
- $b_l$ : es la máxima deformidad determinística que puede experimentar una caja en el nivel  $l$ .
- $\varepsilon_{il}$ : es la deformidad estocástica que puede experimentar la caja  $i$  ubicada en el nivel  $l$ .
- $d_{mn}$ : es la deformidad experimentada por la caja  $m$  localizada en la celda  $(j, k, n)$  del contenedor.

Cuando  $l = 1$ , es decir se están examinando las posiciones disponibles en el piso del contenedor, la RCL se construye con las cajas que experimentarían menor deformidad si se les colocara encima el máximo peso que podrían soportar. Para los niveles restantes del contenedor ( $l > 1$ ), la RCL se construye con las cajas que experimentarían la menor deformidad al colocarles encima el peso máximo que podrían soportar y que generarían al mismo tiempo la menor deformidad a las cajas que las soportan.

La fase de búsqueda local de GRASP se diseñó para minimizar la deformidad experimentada por las cajas almacenadas y mejorar el balance de su carga, esto último acercando el centro de gravedad del contenedor cargado al centro geométrico de su base en su dimensión más larga, su longitud. La búsqueda local consta de cuatro etapas:

- Etapa 1: se intercambian las posiciones que se asignaron a pares de cajas con el algoritmo 2-Optimal propuesto en Croes (1958), buscando reducir la deformidad total, para minimizar el volumen desperdiciado.
- Etapa 2: si hay mejoras en la Etapa 1 existe entonces una mejor ubicación de las cajas dentro del contenedor. Esta etapa se encarga de verificar si existen cajas no incluidas en la solución que puedan ser almacenadas. Si existen, se repite la Etapa 1.
- Etapa 3: el contenedor es dividido en  $j_{max}$  muros de dimensiones  $BL, BW, k_{max}, BHL_{max}$ . Estos muros son intercambiados con el algoritmo 2-Optimal, y se escogen los intercambios que permitan un acercamiento entre el centro de gravedad y la mitad de la longitud del contenedor.
- Etapa 4: el contenedor es dividido en  $k_{max}$  muros de dimensiones  $BL, j_{max}, BW, BHL_{max}$ . Cada uno de estos muros es reflejado para acercar el centro de gravedad a la mitad de la longitud del contenedor. Si hay una mejora en el centro de gravedad se repite la Etapa 3.

Esta implementación de GRASP se probó con un problema de 24 cajas y otro de 72 cajas, con  $\alpha$  de 0.05, 0.10, 0.15 y 0.20. Para cada  $\alpha$ , GRASP se ejecutó 1000 veces, cada ejecución con 500 iteraciones. Para el problema de 24 cajas los mejores resultados se obtuvieron con  $\alpha = 0.15$ ; para el de 72 cajas, con  $\alpha = 0.05$ .



Tabla 3. Resumen de resultados

No. Cajas	$\alpha$	Tiempo promedio de 1 ejecución x 500 iteraciones (seg)	Uso del espacio del contenedor (%)			Uso del peso límite del contenedor (%)			Distancia del centro de gravedad de la carga al centro de la base (cm)		
			Min	Max	Avg	Min	Max	Avg	Min	Max	Avg
24	0.15	12.12	89.86	90.17	89.98	98.66	99.95	99.56	0.01	12.79	2.92
72	0.05	53.18	81.32	81.54	81.44	99.18	100.00	99.83	0.00	1.40	0.13

Se puede apreciar que el método de solución genera buenos resultados al obtener un porcentaje mínimo de utilización de volumen disponible superior al 80%, y llenando el contenedor casi a la totalidad de su capacidad de peso. Adicionalmente y teniendo en cuenta que las instancias fueron probadas con un contenedor de dimensiones 587cm x 233 cm x 220 (largo, ancho y alto, respectivamente), tal como fue utilizado en [Eley 2002; Davies y Bischoff, 1999; Bischoff y Ratcliff, 1995], es notable que la máxima desviación del centro de gravedad al centro de la base del contenedor es inferior 2.5% de la longitud total del mismo.

Se realizó un análisis de Pareto sobre las soluciones obtenidas a ambos problemas: para 24 cajas se examinaron el 66% de las soluciones; y para 72 cajas, el 68% de las soluciones. Estos porcentajes corresponden a 20 alternativas de cada uno de los problemas, sus probabilidades ajustadas, valor esperado de la función objetivo y desviación estándar del valor de función objetivo, especificados para IAM fueron:

Tabla 4. Frecuencia, probabilidad, valor esperado y desviación de alternativas seleccionadas

i	24 cajas				72 cajas			
	Frecuencia	P(i), $\alpha$	E(zi)	$\sigma Zi$	Frecuencia	P(i), $\beta$	E(zi)	$\sigma Zi$
1	50	0.0765	-27,130,328.4503	0	45	0.0667	-24,497,492.7011	0
2	49	0.0749	-27,069,022.1712	0	39	0.0578	-24,520,440.0663	0
3	47	0.0719	-27,079,711.8588	0	39	0.0578	-24,512,652.0699	0
4	37	0.0566	-27,071,467.0888	0	38	0.0563	-24,516,202.0138	0
5	36	0.0550	-27,066,716.6023	0	38	0.0563	-24,502,754.7084	0
6	35	0.0535	-27,068,471.0632	0	38	0.0563	-24,496,098.7389	0
7	35	0.0535	-27,088,277.5107	0	37	0.0548	-24,504,513.1559	0
8	34	0.0520	-27,072,118.7352	0	36	0.0533	-24,506,201.4630	0
9	31	0.0474	-27,052,647.8558	0	35	0.0519	-24,515,697.0110	0
10	30	0.0459	-27,066,675.3657	0	35	0.0519	-24,503,437.4409	0
11	30	0.0459	-27,093,102.3737	0	33	0.0489	-24,499,385.3670	0
12	29	0.0443	-27,075,607.8937	0	33	0.0489	-24,493,609.8728	0
13	29	0.0443	-27,070,443.4751	0	32	0.0474	-24,504,895.3574	0
14	28	0.0428	-27,075,537.4827	0	31	0.0459	-24,491,334.7171	0
15	27	0.0413	-27,065,936.3019	0	30	0.0444	-24,496,901.1626	0
16	27	0.0413	-27,059,497.8935	0	29	0.0430	-24,515,483.4574	0
17	26	0.0398	-27,070,016.2422	0	29	0.0430	-24,507,811.1248	0
18	25	0.0382	-27,091,519.0548	0	27	0.0400	-24,526,575.7616	0
19	25	0.0382	-27,071,515.1479	0	26	0.0385	-24,511,051.1289	0
20	24	0.0367	-27,052,190.1312	0	25	0.0370	-24,495,802.2597	0

### 3.2. Análisis Cualitativo

Este análisis se basa en SMAA-O (Stochastic Multicriteria Acceptability Analysis with Ordinal data) [Lahdelma et al., 2003]. La variable cualitativa fue definida como la fragilidad de los elementos dentro de las cajas, que fueron clasificados de acuerdo a una escala de 1 a 3, donde 3 indicó mercancía frágil y 1, mercancía resistente; mientras que 2 se asignó a cajas con materiales de resistencia media. Cada una de las 20 alternativas para cada problema fue calificada según la siguiente tabla que establece penalizaciones para las cajas de acuerdo a sus contenidos y el nivel en que fue ubicada dentro del contenedor.

Tabla 5. Penalización para ubicación de cajas

Penalización para la ubicación de cajas para el problema de 24 cajas				Penalización para la ubicación de cajas para el problema de 72 cajas			
Niveles del contenedor	Resistencia de la mercancía dentro de la caja			Niveles del contenedor	Resistencia de la mercancía dentro de la caja		
	1	2	3		1	2	3
1	1	3	3	1	1	2	3
2	2	1	3	2	2	1	2
3	3	1	2	3	3	3	1
4	3	2	1				

Para cada alternativa se obtuvo la suma total de las penalizaciones asignadas a las cajas almacenadas de acuerdo a la resistencia de su contenido y su ubicación. Los resultados fueron clasificados en 4 categorías de acuerdo a la siguiente tabla (Likert), que muestra los valores ordinales asignados a las diferentes alternativas.

Tabla 6. Tablas Likert para los problemas de 24 cajas y 72 cajas.

Tabla Likert para el problema de 24 cajas		Tabla Likert para el problema de 72 cajas	
Criterio	Valor ordinal	Criterio	Valor ordinal
Si total < 37	1	Si total < 109	1
Si $37 \leq \text{total} < 49$	2	Si $109 \leq \text{total} < 145$	2
Si $49 \leq \text{total} < 61$	3	Si $145 \leq \text{total} < 181$	3
Si $61 \leq \text{total}$	4	Si $181 \leq \text{total}$	4

Finalmente, los datos de entrada para IAM se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 7. Parámetros ordinales e indicadores.

Parámetros ordinales e indicadores para el problema de 24 cajas				Parámetros ordinales e indicadores para el problema de 72 cajas			
$a$	$F(a)$	Fragilidad, $j: 1$	$b_1^a$	$a$	$F(a)$	Fragilidad, $j: 1$	$b_1^a$
1	t: {4, 5, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 19}	1	1	1	t: {12, 17}	2	1
2	t: {1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 15, 17, 20}	2	0	2	t: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20}	3	0

### 3.3. Análisis de Integración

El SMAA determinístico [Lahdelma and Salminen, 2001] se utiliza para completar el análisis de integración. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Tabla 8. Resultados de la fase de integración.

Indicadores de integración para el problema de 24 cajas			Indicadores de integración para el problema de 72 cajas		
$t$	$p_1(e^t)$	$d_1^t$	$t$	$p_1(e^t)$	$d_1^t$
1	0	0.0109	1	0.0667	0.0088
4	0.0566	0.9891	12	0.0489	0.9912
5, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 19.	$\alpha$	1	17	$\beta$	0
2, 3, 6, 7, 8, 9, 15, 17, 20.	0	0	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20.	0	0

Los resultados indican que las alternativas 4 y 12 constituyen los patrones de carga más favorables para los problemas de 24 cajas y 72 cajas, respectivamente. Este resultado es interesante, en el sentido que aquellas alternativas que tenían el mejor porcentaje de uso del volumen disponible del contenedor, no resultaron adecuadas al considerar la fragilidad de la carga transportada.

## 4. Conclusiones y Recomendaciones

Este proyecto utilizó los aportes realizados por IAM [García et al., 2009] para optimizar integralmente el CLP, incluyendo un conjunto de restricciones que no habían sido trabajadas simultáneamente en los estudios revisados. También se presenta un modelo matemático bastante detallado para el CLP, algo que no se encuentra fácilmente en la literatura del problema. Además, se implementó como método de solución una meta-heurística de la cual no se encontró evidencia de su uso para resolver problemas de CLP: GRASP. Finalmente, este trabajo incluye criterios estocásticos y cualitativos dentro del planteamiento del CLP, características que no se encontraron en los estudios de problemas de empaquetamiento dentro de la revisión realizada.

Por último, nuevas perspectivas de investigación podrían surgir del presente proyecto si se tiene en cuenta que: (i) el desempeño y calidad de soluciones del método de solución propuesto aún están por definirse, debido a que dentro de la revisión no se encontraron estudios con las mismas características de este trabajo contra los cuales se pudieran hacer comparaciones; (ii) la definición de la relación funcional para explicar la deformidad de las cajas no fue definida experimentalmente; (iii) se podría sugerir un modelo para carga heterogénea, es decir, para cajas con diferentes tamaños; y (iv) se podrían incluir restricciones adicionales del conjunto definido por Bischoff y Ratcliff (1995), ya sean de naturaleza cuantitativa o cualitativa.

## 5. Referencias

- Binato S.; Hery W.J.; Loewenstern D. & Resende M.G.C.** (2002). A GRASP for job shop scheduling. C.C. Ribeiro and P. Hansen (eds.), *Essays and Surveys in Metaheuristics*. Kluwer Academic Publishers, 59-79.
- Birgin E.G.; Martínez J.M. & Ronconi D.P.** (2005). Optimizing the packing of cylinders into a rectangular container: A nonlinear approach. *European Journal of Operational Research*, 160, 19-33.
- Bischoff E.E. & Ratcliff M.S.W.** (1995). Issues in the development of approaches to container loading. *Omega, The International Journal of Management Science*, 23, 377-390.
- Bortfeldt A. & Gehring H.** (2001). A hybrid genetic algorithm for the container loading problem. *European Journal of Operational Research*, 131, 143-161.
- Bortfeldt A.; Gehring H. & Mack D.** (2003). A parallel Tabu search algorithm for solving the container loading problem. *Parallel Computing*, 29, 641-662.
- Carreto C. & Baker B.** (2002). A GRASP interactive approach to the vehicle routing problem with backhauls. C.C. Ribeiro and P. Hansen (eds.), *Essays and Surveys in Metaheuristics*. Kluwer Academic Publishers, pp. 185-199.
- Ceschia S. & Schaerf A.** (2011), Local search for a multi-drop multi-container loading Problem. *Journal of Heuristics*, disponible en: <http://dx.doi.org/10.1007/s10732-011-9162-6>
- Chen C.S.; Lee S.M. & Shen Q.S.** (1995), An analytical model for the container loading problem. *European Journal of Operational Research*, 80, 68-76.
- Chien C-F & Deng J-F** (2004), A container packing support system for determining and visualizing container packing patterns. *Decision Support Systems*, 37, 23-34.
- Chien C-F; Lee C-Y; Huang Y-C & Wu W-T** (2009). An efficient computational procedure for determining the container loading pattern. *Computers & Industrial Engineering*, 56, 965-978.
- Croes, A.** (1958), A method for solving traveling-salesman problems. *Operations Research*, 5, 791-812.
- Davies A.P. & Bischoff E.E.** (1999), Weight distribution considerations in container loading. *European Journal of Operational Research*, 114, 509-527.
- Delmaire H.; Díaz J.A.; Fernández E. & Ortega M.** (1999), Reactive GRASP and Tabu Search based heuristics for the single source capacitated plant location problem. *INFOR*, 37, 194-225.
- Eley M.** (2002), Solving container loading problems by block arrangement. *European Journal of Operational Research*, 141, 393-409.
- García R.G.; Aráoz J.A. & Palacios F.** (2009), Integral Analysis Method – IAM. *European Journal of Operational Research*, 192, 891-903.

- Glover F. & Kochenberger G.A.**, *Handbook of Metaheuristics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.
- Gonçalves J.F. & Resende M.** (2012), A parallel multi-population biased random-key genetic algorithm for a container loading problem. *Computers & Operations Research*, 39, 179–190.
- He, K. & Huang W.** (2010), A caving degree based flake arrangement approach for the container loading problem. *Computers & Industrial Engineering*, 59, 344–351.
- Huang W. & He K.** (2009a), A caving degree approach for the single container loading problem. *European Journal of Operational Research*, 196, 93-101.
- Huang W. & He K.** (2009b), A new heuristic algorithm for cuboids packing with no orientation constraints. *Computers & Operations Research*, 36, 425-432.
- Lahdelma, R., Salminen, P.**, (2001), SMAA-2: Stochastic multicriteria acceptability analysis for group decision making. *Operations Research*, 49 (3), 444–454.
- Lahdelma, R., Miettinen, K., Salminen, P.**, (2003), Ordinal criteria in Stochastic multicriteria acceptability analysis. *European Journal of Operational Research*, 147, 117–127.
- Lewis J.E.; Ragade R.K.; Kumar A. & Biles W.E.** (2004), A distributed chromosome genetic algorithm for bin-packing. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 21, 486-495.
- Lim A.; Rodrigues B. & Wang Y.** (2003), A multi-faced buildup algorithm for three-dimensional packing problems. *Omega, The International Journal of Management Science*, 31, 471-481.
- Lim A.; Ma H.; Xu J. & Zhang X.** (2012), An iterated construction approach with dynamic prioritization for solving the container loading problems. *Expert Systems with Applications*, 39, 4292–4305.
- Miyazawa F.K. & Wakabayashi Y.** (2003), Parametric on-line algorithms for packing rectangles and boxes. *European Journal of Operational Research*, 150, 281-292.
- Pisinger D.** (2002), Heuristics for the container loading problem. *European Journal of Operational Research*, 141, 382–392.
- Soak S-M; Lee S-W; Yeo G-T & Jeon M-G** (2008), An effective evolutionary algorithm for the multiple container packing problem. *Progress in Natural Science*, 18, 337-344.
- Thapatsawan P.; Pongcharoen P.; Hicks C. & Chainate W.** (2011), Development of a stochastic optimisation tool for solving the multiple container packing problems. *International Journal of Production Economics*, disponible en: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijpe.2011.05.012>
- Teng H-F; Sun S-L; Liu D-Q & Li Y-Z** (2001), Layout optimization for the objects located within a rotating vessel – a three-dimensional problem with behavioral constraints. *Computers & Operations Research*, 28, 521-535.
- Türky D. & Gülesin S.D.** (2011), A hybrid ‘bee(s) algorithm’ for solving container loading problems. *Applied Soft Computing*, 11, 2854-2862.
- Vega-Mejía C.A. & Caballero-Villalobos J.P.** (2010), Uso combinado de GRASP y Path-Relinking en la programación de producción para minimizar la tardanza total ponderada en una máquina. *Ingeniería y Universidad*, 14, 1, 79-96.
- Wang Z.; Li K.W. & Levy J.K.** (2008), A heuristic for the container loading problem: A tertiary-tree-based dynamic space decomposition approach. *European Journal of Operational Research*, 191, 86–99.
- Wäscher G.; Haubner H. & Schumann H.** (2007), An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, 183, 1109-1130.
- Xue J. & Lai K.K.** (1997a), Effective methods for a container packing operation. *Mathematical Computing Modelling*, 25, 75-84.
- Xue J. & Lai K.K.** (1997b), A study on cargo forwarding decisions. *Computers Industrial Engineering*, 33, 63-66.