IDENTIFICAÇÃO DE SOLUÇÕES ROBUSTAS PARA GESTÃO DA INCERTEZA EM PLMO – UMA ABORDAGEM INTERATIVA

Solange Fortuna Lucas
Faculdades IBMEC-RJ
Av. Presidente Wilson, 118 – 8º andar – Rio de Janeiro
e IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
e-mail: slucas@ibmecrj.br

RESUMO

O desenvolvimento da Engenharia de Sistemas determina o fim das barreiras computacionais aos métodos de apoio a decisão. Este fato, deve ser recebido com entusiasmo e servir de motivação a criação de novas técnicas capazes de tornar factível o uso de modelos matemáticos para a solução de problemas cujos coeficientes sejam obtidos sob incerteza. Muitas vezes, esta incerteza é fruto da subjetividade, sempre presente em problemas complexos. O principal objetivo da abordagem proposta é ajudar a identificar soluções eficientes que tenham um comportamento julgado satisfatório pelo decisor, considerando a variação dos coeficientes do modelo de PLMO em intervalos de números reais e que se baseia em pontos de referência. A abordagem interativa pode encontrar uma solução que seja considerada robusta em relação à *qualidade* (dos valores das funções objetivo) e à *viabilidade*, que somente então é classificada como solução robusta.

PALAVRAS CHAVE Gestão da Incerteza, Programação Linear Multiobjetivo, Abordagem Interativa.

ABSTRACT

The development of Systems Engineering has made it possible to determine the end of computational boundaries of decision support methods. This fact should be received with enthusiasm and serve as motivation in the development of new techniques capable of solving mathematical models with coefficients which were obtained under uncertainty. In many cases, this uncertainty is the fruit of subjectivity, which is always present in complex problems. The principal aim of the presented approach is to help identify efficient solutions that have a behavior that is judged satisfactory by the decision maker, who is confronted with variations of the interval coefficients of the MOLP model, relative to the quality of the solution, by the objective function values, and relative to the viability of the solution.

KEYWORDS. Uncertainty Management, Multi-Objective Linear Programming, Interactive Approach

1 – Introdução

A tomada de decisão gerencial é sempre um grande desafio que requer a superação técnica e intelectual, o bom uso de ferramentas qualitativas e quantitativas aliadas à habilidade da visão prospectiva. Neste ambiente onde a dinâmica dos fatos relevantes que devem ser considerados no momento da tomada de decisão se modifica vorazmente, contar com o apoio de novas técnicas pode representar a sustentabilidade das ações oriundas destas decisões.

Nos tempos atuais podemos considerar que não temos mais restrições computacionais, os desenvolvimentos são acelerados a cada dia o que torna oportuno que haja um esforço científico para utilizá-los em problemas reais.

Representar um problema real por um modelo matemático não é uma tarefa simples na maioria das vezes e considerar que os parâmetros do modelo se encontram sob incerteza ainda requer mais conhecimento sobre o problema. Muitas vezes esta incerteza está associada à própria dinâmica do ambiente competitivo, outras vezes à obtenção dos dados do problema e também a erros de medição.

Na literatura científica alguns autores apresentam conceitos que pretendem diferenciar, como "risco", "imprecisão", "incerteza" entre outros, que se desenvolvem por vezes na área determinística e outras na área probabilística.

O objetivo principal deste trabalho e apresentar uma técnica de apoio a tomada de decisão no campo determinístico, onde a incerteza é introduzida no modelo matemático como intervalos de números reais. Esta área de pesquisa ainda não possui uma denominação específica, Oliveira e Antunes (2007) referem-se a "Programação Intervalar" em português, mas não deve ser associada à tradução de *Interval Programming* que é utilizado em Problemas de Programação Não Linear onde a área de decisão encontrada como solução é representada por um vetor intervalo multidimensional (Hansen, 1992).

Lucas (2005) desenvolve o Método Sonar criando uma nova forma de modelagem da incerteza em problemas de Programação Linear com um ou mais objetivos a serem otimizados, onde é utilizada a teoria de Análise de Intervalos, abrindo espaço para a elaboração de metodologias interativas de apoio a decisão.

Neste trabalho uma metodologia interativa é proposta, com base no Método Sonar, que tem como objetivo identificar vértices eficientes em um problema de Programação Linear Multiobjetivo onde alguns ou todos os coeficientes das funções objetivo, restrições ou limites das restrições sejam intervalos de números reais e, sempre que possível, identificar soluções robustas para a incerteza do problema em questão.

A abordagem proposta tem como principal objetivo ajudar a identificar soluções eficientes que tenham um comportamento julgado satisfatório pelo decisor diante da variação de todos os coeficientes em intervalos do modelo de PLMO, quer em relação à qualidade da solução, tendo em conta os valores das funções objetivo, quer no que diz respeito à viabilidade da solução. Ou seja, procuramos identificar soluções robustas no sentido em que "aconteça o que acontecer", isto é, para qualquer cenário em que os coeficientes se apresentem dentro dos intervalos, os respectivos valores das funções objetivo nunca estão abaixo de determinados níveis de reserva impostos pelo decisor, na maioria dos casos os valores das funções objetivo não se degradam bruscamente diante de possíveis variações dos coeficientes, e ainda na maioria dos casos a solução é viável (Lucas, 2009). Procura-se com esta abordagem um tratamento da incerteza associada ao problema de PLMO que não gere apenas soluções muito conservadoras (como é o caso das baseadas em modelos *minmax*), dando a possibilidade de explorar, através do estabelecimento de alguns parâmetros de controle, soluções com diferentes características, quer dos valores das funções objetivo e dos compromissos (*tradeoffs*) subjacentes, quer a estabilidade face à variação dos coeficientes em intervalos. Esta visão está de acordo com o conceito de robustez que denomina uma conclusão de robusta quando essa é obtida várias vezes ou em todas as vezes em que um conjunto de valores possíveis dos dados do problema e dos parâmetros do modelo são implementados (Roy, 1998). O fato de se tratar de uma abordagem na qual é requerida a intervenção do decisor visa minorar as dificuldades práticas daí decorrentes para o próprio processo de apoio à decisão evitando apresentar ao decisor um grande número de soluções para avaliação.

2 – Programação Linear Multiobjetivo

A busca da tomada de decisão técnica requer o conhecimento do problema em questão, considerando a relevância de cada um dos aspectos das possíveis questões, e de técnicas que possam sistematizar as questões e potencializar o alcance de uma decisão racional.

Os modelos e métodos multi-objetivo permitem aos decisores racionalizar as comparações entre as potenciais soluções alternativas, auxiliando na percepção dos aspectos conflitantes sob avaliação e na compreensão da natureza dos compromissos que devem ser feitos para a escolha de cada solução. Assim, na busca de aperfeiçoar o entendimento dos problemas em estudo e apresentar soluções que possam espelhar melhor a realidade dos cenários apresentados, tem se enfatizado o estudo dos problemas com múltiplos objetivos. O problema da formação de um critério de otimização único a partir de critérios não comparáveis primeiro surgiu nos trabalhos de Pareto (1896) (Zeleny,1974).

Os problemas multi-critério subdividem-se normalmente em dois grandes grupos, aos quais estão associadas as respectivas abordagens metodológicas: os problemas multi-atributo e os problemas multi-objetivo.

Na análise multi-atributo as alternativas admissíveis são explicitamente conhecidas e em número finito. Neste contexto, podem distinguir-se as problemáticas de seleção, ordenação ou caracterização (Roy, 1990).

Na programação multi-objetivo, o conjunto das soluções viáveis forma um contínuo, sendo definido implicitamente por um conjunto de restrições (como também na programação mono-objetivo), mas o conjunto das alternativas viáveis, no espaço das variáveis de decisão, é mapeado no espaço das funções objetivo, de modo a que a cada alternativa está associado um vetor cujas componentes são os valores das funções objetivo correspondentes a essa alternativa (Steuer, 1986; Cohon, 1978).

Na literatura científica, o significado dos termos incerteza e risco nem sempre são usados de forma consistente por todos os autores (Antunes, 1991; Borges, 2005). O tratamento das questões relacionadas à incerteza e ao risco em modelos de programação matemática pode ser efetivado através de diferentes abordagens metodológicas. A escolha de cada abordagem depende, essencialmente, do tipo de informação disponível, da informação que o decisor está interessado em obter e do modo como apreende a imprecisão inerente ao modelo e aos dados (Borges, 2005).

2.1 Problema Linear Multiobjetivo

O problema de programação linear com objetivos múltiplos consiste na otimização de p funções objetivo lineares sujeitas a um conjunto de restrições lineares.

Para facilitar a notação, considera-se que as funções objetivo são todas a maximizar:

$$\begin{aligned}
&\max\ f_1\ (\underline{x}) = \underline{c}_1\underline{x} \\
&\max\ f_2\ (\underline{x}) = \underline{c}_2\ \underline{x} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\max\ f_p\ (\underline{x}) = \underline{c}_p\ \underline{x} \\
&sujeito\ a\ \underline{x} \in X\ \left\{\underline{x} \in \Re^n \mid \underline{x} \geq 0\ ,\ \mathrm{A}\underline{x} = \underline{b}\ ,\ \underline{b} \in \Re^m\right\} \\
&ou \\
&"Max"\ \underline{f}\ (\underline{x}) = C\ \underline{x} \\
&s.a\ \ x \in X
\end{aligned}$$

onde ***p*** é o número de funções objetivo, ***n*** o número de variáveis, ***m*** o número de restrições, $\underline{\boldsymbol{x}}$ o vetor das variáveis de decisão, **C** é a matriz dos objetivos (dimensão ***p*** × ***n***), cujas linhas são os vetores $\underline{\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{p}}$ (coeficientes da função objetivo $\boldsymbol{f}_{\mathrm{p}}$), **A** é a matriz dos coeficientes tecnológicos (***m*** × ***n***), $\underline{\boldsymbol{b}}$ é o vetor dos termos independentes, ***X*** é a região viável no espaço das variáveis (Steuer, 1986; Clímaco, Antunes e Alves, 2003).

2.2 Solução Eficiente e Solução Não Dominada

Uma solução é dita eficiente para um problema multiobjetivo se e somente se não existir outra solução viável que melhore o valor de uma função objetivo, sem piorar o valor de, pelo menos, outra função objetivo (Clímaco, Antunes e Alves, 2003).

$$\begin{aligned}
&X_E = \left\{\underline{x} \in X \mid \nexists\ \underline{x}' \in X : \underline{f}(\underline{x}') \geq \underline{f}(\underline{x})\right\} \\
&onde\ \ \underline{f}(\underline{x}') \geq \underline{f}(\underline{x})\ sse\ \underline{f}(\underline{x}') \geq \underline{f}(\underline{x})\ e\ \ \underline{f}(\underline{x}') \neq \underline{f}(\underline{x})
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Em PLMO o conjunto viável (Espaço de Decisão) produz outro espaço vetorial denominado Espaço dos Objetivos que é a imagem do conjunto viável. O espaço dos objetivos tem ***p*** dimensões, ou seja possui a dimensão de acordo com o número de funções objetivo.
A solução não dominada é a imagem das soluções eficientes no Espaço dos Objetivos.

2.3 Solução ideal, solução anti-ideal e tabela de ótimos individuais

A solução ideal é o ponto $\underline{z}$* no espaço das funções objetivo que otimizaria simultaneamente todas as funções. Cada componente da solução ideal é o valor ótimo de cada função objetivo, otimizada individualmente, na região admissível. Quando as funções objetivo estão em conflito, a solução ideal está para além da região viável, mas cada $\underline{z}_k^*$ é individualmente alcançável. A solução ideal pode ser usada como o ponto de referência em funções escalares substitutas que se destinam a calcular a solução não dominada mais próxima, de acordo com uma dada métrica. Note-se que pode não existir uma solução $\underline{x}$* no espaço das variáveis de decisão (mesmo não viável) que tenha como imagem $\underline{z}$* no espaço das funções objetivo, pelo que a solução ideal se define unicamente neste espaço (Clímaco *et al.*, 2003).

A tabela de ótimos individuais (também chamada de tabela de "*pay-off*") contém os valores das funções objetivo para cada solução não dominada que é o ótimo individual de cada função. Esta tabela permite fornecer uma informação sobre as gamas de valores de cada função objetivo na região não dominada.

A tabela de ótimos individuais tem a seguinte forma, onde $z^{i,k} = \underline{c}_k\ \underline{x}^i$, com $z^{i,i} = \underline{c}_i\ \underline{x}^i =$ $z^{*,i}$ sendo as colunas representadas pelas soluções x^i que são ordenadas na mesma sequência das respectivas funções objetivo que estão sendo otimizadas, ou seja na coluna 1 está sendo calculado o valor de f_1 com a respectiva solução ótima e apresentado na célula $z^{1,1}$ e nas demais linhas a solução ótima de f_1 será atribuída às demais funções objetivo. Na segunda coluna será apresentada a solução que otimiza f_2 e assim sucessivamente.

	$\underline{x}^1$	$\underline{x}^2$		$\underline{x}^k$		$\underline{x}^p$
f_1	$z^{1,1} = z^{*,1}$	$z^{2,1}$	...	$z^{k,1}$	...	$z^{p,1}$
f_2	$z^{1,2}$	$z^{2,2} = z^{*,2}$	...	$z^{k,2}$	...	$z^{p,2}$
	...	...	...	...	...	...
f_k	$z^{1,k}$	$z^{2,k}$	...	$z^{k,k} = z^{*,k}$	...	$z^{p,k}$
	...	...	...	...	...	...
f_p	$z^{1,p}$	$z^{2,p}$	...	$z^{k,p}$	...	$z^{p,p} = z^{*,p}$

A solução ideal pode ser identificada na diagonal da tabela de ótimos individuais (elementos $z^{*,k} = z^{k,k}$).

Contudo, para problemas com mais de duas funções objetivo, os piores valores de cada função objetivo na região não dominada podem não estar disponíveis nesta tabela. Pode acontecer que o pior valor de uma dada função objetivo na região não dominada não seja alcançado em uma solução que é o ótimo individual de outra função objetivo (e apenas estas soluções estão representadas na tabela).

2.4 - Funções escalares substitutas

As soluções não dominadas do problema multiobjetivo original são obtidas através da otimização de uma função escalar substituta que agrega temporariamente as múltiplas funções objetivo, incluindo também parâmetros de informação das preferências do decisor (Wierzbicki, 1986; Vanderpooten, 1989, 1990; Vanderpooten e Vincke, 1989; Antunes, 1991; Clímaco *et al.*, 2003).

A otimização de uma função escalar substituta deve conduzir apenas a soluções não dominadas, podendo gerar todas ou um subconjunto representativo de todas as soluções não dominadas através da manipulação dos parâmetros de informação de preferências.

Estas funções escalares substitutas podem fazer parte do processo de aprendizagem do problema em estudo, garantindo a obtenção de soluções não dominadas. Também podem ser usadas com interface direta ao decisor, através dos métodos interativos, considerando que a cada iteração as preferências podem se modificar durante o processo de aprendizagem.

No quadro dos métodos interativos, o papel da função escalar substituta deve ser sobretudo considerado como um meio de cálculo de soluções não dominadas guiado pelas preferências do decisor, mas sem a assumir como uma verdadeira representação analítica das suas preferências. (Clímaco *et al*., 2003)

2.4.1 - Cálculo da solução que minimiza uma distância a um ponto de referência.

Este processo de determinação de soluções eficientes consiste na minimização de uma distância a um ponto de referência, o qual é, em geral, estabelecido pelo decisor, representando os valores que gostaria de atingir (as suas aspirações) em cada função objetivo. Muitas vezes a solução ideal é usada como este ponto de referência, dado que cada componente da solução ideal é o melhor valor que é possível cada função objetivo individualmente atingir na região admissível.

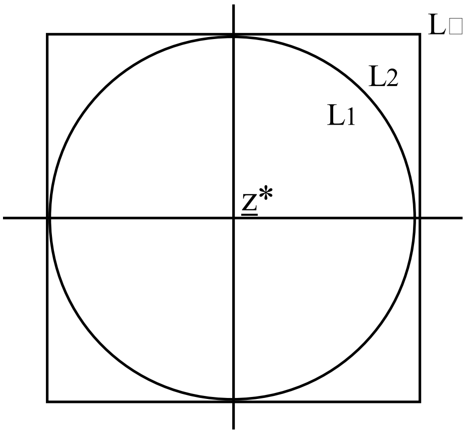

Fig. 2.1 - Contornos de isodistância das métricas L_1, L_2 e L_∞

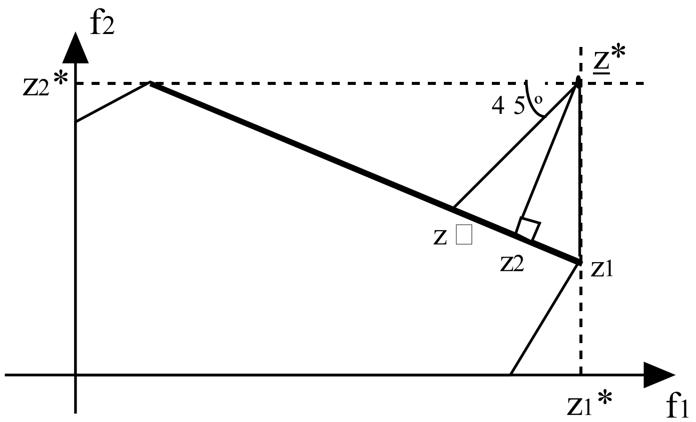

Fig. 2.2 – Utilização das métricas L_1, L_2 e L_∞ em funções distância

As métricas mais usadas são as métricas L_1, L_2 (Euclideana) e L_∞ (de Chebycheff). A fig. 2.1 mostra os contornos de isodistância (lugar geométrico dos pontos à mesma distância) para $\underline{z}$* para essas métricas. Na fig. 2.2, os pontos z_1, z_2 e z_∞ minimizam as distâncias à solução ideal $\underline{z}$*, usando as métricas L_1, L_2 e L_∞, respectivamente. Adotando a solução ideal como ponto de referência, o cálculo da solução que minimiza a distância de métrica L_p é

$$\begin{array}{ll} \min & \| \underline{z}^* - \underline{f}(\underline{x}) \|_p \\ \text{s. a} & \underline{x} \in X. \end{array}$$

Para p=1 todos os desvios em relação ao ponto de referência são considerados. À medida que p aumenta, maiores desvios vão tendo cada vez maior impacto no valor da distância. Para a métrica L_∞ o maior desvio prevalece sobre todos os outros e apenas esse é considerado (ou seja, resulta na situação minimizar o maior desvio). Neste caso obtém-se um problema do tipo minimax que pode ser transformado num problema linear através da introdução de uma variável adicional:

$$\begin{array}{ll} \min & v \\ \text{s. a} & v + f_k(\underline{x}) \geq z_k^* \quad k=1,\dots,p \\ & \underline{x} \in X \\ & v \geq 0. \end{array}$$

Se o problema multi-objetivo original for linear, por este processo os problemas escalares substitutos apenas são lineares com as métricas L_1 e L_∞, sendo possível através da manipulação da informação de preferências níveis de aspiração ou pesos, no caso de se tratar de métricas ponderadas, obter qualquer dos pontos da região não dominada (i.e., não apenas vértices).

3 - Introdução a Análise de Intervalos

Matemática de Intervalos é a generalização na qual os números intervalos substituem os números reais, a aritmética de intervalos substitui a aritmética dos reais, e análise de intervalos substitui a análise real (Hansen, 1992).

Podemos afirmar que a matemática de intervalos teve início com o aparecimento do livro de Moore "Interval Analysis" em 1966. Este trabalho transformou esta simples idéia numa ferramenta viável para análise do erro. Ao invés de meramente tratamento de arredondamento de erro, Moore (1966) estendeu o uso de análise de intervalos para limitar o efeito do erro de todas as origens, inclusive erro de aproximação e erro em dados. Desde então, várias publicações sobre análise de intervalos têm ocorrido (Hansen, 1992).

3.1 Principais definições

Considera-se o intervalo real $X = [a, b]$, ou seja, o número intervalo X é um intervalo fechado que consiste no conjunto $\{x\text{: } a \leq x \leq b\}$ de números reais incluindo os pontos a e b.

Um número real x é equivalente a um intervalo $[x, x]$. Tal intervalo é denominado **intervalo degenerado**. Quando um número real é expresso como um intervalo, usualmente mantem-se a notação simples. Por exemplo, o número 2 é apresentado no lugar de [2, 2] ou x no lugar de $[x, x]$.

As regras de aritmética de intervalos são simples quando um ou ambos os termos são intervalos degenerados. Portanto, neste caso é melhor deixar um intervalo degenerado como um número real.

Um intervalo $X = [a, b]$ é dito positivo (ou não negativo) se $a \geq 0$, estritamente positivo se $a > 0$, negativo (ou não positivo) se $b \leq 0$, e estritamente negativo se $b < 0$.

Dois intervalos $[a, b]$ e $[c, d]$ são iguais se e somente se $a = c$ e $b = d$.

Os números intervalos são parcialmente ordenados. Temos $[a, b] < [c, d]$ se e somente se $b < c$. (Hansen, 1992).

3.2 Aritmética de Intervalos

As operações de adição, subtração, multiplicação e divisão são indicadas pelos sinais $+$, $-$, $*$, /, respectivamente. Se **op** significa uma destas operações para a aritmética dos números reais x e y, assim a correspondente operação para a aritmética dos números intervalos X e Y (Hansen, 1992) é :

$$X \textbf{ op } Y = \{x \textbf{ op } y : x \in X, y \in Y\} \quad (3.1)$$

Assim, o intervalo X **op** Y resultante desta operação contém todos os números que podem ser formados como x **op** y para cada $x \in X$ e cada $y \in Y$.

4 - Apresentação da abordagem interativa baseada em pontos de referência

Esta abordagem pretende identificar soluções eficientes em modelo de PLMO nos quais todos os (ou apenas alguns) coeficientes são especificados como números intervalos, refletindo a incerteza associada ao problema. De acordo com o "que pode acontecer" (ou seja, para qualquer concretização dos coeficientes nos intervalos especificados) pretende-se obter soluções que respondam às seguintes preocupações:

- Para uma determinada "concretização" da região viável os valores das funções objetivo nunca estão abaixo de determinados níveis de reserva impostos pelo decisor.
- Para a "maioria" dos casos, não há uma degradação brusca dos valores das funções objetivo; isto é, uma solução que apresente uma degradação acentuada, para alguma

função objetivo, para além de uma dada vizinhança, não pode ser classificada como robusta.

- Para a "maioria" dos casos, a solução permanece viável.

Esta abordagem requer o estabelecimento de alguns parâmetros de controle por parte do decisor que têm um papel essencial na classificação de uma solução como robusta ou não robusta. Estes parâmetros introduzem um grau de subjetividade adicional (praticamente impossível de evitar neste contexto a não ser que se enverede por soluções muito conservadoras do tipo *minmax*) mas com a vantagem de envolver o decisor no processo de identificação das soluções consideradas robustas.

A formulação do problema de PLMO com coeficientes em intervalos é a seguinte, na qual para cada coeficiente são conhecidos os limites inferior (denotado por L) e superior (denotado por U) de variação, assumindo que não está disponível a informação adicional (Lucas, Antunes e Climaco, 2005):

$$\max \quad z_k(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{n}\left[c_{kj}^L, c_{kj}^U\right]\, x_j \qquad k = 1, \ldots, p$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{j=1}^{n}\left[a_{ij}^L, a_{ij}^U\right]\, x_j \leq \left[b_i^L, b_i^U\right] \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, n$$

A partir deste problema, a abordagem interativa proposta para apoio à identificação de soluções eficientes robustas desenvolve-se da seguinte forma. (Lucas, 2009)

1a- Cálculo das soluções que otimizam individualmente cada função objetivo $z_k(\underline{x})$ (k=1,...,p) com os coeficientes da função objetivo "mais favoráveis" na região viável "ampliada". Para funções a maximizar e restrições do tipo ≤ será

$$\max \quad z_k^U(\underline{x})$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^L\, x_j \leq b_i^U,\ i = 1, \ldots, m,$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n.$$

Estes valores constituirão um ponto de referência ($z_1^{U*}, z_2^{U*}, \ldots, z_p^{U*}$), numa perspectiva "otimista" dado que considera que todos os coeficientes intervalares do modelo estão simultaneamente nos seus extremos mais favoráveis.

1b- Cálculo das soluções que otimizam individualmente cada função objetivo $z_k(\underline{x})$ (k=1,...,p) com os coeficientes da função objetivo "menos favoráveis" na região viável "reduzida". Para funções a maximizar e restrições do tipo ≤ será

$$\max \quad z_k^L(\underline{x})$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^U\, x_j \leq b_i^L,\ i = 1, \ldots, m,$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n.$$

Estes valores constituirão um ponto de referência ($z_1^{L*}, z_2^{L*}, \ldots, z_p^{L*}$), numa perspectiva "pessimista" dado que considera que todos os coeficientes intervalares do modelo estão simultaneamente nos seus extremos menos favoráveis.

2a- Calcular a solução que minimiza uma distância (ponderada) de Chebycheff ao ponto de referência "otimista" usando os coeficientes centrais ("nominais") das funções objetivo, numa região viável que "privilegia" a região situada entre a região viável "ampliada" e a região viável "reduzida" (Lucas et al., 2005). Para mitigar os efeitos das ordens de grandeza dos valores das funções objetivo, os coeficientes da função objetivo podem ser multiplicados por um fator de escala, ou pode ser feita uma normalização, ou podem ainda ser usados os pesos calculados como no método STEM (Benayoun at al., 1971) que consistem num termo relacionado com as gamas de variação de cada função objetivo e num termo de normalização quadrática. Este coeficiente de ponderação é designado por g_k.

$$\begin{aligned}
\min \quad & v \\
\text{s.a} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{L} x_j \le b_i^{U}, \quad i = 1, \ldots, m, \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{U} x_j \ge b_i^{L}, \quad i = 1, \ldots, m, \\
& g_k \left(z_k^{U*} - z_k^{C}(\underline{x}) \right) \le v, \quad k = 1, \ldots, p, \\
& v \ge 0 \\
& x_j \ge 0, \; j = 1, \ldots, n.
\end{aligned}$$

A solução deste problema designa-se por $(\underline{x}^{0U}, \underline{z}^{0U})$.

2b- Calcular a solução que maximiza uma distância ponderada de Chebycheff ao ponto de referência “pessimista” usando os coeficientes centrais (“nominais”) das funções objetivo, na mesma região viável usada na formulação acima.

$$\begin{aligned}
\max \quad & v \\
\text{s.a} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{L} x_j \le b_i^{U}, \quad i = 1, \ldots, m, \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{U} x_j \ge b_i^{L}, \quad i = 1, \ldots, m, \\
& g_k \left(z_k^{C}(\underline{x}) - z_k^{L*} \right) \ge v, \quad k = 1, \ldots, p, \\
& v \ge 0 \\
& x_j \ge 0, \; j = 1, \ldots, n.
\end{aligned}$$

A solução deste problema designa-se por $(\underline{x}^{0L}, \underline{z}^{0L})$.

Em qualquer um destes problemas são eliminadas as restrições $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{U} x_j \ge b_i^{L}$, i = 1, …, m, que eventualmente provoquem a inexistência de solução, até ser obtida uma região viável não vazia.

3- São calculadas soluções resolvendo o seguinte problema escalar substituto com coeficientes gerados aleatoriamente dentro dos seus intervalos

$$\begin{aligned}
\min \quad & v \\
\text{s.a} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{r} x_j \le b_i^{r}, && i = 1, \ldots, m, \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{U} x_j \ge b_i^{L}, && i = 1, \ldots, m, \\
& g_k \left(z_k^{U*} - z_k^{r}(\underline{x}) \right) \le v, && k = 1, \ldots, p, \\
& z_k^{r}(\underline{x}) \ge z_k^{L*}, && k = 1, \ldots, p, \\
& z_k^{L}(\underline{x}) \ge z_k^{L*}, && k = 1, \ldots, p, \\
& v \ge 0 \\
& x_j \ge 0, && j = 1, \ldots, n.
\end{aligned}$$

onde *r* denota que os coeficientes são gerados aleatoriamente com uma distribuição uniforme dentro dos seus intervalos de variação.

De um conjunto de soluções geradas através da resolução deste problema, são retidas como robustas aquelas cujos valores das funções objetivo, com os coeficientes centrais (nominais):

- nunca são piores em um valor superior a D_k (k=1,...,p), que pode ser dado em valor absoluto ou em percentagem, em relação aos valores das funções objetivo com os coeficientes mais favoráveis, e

- são sempre melhores pelo menos num valor f_k (k=1,...,p) (eventualmente $D_k = f_k$, para algum ou todos os k=1,...,p) em relação aos valores respectivos das funções objetivo com os coeficientes menos favoráveis, e

- nunca variam mais de ε% em relação aos valores das funções objetivo obtidos com coeficientes aleatórios dentro dos intervalos em todas as simulações (fases 2 e 3).

Poder-se-iam ainda definir categorias (inferiores) de soluções robustas para os casos em que apenas uma das condições acima seja satisfeita. Estas categorias de robustez poderiam ainda ter uma ordem de mérito se fosse mais (ou menos) importante nunca estar afastado mais de D_k na função objetivo k em relação ao valor de $z_k(\underline{x})$ com os coeficientes mais favoráveis ou estar sempre mais afastado do que f_k em relação ao valor de $z_k(\underline{x})$ com os coeficientes mais desfavoráveis.

5 - Outras possibilidades de desenvolvimento desta abordagem

Uma possibilidade de desenvolvimento desta abordagem seria a seguinte.

A resolução do problema na fase 3 seria repetida *h* vezes com os coeficientes das funções objetivo gerados aleatoriamente dentro dos seus intervalos.

Se os valores das funções objetivo se situarem mais de *q* vezes numa vizinhança D_k (k=1,...,p) de $\underline{z}^{0U}=\underline{z}(\underline{x}^{0U})$, ou de $\underline{z}^{0L}=\underline{z}(\underline{x}^{0L})$, então $\underline{x}^{0U}$, ou $\underline{x}^{0L}$ é classificada como solução robusta face à *qualidade* dos valores das funções objetivo. O parâmetro *q* atua como um limiar de *qualidade* da solução. Seria possível ainda estabelecer um parâmetro de veto de modo a "vetar" a *qualidade* da solução sempre que os respectivos valores das funções objetivo se situassem a mais do que certa distância de um valor desejado, ou a menos de certa distância de um valor indesejado.

Adicionalmente, os coeficientes a_{ij} e b_i são gerados aleatoriamente dentro dos intervalos. Se a solução for não viável (com respeito às restrições intervalares) um número de vezes inferior a *s* então é classificada como solução robusta face à *viabilidade*.

Se uma solução for considerada robusta face à *qualidade* (dos valores das funções objetivo) e face à *viabilidade* então é classificada como solução robusta.

Se na fase 3 a solução não for robusta então são retiradas todas as restrições do tipo $\sum_{j=1}^{n} a^{U}_{ij} x_j \geq b^{L}_{i}$ (i = 1, …, m) para as quais $\sum_{j=1}^{n} a^{U}_{ij} x_j - b^{L}_{i} \leq d_i\, b^{L}_{i}$, onde d_i é uma percentagem, de modo a alargar a região viável (i = 1, …, m).

6 – Conclusão

A sistematização de problemas reais sob a condição de incerteza ainda apresenta um grande campo de desenvolvimento científico, a gestão da incerteza ainda precisa ser explorada em muitas áreas, requerendo o surgimento de novas técnicas. A abordagem interativa apresentada neste trabalho é capaz de proporcionar a possibilidade da exploração de uma área da região viável muito importante para o modelo de programação linear multiobjetivo onde a incerteza possa ser inserida no modelo através de coeficientes em intervalos. A incerteza através de um número intervo é de fácil compreensão e implementação, além de não requerer conhecimentos sobre as distribuições de probabilidade dos dados sobre o problema em questão. Como perspectiva de desenvolvimento pode ser considerada a necessidade de implementação da técnica através da elaboração de um software específico que torne amigável a interface com o decisor e também a verificação da aplicabilidade em várias áreas científicas como às áreas da Saúde e de Sustentabilidade, onde pequenas variações podem representar decisões com grande impacto nas soluções dos problemas.

REFERÊNCIAS

Antunes, C. H, S. F. Lucas, J. Climaco (2006). Robust solutions for MOLP problems using interval programming. Proceedings of the Eleventh International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems IPMU 2006), Vol. 1, 452-459, Paris.

Antunes, C. H. (1991). Apoio à Decisão em Programação Linear Multi-Objetivo - Um Modelo para o Planeamento Estratégico de Redes de Telecomunicações. Tese de Doutoramento em Engenharia Electrotécnica, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra.

Antunes, C. H., J. Clímaco (2000). Decision Aid in the Optimization of the Interval Objective Function. In "Decision Making: Recent Developments and Worldwide Applications", S.H. Zanakis, G. Doukidis, C. Zopounidis (Eds.), Applied Optimization, vol. 45, 251-261, Kluwer Academic Publishers.

Antunes, C. H., M. J. Alves, A. L. Silva, J. Clímaco (1989). Algumas reflexões sobre uma base de métodos de programação linear multi-critério. Investigação Operacional, vol. 9, nº 2, 19-35.

Antunes, C. H., M. J. Alves, A. L. Silva, J. N. Clímaco (1992). An integrated MOLP method base package - a guided tour of TOMMIX. Computers and Operations Research, Vol. 19, Nº 7, 609-625.

Benayoun, R., J. de Montgolfier, J. Tergny, O. Larichev (1971). Linear programming with

Bertsimas D. , M. Sim (2004). The price of robustness. Operations Research, vol. 52, 35 – 53.

Bitran, G. (1980). Linear multiple objective programs with interval coefficients. Management Science, vol. 26, nº 7, 694-706.

Borges, A. R. (2005). Abordagens Interativas para Tratamento da Incerteza em Modelos de Optimização Multiobjetivo para Apoio à Decisão. Tese de Doutoramento em Engenharia Electrotécnica e de Computadores, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra.

Chineck J. W., K. Ramadan (2000). Linear programming with interval coefficients. Journal of the Operational Research Society, vol. 51, 209 – 220.

Clímaco, J., C. H. Antunes, M. J. Alves (2003). Programação Linear Multiobjetivo, Imprensa da Universidade de Coimbra, Coimbra.

Cohon, J. (1978). Multiobjective Programming and Planning. Academic Press.

Haimes, Y. Y. (2004). Risk Modelling, Assessment and Management, Wiley.

Hansen, E. (1992) Global Optimization Using Interval Analysis, Marcel Dekker, Inc., New York.

Hwang, C., A. Masud (1979). Multiple Objective Decision Making - Methods and Applications. LNEMS 164, Springer-Verlag.

Inuiguchi M., M. Sakawa (1995). Minimax regret solution to linear programming problems with an interval objective function. European Journal of Operational Research;, vol. 86, 526 – 536.

Inuiguchi M., M. Sakawa (1996). Possible and necessary efficiency in possibilistic multiobjective linear programming problems and possible efficiency test. Fuzzy Sets and Systems, vol. 78, 321 – 241.

Inuiguchi M., M. Sakawa (1997). An achievement rate approach to linear programming problems with an interval objective function. Journal of the Operational Research Society, vol. 48, 25-33.

Inuiguchi M., Y. Kume (1991). Goal programming problems with interval coefficients and target intervals. European Journal of Operational Research, vol. 52, 345 – 360.

Inuiguchi M., Y. Kume (1994). Minimax regret in linear programming problems with an interval objective function. In Multicriteria Decision Making, G. H. Tzeng, H. F. Wang, U. P. Wen & P. L. Yu (Eds), Springer-Verlag, New York, 65 - 74.

Ishibuchi H., H. Tanaka (1990). Multiobjective programming in optimization of the interval objective function, European Journal of Operational Research, vol. 48, 219 – 225.

Lucas, S. F. (2009) – Gestão da Incerteza em PLMO com os coeficientes intervalares. Tese de Doutoramento em Engenharia Electrotécnica e de Computadores, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra.

Lucas, S. F, C. H. Antunes, J. N. Climaco (2005). Desenvolvimento do Método SONAR para gerenciamento da incerteza em PLMO. XXXVII SBPO, Anais em CD-ROM, Gramado, Brasil.

Matos, M., M. T. Ponce de Leão (1995). Electric Distribution System Planning with Fuzzy Loads, International Transactions in Operational Research, vol.2, no.1, 389-394

Oliveira, O., C. H. Antunes (2007). Multiple objective linear programming models with interval coefficients – an illustrated overview. European Journal of Operational Research, vol. 181, no. 3, 1434-1463.

Pareto, V. (1896). Course d'Economic Politique. Lausane, Rouge.

Roy, B. (1990). Decision-aid and decision-making. Readings in Multiple Criteria Decision Aid, C. Bana e Costa (Ed.), Springer-Verlag, 17-35.

Roy, B. (1998). A missing link in OR-DA: robustness analysis, Foundations of Computing and Decision Sciences, vol. 23, 141-160.

Roy, B. (2004). Robustesse de quoi et vis-à-vis de quoi, mais aussi robustesse pourquoi en aide à la decision?. In C. H. Antunes, J. Figueira & J. Clímaco (Eds.), Aide Multicritère á la Décision / Multiple Criteria Decision Aiding, CCDRC/INESC Coimbra/ FEUC, Coimbra, 29-39.

Steuer, R. E. (1986). Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application. John Wiley & Sons, New York.

Urli, B., R. Nadeau (1992). An interactive method to multiobjective linear programming problems with interval coefficients. INFOR, vol. 30, 127-137.

Urli, B., R. Nadeau (2004). PROMISE/scenarios: An interactive method for multiobjective stochastic linear programming under partial uncertainty. European Journal of Operational Research, vol. 155, 361–372.

Vanderpooten, D. (1989). The interactive approach in MCDA: a technical framework and some basic conceptions. Mathematical and Computer Modelling, vol. 12, 1213-1220.

Vanderpooten, D. (1990). L' Approche Interactive Dans l' Aide Multicritère à la Décision. Thèse de "Docteur en Méthodes Scientifiques de Gestion". Université de Paris-Dauphine.

Vanderpooten, D., Ph. Vincke (1989). Description and analysis of some representative interactive multicriteria procedures. Mathematical and Computer Modelling, vol. 12, 1221-1238.

Wierzbicki, A. (1986). On the completeness and constructiveness of parametric characterizations to vector optimization problems. OR Spektrum, vol. 8, nº 2, 73-87.